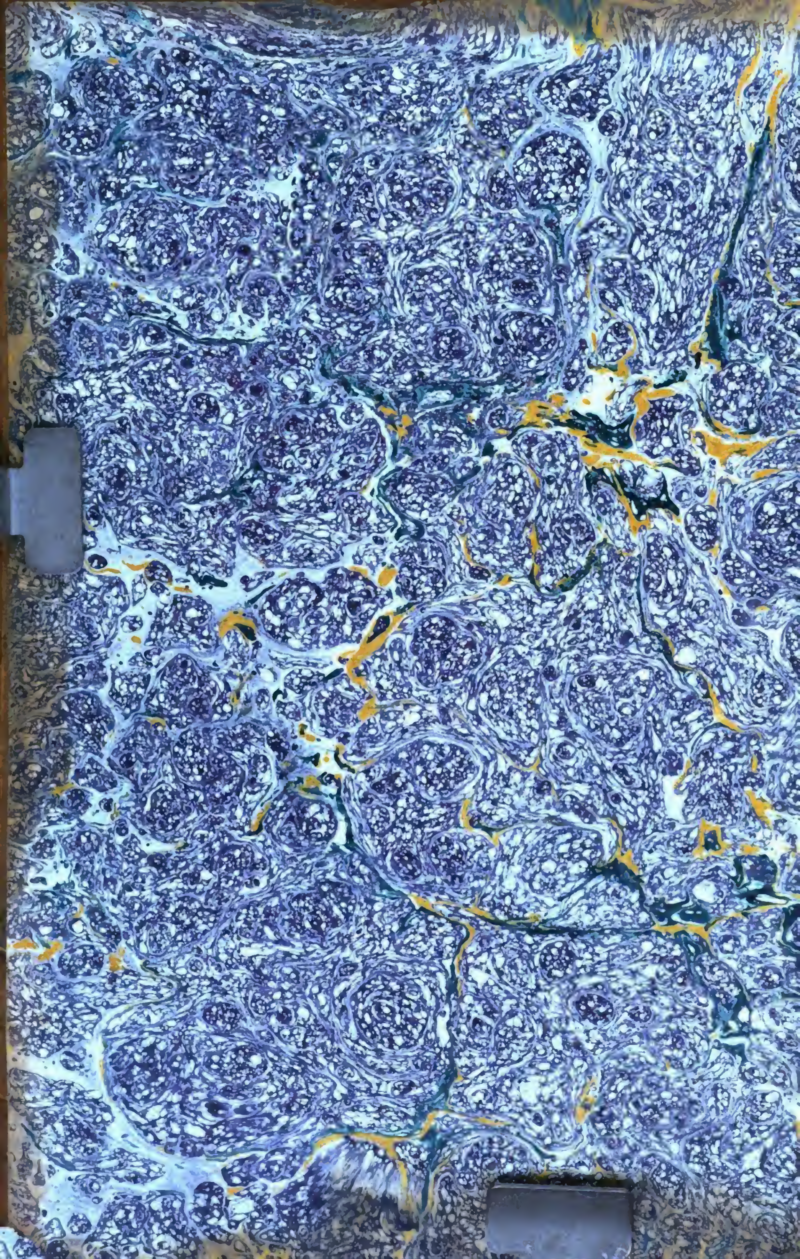
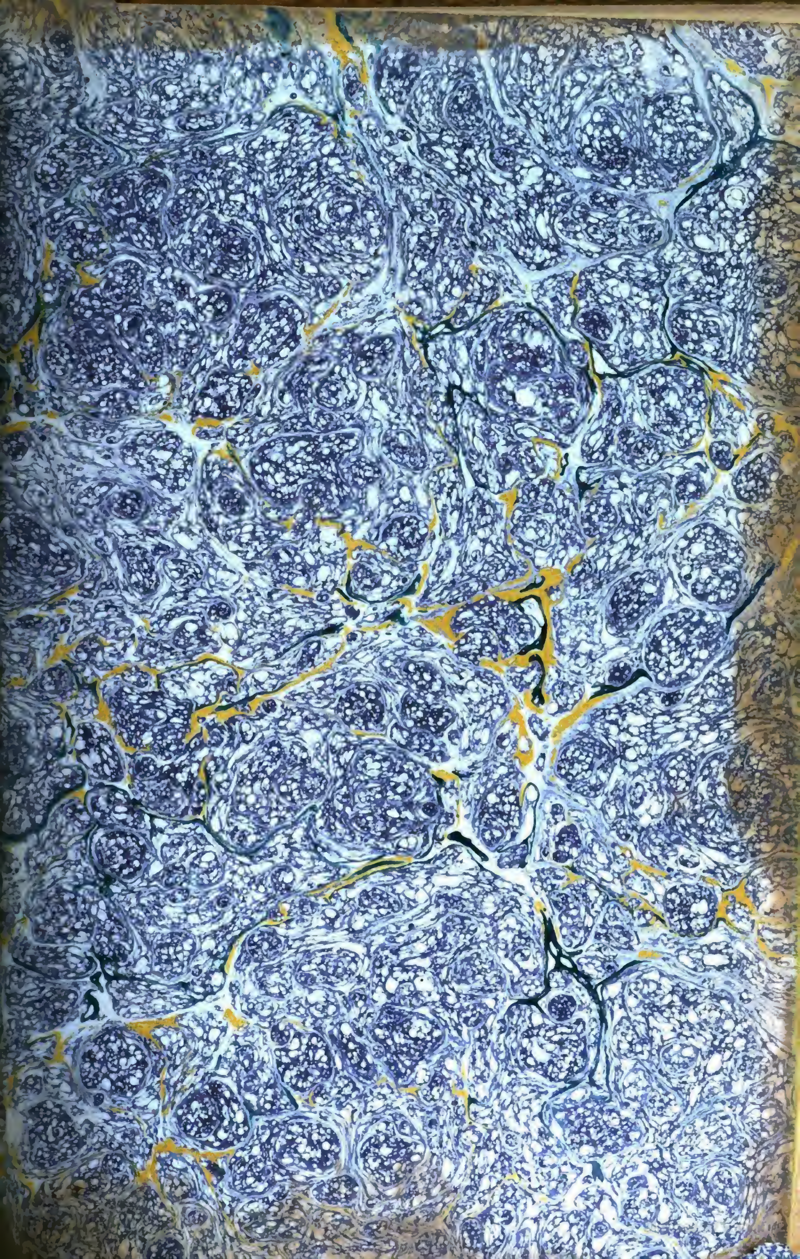




DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBRI SEX,

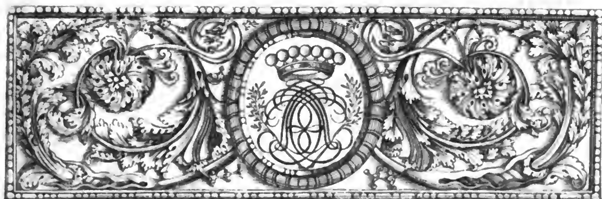
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS.

CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C. & obseruationibus D. P. de FERMAT *Senatoris Tolosani.*

Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.



TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.



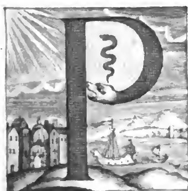
ILLVSTRISSIMO VIRO D.

D. IOANNI BAPTISTÆ COLBERTO,

REGI AB INTIMIS CONSILIIS ET A SECRETIS,

Ærarij Cenſori generali,

SVMMO REGIORVM ÆDIFICIORVM,
NAVIGATIONIS ET COMMERCII PRÆFECTO,
Regni Adminiſtro, &c.



RODIT in lucem tuis auſpicijs, Vir Illuſtriſſime, Diophantus varijs auctus parentis mei obſeruationibus; Illas mole quidem exiguas, ſed pondere, ni fallor, maiores, quæ tua eſt ſumma humanitas, forſitan non aſpernaberis, præſertim cum ad numeros pertineant qui radicis inſtar ac velut in centro Matheſeos poſiti, diffunduntur in omnes illius circuli partes. Cur enim Geometria, & quidquid ei affine eſt, alium quam te

ambiat Patronum, qui terrarum orbem animo metiris, vt in extremis Regionibus in quibus olim emoriens natura defecisse videbatur, præclara Regis maximi facta celebrentur, & Barbarorum pectora liberalibus imbuta disciplinis mitescant. Cum vero illas ferè omnes aut earum semina Mathesis contineat, menti imperio natæ & membris famulitio aptis opitulatur, pacisque ac belli temporibus idonea, non tantum Regijs ædibus magnificè extruendis, sed etiam vrbibus tutò propugnandis vtilem se præbet. Huius doctrinæ non immeritò captus illecebris Parens meus, quem adhuc lugeo, illam succisiuis horis in medio forensium negotiorum strepitu, absque vllo tamen Iurisprudentiæ, & Senatorij muneris dispendio non infeliciter excoluit. An autem hæ, quas tibi, Vir Illustrissime, offero lucubrationes, pondere, vt dixi, majores sint quam mole, si satis otij suppeteret, tu facillimè iudicares, qui Lynceâ sagacitate in abdita quæque penetrans, veritatem ab errore non minus quam veram virtutem à fucatâ secernis, & eorum qui operam nauant ærario puras manus æquè dignoscis, ac puritatem auri se probare posse Matheseos quondam ille genius Archimedes celeberrimo circa coronam Hieronis experimento demonstrauit. Sed te aliò vocant multa magnaque, in quibus ità versaris, vt te pluribus parem, & adhuc majoribus dignum ostendens, inuicti Principis famam, illiusque subditorum leuamen, tibi laborum metam proponas. Id abunde testantur commercij reparatæ, & Piratarum repressæ vires qui Herculem Gallicum Herculeas columnas transeuntem & vtrumque mare committentem vident è latebris tanquam è Caci speluncâ & pertimescunt; idem quoque testantur portus bellicis instructi nauibus quæ peregrinis non indigent armamentis, & hostibus terrorem incutiunt vt pateat qui mari potitur, eum rerum potiri; testantur denique hinc restauratæ tuis curis Artes, nobilique consortio, vt egregiorum æmulatione opificum certatim augeri ac perfici poßint, tuâ industriâ sociatæ, illinc scientiarum arcana in tuis ipsis penatibus mirum in modum illustrata. Quæ satis fidem faciunt quantum tibi cordi sit non solum vt Regni, sed etiam vt Reipublicæ litterariæ fines

promoueantur & vt quidquid ex nouo illius orbe aduehitur, aspirante tui fauoris aurâ obliuionis & inuidiæ scopulos vitare poßit; nunquam illos metuet hoc tui nominis præsidio munitum opus, si benignâ manu, vt enixè rogo, suscipias istud æterni monumentum obsequij, quod tibi voveo,

Addictissimus S. FERMAT.

Lectori Beneuolo.

DIOPHANTVM hîc habes, & varias quibus auctus est obseruationes, paucas illas quidem & breues, non tamen contemnendas; nec enim me latet hujusmodi opera ponderari potius quam numerari à peritis æstimatoribus, quibus vnica demonstratio, imò interdum vnicum Problema magni voluminis instar est; in Mathematicis nimirum disciplinis, noua Laconico licet more exhibita veritas pluris fieri solet, quam verbosa quorumdam tautologia; Doctis tantum quibus pauca sufficiunt, harum obseruationum auctor scribebat, vel potius ipse sibi scribens, his studijs exerceri malebat quam gloriari; adeo autem ille ab omni ostentatione alienus erat, vt nec lucubrationes suas typis mandari curauerit, & suorum quandoque responsorum autographa nullo seruato exemplari petentibus vltrò miserit; norunt scilicet plerique celeberrimorum huius sæculi Geometrarum, quam libenter ille & quantâ humanitate, sua ijs inuenta patefecerit; Quamobrem superstites quosdam Ipsius amicos, sæpe hortatus sum sæpiusque hortabor, vt si quos illius ingenij partus blandâ manu susceperint, illos in musæi vmbrâ diutius delitescere non patiantur; dum autem plura quæ breui, vt spero, prodibunt, colligo, tibi non iniucundam fore duxi, nouam horum Diophanti operum, istarumque simul obseruationum editionem: Illas Parens meus quasi aliud agens & ad altiora festinans margini variis in locis apposuit, præsertim ad quatuor vltimos libros; cum enim ardua sectaretur ille, faciliora & vulgo Logistarum nota quæ duobus primis libris continentur, aut vt ipsius Diophanti verbis vtar, τὰ ἐν ἀρχῇ στοιχειωδῶς ἔχοντα ferè omnino prætermisit; Qualis autem Quantusque in Arithmeticis fuerit Diophantus, sat sciunt qui primis, vt dicitur, labris puram Logisticam gustauerunt; tredecim ille scripserat Arithmeticorum libros, quorum sex tantum extant, vnusque de numeris multangulis, reliqui vel temporis iniuriâ perierunt, aut alicubi forsan Thesauri instar ita seruantur, vt nullius videantur esse, dum publici juris fieri non possunt; meminit Diophanti Suidas in voce Hypathia & Lucillius libro secundo Anthologiæ capite vigesimo secundo Diophanti Astrologi recordatur; an vero Suidas & Lucillius de hoc eodemque loquantur, nihil comperti habemus; cum multi circa Neronis tempora vixisse putant, nec deest qui Antonino pio imperante eum floruisse leuibus fretus coniecturis suspicetur; illud audacter asserere licet, hoc Auctore nullum antiquiorem hactenus innotuisse, qui hanc instaurauerit doctrinam, quam à Græcis acceptam Arabes cum ipso Algebræ nomine ad

nos transmisisse existimantur; eximia vero Problemata quæ hoc opus complectitur, adeo humanæ mentis captum videntur superare, vt ad eorum explanationem indefesso Xylandri labore & mirandâ Bacheti sagacitate opus fuerit; duo illi fuere doctissimi horum librorum interpretes, nam vix eo nomine dignus est Græcus Scholiastes; Bombellius verò in Algebra quam Italico sermone vulgauit, Diophanti quæstionibus suas permiscens, fidi interpretis partes non sustinuit; neque eo functus est munere subtilissimus Vieta qui peragrans auia Logisticæ loca, nec alterius inhærens vestigiis, sua maluit in lucem proferre inuenta quam facem præferre Diophantæis; quantum autem Analyticam vltra veteres terminos promouerit Parens meus, tuum erit, Erudite Lector, judicium; vtinam ipsius cœptis non obstitissent angustiæ temporis, & plura parantem mors heu nimium immatura nobis illum non præripuisset, plura procul dubio ex eodem fonte manassent, nec suis quædam istorum problematum demonstrationibus carerent; quin vero ipse eas penes se, & in scrinio, vt ita loquar, pectoris habuerit, tum aliæ lucubrationes, tum illius animi candor & modestia dubitare non sinunt; licet autem à tot tantisque viris laudatus Parens, à liberis absque inuidia laudari possit, nec illud ingenti luctui solatium, vel potius irritamentum denegari debeat, magis tamen libenter, ni fallor, illius encomium perleges quod in diario Doctorum elegantissimo, & in plerisque clarissimorum scriptorum libris occurrit; horum nonnulli magnificè jamdudum mentionem fecere variorum ipsius operum, quæ licet inedita non tamen latuerunt, vt abundè testantur quædam excerpta quæ adjicere non piget, & doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs illius epistolis à R. P. Iacobo de Billy Societatis Iesu Sacerdote, cuius perspicacissimum ingenium & eruditio commendatione non egent, cum in ipsius operibus satis eluceant; cæterum quidquid in hoc erratum fuerit, id Typographorum incuriæ tribuas, & æqui bonique consulas quæso. VALE.

ELOGE DE MONSIEVR DE FERMAT, Conseiller au Parlement de Tolose.

Du Iournal des Sçauans, du Lundy 9. Fevrier 1665.

ON a appris icy auec beaucoup de douleur la mort de M. de Fermat Conseiller au Parlement de Tolose. C'estoit vn des plus beaux esprits de ce siecle, & vn genie si vniuersel & d'vne estenduë si vaste, que si tous les sçauans n'auoient rendu témoignage de son merite extraordinaire, on auroit de la peine à croire toutes les choses qu'on en doit dire, pour ne rien retrancher de ses loüanges.

Il auoit toûjours entretenu vne correspondance tres particuliere auec Messieurs Descartes, Toricelli, Pascal, Frenicle, Roberual, Hugens, &c. & auec la plus part des grands Geometres d'Angleterre & d'Italie. Mais il auoit lié vne amitié si étroite auec M. de Carcaui, pendant qu'ils estoient confreres dans le Parlement de Tolose, que comme il a esté le confident de ses estudes, il est encore aujourd'huy le depositaire de tous ses beaux escrits.

Mais parce que ce Iournal est principalement pour faire connoître par leurs ouurages les personnes qui se sont renduës celebres dans la republique des lettres; on se contentera de donner icy le catalogue des escrits de ce grand homme; laissant aux autres le soin de luy faire vn éloge plus ample & plus pompeux.

Il excelloit dans toutes les parties de la Mathematique; mais principalement dans la sçience des nombres & dans la belle Geometrie. On a de luy vne methode pour la quadrature des paraboles de tous les degrez.

Vne autre *de maximis & minimis*, qui sert non seulement à la determination des problemes plans & solides; mais encore à l'inuention des touchantes & des lignes courbes, des centres de grauité des solides, & aux questions numeriques.

Vne introduction aux lieux, plans & solides; qui est vn traité analytique concernant la solution des problemes plans & solides; qui auoit esté veu deuant que M. Descartes eut rien publié sur ce sujet.

Vn traité *de contactibus sphæricis*, où il a demonstré dans les solides ce que M. Viet Maistre des Requestes, n'auoit demonstré que dans les plans.

Vn autre traité dans lequel il restablit & demonstre les deux liures d'Apollonius Pergæus, des lieux plans.

Et vne methode generale pour la dimension des lignes courbes, &c.

De plus, comme il auoit vne connoissance tres-parfaite de l'antiquité, & qu'il estoit consulté de toutes parts sur les difficultez qui se presentoient; il a éclaircy vne infinité de lieux obscurs qui se rencontrent dans les anciens. On

a imprimé depuis peu quelques-vnes de ses obseruations sur Athenée; & celuy qui a traduit le Benedetto Castelli de la mesure des eaux courantes, en a inseré dans son ouurage vne tres-belle sur vne Epistre de Synesius, qui estoit si difficile, que le pere Petau qui a commenté cét autheur, a aduoüé qu'il ne l'auoit pû entendre. Il a encore fait beaucoup d'obseruations sur le Theon de Smirne & sur d'autres Autheurs anciens. Mais la plusspart ne se trouueront qu'éparses dans ses Epîtres; parce qu'il n'escriuoit gueres sur ces sortes de sujets, que pour satisfaire à la curiosité de ses amis.

Tous ces ouurages de Mathematique, & toutes ces recherches curieuses de l'antiquité, n'empeschoient pas que M. de Fermat ne fit sa charge auec beaucoup d'assiduité, & auec tant de suffisance, qu'il a passe pour vn des plus grands Iurisconsultes de son temps.

Mais ce qui est de plus surprenant, c'est qu'auec toute la force d'esprit qui estoit necessaire pour soûtenir les rares qualitez dont nous venons de parler, il auoit encore vne si grande delicatesse d'esprit, qu'il faisoit des vers Latins, François & Espagnols auec la mesme elegance, que s'il eût vescu du temps d'Auguste, & qu'il eût passé la plus grande partie de sa vie à la Cour de France & à celle de Madrid.

On parlera plus particulierement des ouurages de ce grand homme, lors qu'on aura recouuert ce qui en a esté publié, & qu'on aura obtenu de M. son fils la liberté de publier ce qui ne l'a pas encore esté.



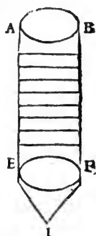
OBSERVATION DE MONSIEVR DE FERMAT *sur Synesius, rapportée à la fin de la traduction du liure de la mesure des eaux courantes, de Benedetto Castelli.*

LES pages qui restent vuides dans ce cayer m'ont donné la pensée de les remplir de la belle obseruation que j'ay apprise ces iours passez, de l'incomparable Monsieur de Fermat, qui me fait l'honneur de m'aimer, & de me souffrir souuent dans sa conuersation. C'est sur la quinziéme Lettre de Synesius Euesque de Cyrene, qui traite d'vne matiere qui n'a esté entenduë par aucun des interpretes, non pas mesmes par le sçauant Pere Petau, ainsi qu'il l'aduoüe luy-mesme dans les Notes qu'il a faites sur cét Autheur; Et ie donne dautant plus volontiers cette obseruation, qu'elle a beaucoup de rapport auec les traitez qui sont cy-deuant.

Cét Euesque escrit à la sçauante Hypatia, qui estoit la merueille de son siecle, & laquelle enseignoit publiquement la Philosophie, auec l'admiration de tous les sçauans, dans la celebre Ville d'Alexandrie. I'ay traduit cette Lettre du Grec en cette maniere. Ie me trouue si mal, que i'ay besoin d'vn hydroscope. Ie vous prie d'en faire faire vn de cuiure, & de me l'acheter. C'est vn tuyau en forme de Cylindre, qui a la figure & la grandeur d'vne fleute; sur sa longueur il porte vne ligne droite, qui est coupée en trauers par de petites lignes, par lesquelles nous iugeons du poids des eaux. L'vn des bouts est couuert d'vn cone, qui est posé également dessus, en telle sorte que le tuyau & le cone ont vne mesme base. L'on appelle cét instrument Baryllion. Si on le met dans l'eau par la pointe il y demeurera debout, & l'on peut aise-

ment compter les sections qui coupent la ligne droite, & par là l'on connoit le poids de l'eau.

Comme nous auons perdu la figure & l'vsage de cét instrument, de mesme qu'vne infinité d'autres belles choses, que les Anciens auoient inuentées, & dont ils se seruoient, les sçauans de ce temps icy se sont donnez beaucoup de peine pour comprendre quel estoit cét instrument dont parle Synesius. Il y en a qui ont crû que c'estoit vne Clepsydre, mais le Pere Petau a rejetté auec raison cette opinion. Pour luy, il aduoüe, qu'il ne le comprend pas; il soupçonne pourtant que c'estoit vn instrument qui seruoit à niueler les eaux, & qui auoit du rapport auec celuy dont Vitruue fait mention au liure 8. ch. *6*. de son Architecture, qu'il appelle Chorobates, mais il est aisé de juger par la lecture de Vitruue, & de Synesius; que ce sont deux instrumens fort differens, & en figure, & en vsage; & que si tous deux ont des sections, comme remarque le Pere Petau, celles du Chorobates sont perpendiculaires sur l'horizon, & celles de l'hydroscope luy sont paralleles. Ie passe sous silence plusieurs autres differences, que ie pourrois remarquer, pour rapporter le sentiment de Monsieur de Fermat, qui est sans doute le veritable sens de Synesius. Cét instrument seruoit pour examiner le poids des differentes eaux pour l'vsage des malades; car les Medecins sont d'accord que les plus legeres sont les meilleures; le terme ῥοπὴ, dont se sert Synesius le monstre clairement. Il ne signifie pas icy *libramentum* le niuelement, comme a crû le Pere Petau, mais en matiere de Machines, il signifie le poids, que les Latins appellent *momentum*, & de là le traitté des equiponderans d'Archimede a pour titre ἰσοῤῥοπικῶν. Mais dautant que la balance, ny aucun autre instrument artificiel, ne pouuoit pas donner exactement la difference du poids des eaux, à cause qu'elle est petite entre elles, les Mathematiciens inuenterent sur les principes du traité d'Archimede *de his quæ vehuntur in aqua*, celuy dont parle Synesius, qui monstre par la nature des eaux mesmes, la difference du poids qu'elles ont entre-elles, la figure en est telle; A F est vn Cylindre de cuiure A B est le bout d'en haut, qui est toûjours ouuert, E F est le bout d'embas, qui est couuert du cone E I F, qui a la mesme base que le bout d'embas; A E, B F, sont deux lignes droites coupées par diuerses petites lignes, tant plus il y en aura, tant plus exact sera l'instrument. Si on le met par la pointe du cone dans l'eau, & qu'on l'ajuste en telle sorte qu'il se tienne debout, il n'y enfoncera pas entierement; car le vuide qu'il a au dedans l'en empeschera; mais il y enfoncera iusques à vne certaine mesure, qui sera marquée par les petites lignes; & il y enfoncera diuersement, suiuant que l'eau sera plus ou moins pesante; car plus l'eau sera legere, plus il y enfoncera: & moins, plus elle sera pesante, comme il nous seroit aisé de le demonstrer, s'il en estoit question icy. Voila la figure & l'vsage de cét instrument, & la raison de cét vsage. La lettre de Synesius s'y rapporte si exactement dans toutes ses circonstances, que feu Monsieur de Monchal, Archeuesque de Tolose, ayant enuoyé cette explication au Pere Petau, il aduoüa que Monsieur de Fermat estoit le seul qui auoit compris quel estoit l'instrument, & il auoit écrit que dans vne seconde impression il la mettroit dans ses notes. Mais parce que cela n'a pas esté fait, i'ay crû que le Lecteur sçauant & curieux ne sera pas marry que ie luy en aye fait part.



LETTRE DE MONSIEVR DESCARTES A MONSIEVR DE FERMAT,

pag. 347. tom. 3. des Lettres de Monsieur Descartes.

MONSIEVR,

Ie n'ay pas eu moins de joye de receuoir la Lettre par laquelle vous me faites la faueur de me promettre vostre amitié, que si elle me venoit de la part d'vne Maistresse, dont j'aurois passionnement desiré les bonnes graces. Et vos autres escrits qui ont precedé me font souuenir de la Bradamante de nos Poëtes, laquelle ne vouloit receuoir personne pour seruiteur, qui ne se fut auparauant éprouué contre elle au combat. Ce n'est pas toutesfois que ie pretende me comparer à ce Roger, qui estoit seul au monde capable de luy resister; mais tel que ie suis, ie vous asseure que i'honnore extremement vostre merite. Et voyant la derniere façon dont vous vsez pour trouuer les tangentes des lignes courbes, ie n'ay autre chose à y répondre, sinon qu'elle est tres bonne, & que si vous l'eussiez expliqué au commancement en cette façon ie n'y eusse point du tout contredit, &c.

AVTRE LETTRE DE MONSIEVR DESCARTES A MONSIEVR DE FERMAT,

pag. 348. tom. 3. des Lettres de Monsieur Descartes.

MONSIEVR,

Ie sçay bien que mon approbation n'est point necessaire, pour vous faire connoistre quelle opinion vous deuez auoir de vous mesme, mais si elle y peut contribuer quelque chose, ainsi que vous me faites l'honneur de m'escrire, ie pense estre obligé de vous auoüer icy franchement, que ie n'ay jamais connu personne, qui m'ait fait paroistre qu'il sçeut tant que vous en Geometrie. La tangente de la ligne courbe, que décrit le mouuement d'vne roulette, qui est la derniere chose que le Reuerend Pere Mersenne a pris la peine de me communiquer de vostre part, en est vne preuue tres asseurée; car dautant qu'elle semble dependre du rapport qui est entre vne ligne droite & vne circulaire, il n'est pas aisé d'y appliquer les regles qui seruent aux autres; & Monsieur de Roberual qui l'auoit proposée, qui est sans doute aussi l'vn des premiers Geometres de nostre siecle, confessoit ne la sçauoir pas, & mesme ne connoistre aucun moyen pour y paruenir. Il est vray que depuis il a dit aussi qu'il l'auoit trouuée, mais ç'a esté justement le lendemain apres auoir sçeu que vous & moy luy enuoyions; & vne marque certaine qu'il se mécontoit, est, qu'il disoit auoir trouué en mesme temps que vostre construction estoit fausse, lors que la base de la courbe estoit plus ou moins grande que la circonference du cercle; Ce qu'il eut peu dire tout de mesme de la mienne, sinon qu'il ne l'auoit pas encore veüe; car elle s'accorde entierement auec la vostre. Au reste, Monsieur, ie vous prie de croire que si i'ay témoigné cy-deuant n'approuuer pas tout à fait certaines choses particulieres qui venoient de vous, cela n'empesche point que la declaration que ie viens de faire ne soit tres vraye. Mais comme on remarque plus soigneusement les petites pailles des diamans, que les plus grandes tâches des pierres communes, ainsi i'ay crû deuoir regarder de plus prés à ce qui venoit de vostre part, que s'il fut venu d'vne personne moins estimée. Et ie ne craindray pas de vous dire que cette mesme raison me console, lors que ie voy que de bons esprits s'estudient à reprendre les choses que i'ay écrites, en sorte qu'au lieu de leur en sçauoir mauuais gré, ie pense estre obligé de les en remercier. Ce qui peut, ce me semble, seruir à vous asseurer que c'est veritablement, & sans fiction, que ie suis, &c.

P. Herigone, tom. 6. Curſus Mathematici p. 68.

De Maximis & minimis.

NVnquam fallit hæc methodus, vt aſſerit eius inuentor, qui eſt doctiſſimus Fermat Conſiliarius in Parlamento Toloſano excellens Geometra nec vlli ſecundus in arte Analytica: qui optimè etiam reſtituit omnia loca plana Apollonij Pergæi, quæ in hac vrbe vidimus manuſcripta in manibus plurimorum, quibus ſubnexa eſt ab eodem auctore ad locos planos & ſolidos Iſagoge.

D. ISMAEL BVLLIALDVS
Exercitatione de Poriſmatibus.

HAnc de poriſmatibus ſcriptiunculam data mihi occaſione compoſui, cùm ante biennium vir illuſtriſſimus ac ampliſſimus Dominus de Fermat in ſuprema Curia Toloſana Senator integerrimus & in judicijs exercendis peritiſſimus, rerum Mathematicarum doctiſſimus, propoſitiones quaſdam ſubtiliſſimas & poriſmata quæ tam theorematicè quàm problematicè proponi poſſunt, ad amicos ſuos huc miſiſſet. Ex Pappi vnius monumentis & collectionibus Mathematicis poriſmatum naturam & vſum diſcere poſſumus, cùm ex Veteribus qui hanc Geometriæ partem attigerunt, præter ipſum nullus ſuperſit. Illius tamen ſententia legenti ſtatim obuia non eſt; textúſque corruptione, & applicationis poriſmatum defectu obſcurior proculdubio euadit. Interea dum tanto viro ſua edere libuerit, noſtra, qualiacumque tandem ſint, publici iuris facere placuit; vt alios ad eorundem inueſtigationem impelleremus; ipſumque Ampliſſimum Dominum de Fermat, ad ſua edenda, vtinam & ad alia ſublimis intellectus ſui εὑρήματα cum omnibus communicanda, excitaremus. Is enim eſt, quem omnes Europæ Mathematici ſuſpiciunt; quem à ſubtiliſſimis ætatis noſtræ Geometris Bonauentura Cauallerio Bononiæ, & Euangeliſta Torricello Florentiæ ſummis laudibus in cœlum ferri, eiuſque inuenta mirabilia prædicari auribus meis audiui, quem etiam virum tam eximiis virtutibus clarum, multáque eruditione ornatum, ac in rebus Mathematicis oculatiſſimum toto pectore veneror ac colo.

R. P. MARINVS MERSENNVS ORDINIS MINIMORVM
Reflectionum Phyſicomathematicarum pag. 215.

CVm autem viuos potius quam mortuos quærerem, vnus abfuit Clariſſimus Fermatius, Geometrarum Coryphæus; quem tamen Burdigalam redux, ductore integerrimo, doctiſſimoque Senatore, Domino d'Eſpagnet, velut auulſum Bergeraco, triduò amplexus ſum.

Doctrinæ

DOCTRINÆ ANALYTICÆ INVENTVM NOVVM.

Collectum à R. P. Iacobo de Billy S. I. Sacerdote ex varijs Epistolis quas ad eum diuersis temporibus misit D. P. de Fermat Senator Tolosanus.

Erudito Lectori.

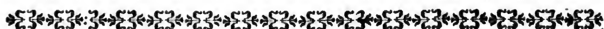
SATIS est in limine huius operis fixisse nomen Fermatij, vt grande aliquid suspiceris, ille enim tantus vir fuit nihil vt fingere potuerit paruum, imò ne mediocre quidem, mens eius tot splendoribus illustris erat vt nihil obscurum pateretur, solem diceres qui tenebras statim excutiat & in ipsis etiam abyssis lucem immodicam radiorum suorum multitudine procreet: Diophantum hactenus mirati sunt vniuersi & merito quidem, verum ille quantus quantus sit, pigmæus est respectu nostri gigantis, qui longum totius orbis mathematici iter emensus, noua climata aliis inuisa peragrauit; Vietam prædicauere quotquot Algebricis operationibus nostro seculo vacauerunt, sufficitque ad famam alicui conciliandam, si dicamus illum in opere analyseos, mentem huius authoris assecutum, sed necdum ille pertigit ad eius scientiæ culmen, vt multis exemplis infra explicandis planum fiet; Claudium Gasparem Bachetum vt subtilissimum analystam & mihi alias intimum veneratus sum semper, atque istius in Diophantum elucubrationes præclare demonstrant quam perspicax fuerit in numeris, at visus illius hebetior est si cum oculis lyncei nostri omnia etiam abstrusissima penetrantis comparetur.

Verum ne hoc opusculum sola illius authoritate fulciatur, lubet hic paucis aperire quid recens repererit & quam late vagetur nouum ipsius inuentum; ac primo, hactenus Analystæ in quibusdam subtilioribus æquationibus duplicatis vnicam solutionem reperire potuerunt, asseritque ipse Bachetus ne duas quidem posse inueniri, Fermatius infinitas mox dabit, nec ipsum remorabuntur numeri ficti & nihilo minores qui sæpius occurrunt in eiusmodi operationibus, sed ipsos ventilabit ocyùs, & subtilissimo scrutinio ad veros tandem reducet: deinde nemo quod sciam triplicatas æquationes soluit hactenus nisi eas ex arte prius composuerit & aptarit tali ratione vt obuiæ statim sint solutiones ipsis etiam tyronibus, Fermatius singularem inuenit methodum qua solui possunt datæ vt libet si vnum excipias casum quem sumus infra explicaturi: tertio quis vnquam in numeris compositis ex quinque speciebus quotlibet solutiones exhibuit? Quis ex primitiuis radicibus elicuit deriuatiuas tum primi gradus, tum secundi, tum tertij, & sic deinceps in infinitum, nemo plane: vni Fermatio debetur hoc inuentum, vnus ille hæc omnia non ex alienis cumulauit operibus, quod rhapsodi quidam facere consueuerunt, sed proprio marte cudit & ex suis ipse fontibus hausit: hoc ille

cum mihi amicissimè communicasset per literas, iudicaui dignissimum quod typis mandaretur & ne ab eius mente vllatenus recedam exscribendum mihi videtur in primis compendium quoddam totius methodi cui nomen dedit appendicis ad dissertationem Claudij Gasparis Bacheti de duplicatis apud Diophantum æqualitatibus. En ipsissima illius verba.

Proposuit feliciter satis plerosque duplicatæ æqualitatis & modos & casus subtilis ille & doctissimus analysta Bachetus ad quæstionem vigesimam quartam libri sexti Diophanti, sed integram sane non demessuit segetem, quas enim quæstiones vnicâ tantum, aut ad summum duplici solutione circumscribit, ad infinitas porrigere & promouere nihil vetat, imo procliui id exequi operatione est in promptu. Proponatur sextus modus quem ipse satis prolixe explicat pag. 439. & 440. casus omnes ab ipso enumerati ex nostrâ quam mox exhibituri sumus methodo infinitas admittunt solutiones, quæ à primâ per iteratas analyses gradatim in infinitum deriuantur. Methodus hæc est: quæratur solutio quæstionis propositæ secundum methodum vulgarem hoc est secundum methodum Bacheti aut Diophantæam, prodibit statim valor numeri siuè radicis ignotæ, quo peracto iteretur analysis & pro valore nouæ inuestigandæ radicis, ponatur vna radix plus numero vnitatum prioris radicis, reducetur quæstio ad nouam æqualitatem duplicatam, in qua vnitates vtrinque reperientur quadratæ propter priorem solutionem, ideoque differentia æquationum ex numeris tantum & quadratis, quæ sunt proximæ inter se species, constabit, quare resoluetur ex Diophanto & Bacheto noua hæc duplicata æqualitas ex quâ pari artificio tertia, & ex tertia quarta, & sic in infinitum deducentur; quod non aduertisse aut Diophantum aut Bachetum imo & Vietam dispendium huc vsque analyseos maximum fuit, sed præcipuum inuentionis nostræ artificium in iis se prodit quæstionibus, in quibus primigenia analysis pro valore incognitæ radicis exhibet numerum notâ defectus insignitum, qui ideo minor esse nihilo intelligitur; methodus autem nostra in hoc casu, non solum in problematis quæ per duplicatas æqualitates soluuntur locum habet, sed generaliter in aliis quibuscumque vt experienti notum fiet; sic igitur procedit: quæratur quæstio proposita secundum methodum vulgarem, si non succedat solutio post absolutam operationem, quia nempe valor numeri habet notam defectus & ideo minor nihilo deprehenditur, non tamen despondendum animum confidenter pronuntiamus, quæ oscitantia, vt verbis Vietæ vtar, fuit & ipsius & veterum analystarum, sed iterum quæstionem tentemus, & pro valore radicis ponamus 1 N. — numero quem sub signo defectus æquari radici incognitæ in prima operatione inuenimus, prodibit noua haud dubie æquatio quæ per veros numeros solutionem quæstionis repræsentabit. Hactenus Fermatius.

Ecce tibi epitomen huius opusculi quod diuidemus in tres partes; prima spectabit solutiones infinitas æquationum duplicatarum, siue illæ occurrant per signum +, siue per signum —: secunda gradum faciet ad triplicatas æquationes, in quibus arcana quædam & huc vsque inaudita aperiemus: tertia conscendet ad numeros ex quinque vel quatuor speciebus compositos, qui quadrato æquati dabunt radices infinitas, si primitiuis adiungantur deriuatiuæ, exhibebitque artem istiusmodi radices eruendi.



PARS PRIMA.

De solutionibus infinitis duplicatarum æqualitatum.

DElibanda est hic breuiter methodus vulgaris duplicatæ æqualitatis quæ sic habet. Duorum terminorum quadrato æquandorum cape differentiam elige duos numeros hanc differentiam producentes, tum vel quadratum semissis summæ producentium æquetur maiori termino, vel quadratum semissis differentiæ producentium æquetur termino minori, sic enim habebitur valor radicis iuxta quem resoluti duo termini exhibebunt quadratos. Exempla dabimus hîc in tribus tantum casibus ex quibus reliquos casus assequi facile est. 1

Primus casus est dum solæ radices & vnitates æquantur quadrato, vt contingit in duobus terminis sequentibus 2 N + 12 & 2 N. + 5. horum differentia 7. producitur ab 1 & 7. illorum summa est 8. quadratus dimidiæ summæ est *16.* qui æquatus 2 N + 12 dat 2. pro valore radicis in vtroque termino, vel eorumdem producentium differentia est *6.* quadratus semissis illius *9.* æquetur minori termino 2 N + 5. & habebitur idem valor 2. duoque termini dati erunt *16.* & *9.* 2

Secundus casus est dum quadrata, radices, & vnitates æquantur quadrato, & est numerus quadratorum quadratus, vt si æquentur quadrato 4 Q + 20 N + 8. & 4 Q. + 4 N − 8. horum differentia est 16. N + *16.* quam producunt 4. & 4 N + 4. summæ 4 N + 8 semissis quadratus est 4 Q. + *16* N + *16.* qui æquatus priori termino ex supradictis dat 2. pro valore radicis. Hîc nota ex infinitis producentibus differentiam superiorem, tales eligi debere vt numerus habens adiunctum characterem radicis, duplus sit lateris quadrati qui idem est in vtroque termino, propterea eligimus 4 N. vt quadratus semissis illius æquetur quadratis 4 Q. igitur duo termini dati æquiualebunt *64.* & *16.* 3

Tertius casus quem adnotasse operæ pretium erit & qui nobis sæpissime futurus est vsui, est cum vnitatum numerus in vtroque termino quadratus est, siue sit idem, siue diuersus, vt si æquandi sint quadrato 1 Q + *16* − 8 N. & *3* Q + *64* + 48 N. diuide quadratum maiorem *64.* per *16.* & quotiens 4. multiplicet minorem terminum 1 Q. + *16.* 8 N. ita enim productus 4 Q. + *64.* − 32 N habebit easdem vnitates quadratas quas alius terminus *3* Q. + *64.* + 48. N. hi duo æquandi sunt quadrato. Horum differentiam 1 Q. + *16* N producunt 1 N. & 1 N. + *16.* (nota iterum *16* esse duplum 8. lateris quadrati qui est communis vtrique termino) horum producentium summa est 2 N + *16.* quadratus dimidiæ summæ 1 Q + *64* + *16.* N. æquatur 4. Q + *64.* − 32 N. & fit *16.* pro valore, ergo duo termini iuxta hunc valorem resoluti sunt 144 & 1600. 4

Præceptum generale ad solutiones infinitas duplicatarum æqualitatum.

Cape valorem radicis per methodum vulgarem, hunc connecte 1 N. cum suo signo, siue sit illud plus, siue minus & fiet noua radix secundum quam resolui debent duo termini in datâ æquatione duplicatâ æquati quadrato & fient noui termini quadrato æquandi, in his inueniatur valor radic is per methodum vulgarem, & præcipuè per tertium casum quem postremo dedi, & quem adnotasse dixi operæ pretium fore, ita extabit nouus valor pro posterioribus terminis; hunc connecte primo va- 5

lori, prout indicat eius ſignum plus vel minus, & fiet nouus valor pro prioribus terminis qui dati ſunt quadrato æquandi.

6 Sit in exemplum vterque terminus ſequens æquandus quadrato 4 N. + 1 & 1 Q. − 2 N + 1. præter 2. qui eſt obuiùs valor, inuenietur etiam valor $\frac{3}{4}$ per methodum vulgarem. Lubet vti vtroque valore ad nouas ſolutiones, ac primo iuxta præceptum pro noua radice capio 1 N + 2. ergo 4 N. + 1 qui fuit primus terminus æquatus quadrato erit 4 N + 9. (nam ſi 1 N. dat 1 N + 2 habebis 4 N. dare 4 N + 8. cui adde vnitatem in eodem primo termino exiſtentem fietque 4 N + 9 ſimili ratione ſumendo rurſus 1 N. + 2. pro 1 N. & iuxta illam reſoluendo 1 Q − 2 N + 1 qui eſt ſecundus terminus datæ æqualitatis, fiet nouus terminus æquandus quadrato 1 Q + 2 N + 9. ab hoc tolle priorem 4 N. + 9. & abſolue hanc duplicem æqualitatem modo communi fietque valor pro poſterioribus terminis $\frac{27}{4}$ cui adde 2 (quia ſumpta fuit noua radix 1 N + 2) & habebis valorem nouum radicis pro data æqualitate $\frac{35}{4}$.

7 Rurſus placet per alium valorem $\frac{3}{4}$ inuenire nouum valorem: pono pro noua radice 1 N + $\frac{3}{4}$ iuxta quam reſoluti dati termini 4 N + 1 & 1 Q − 2 N + 1 dant nouos terminos 4 N + 4. & 1 Q + $\frac{1}{16}$ $\frac{4N}{8}$, igitur quoniam vnitatum numerus vtrobique quadratus eſt, poterit hæc æqualitas duplicata reſolui, ſoluatur vt dictum eſt num. 4. in tertio caſu & inuenietur pro poſterioribus terminis valor [illegible]. cui adde $\frac{3}{4}$ (quia ſumpta eſt noua radix 1 N + $\frac{3}{4}$) extabitque valor alius pro data æqualitate [illegible].

8 Habes ergo ſecundos valores deriuatiuos ex primis, atque ex tuis ſecundis potes tertios eruere eodem prorſus artificio, vt ſi libeat per radicem $\frac{35}{4}$ elicere tertiam, connectes illam cum 1 N. vt ſit noua radix 1 N + $\frac{35}{4}$ iuxta quam reſoluti dati termini 4 N + 1. & 1 Q. − 2 N + 1. eo modo quo reſolui debere iam diximus, dabunt nouos terminos 4 N + 36 & 1 Q + $\frac{961}{16}$ + $\frac{31N}{2}$. in quibus vnitatum numerus eſt quadratus ergo valor radicis pro nouis illis terminis erit [illegible]. cui ſi addas $\frac{35}{4}$. juxta poſitionem præcedentem habebis pro valore in datis terminis + [illegible]. & iuxta illum reſoluti dati termini exhibebunt quadratos.

9 Hinc vides poſſe inueniri valores infinitos: etenim ex primis orientur ſecundi & ex ſecundis tertij, & ſic in infinitum, in exemplo dato iam habes quinque valores, ex poſtremis iterum poſſunt erui noui; ergo quælibet data æqualitas duplicata habet ſolutiones infinitas, quod erat demonſtrandum.

Non deſpondendus animus ſi occurrant pro ſolutione numeri ficti & minores nihilo.

10 Vſuuenit interdum vt in problematum enodatione reperiantur numeri ficti, vnde fit vt inexperti ſtatim cadant animis, vt pote qui in caſum vt ipſi exiſtimant impoſſibilem inciderint, verum audacter affirmamus cum noſtro Fermatio etiam inde elici poſſe ſolutionem.

11 Sit verbi gratia æqualitas duplicata data 1 − 2 N & 1 − 4 N + 2 Q & inuentus ſit per methodum vulgarem valor radicis − 4 iuxta quam reſoluti duo termini dant veros quadratos 9 & 49 illa radix eſt numerus fictus, fateor, hæc tamen ſic inſeruiet ad veros numeros inueniendos; pone pro noua radice 1 N − 4 & juxta illam reſolue duos terminos priores, fientque noui termini 9 − 2 N. & 2 Q − 20 N. + 49 (quia 2 N. æquiualebunt 2 N 8. quæ ſi ſubtrahas ab vnitate vt poſtulat ſignum defectus habebis 9 − 2 N. pro priori termino nouo non aliter 2 Q dabunt 2 Q + 32 − 16 N. & 4 N dabunt 4 N − 16 quos ſi tollas ab 2 Q + 32 − 16 N iunctis cum vnitate vt primitiuus numerus indicat fiet 2 Q − 20 N. 449.) quare cum in iſtis terminis vnitatum numerus ſit quadratus, inuenietur valor per methodum Diophantæam, ex hoc valore inuento tolle 4 quia radix

eſt 1 N − 4 fietque valor pro æqualitate data [illegible]. igitur per numerum fictum inuentus eſt verus numerus qui ſatisfacit quæſtioni vt ipſe per examen probare poteris.

Rurſus ſi detur iſta duplicata æqualitas 8 Q. + 4 + 16 N & 2 Q + 4 + 4 N. facile 12
inuenientur radices − 2 & − $\frac{24}{7}$ ſed quia numeri iſti ficti ſunt, cape pro noua radice 1 N − 2 iuxta quam reſoluti duo priores termini dant nouos terminos quadrato æquandos 8 Q + 4 − 16. N & 2 Q + 4 − 4 N. igitur per methodum Bacheti pro iſtis nouis terminis inuenietur valor radicis + $\frac{24}{7}$. vnde ſi tollas 2. quia noua radix fuit 1 N − 2 extabit noua radix pro data æqualitate duplicata + $\frac{10}{7}$ ergo ex numero ficto inuentus eſt verus ſatisfaciens duplicatæ æqualitati. Idem fieri poteſt de alio numero ficto; imo & & ex illis inueniri poſſunt alij ſine numero.

Tertium exemplum ſit in iſtis terminis quadrato æquandis 1 + 2 N + 2 Q & 1 + 6 13
N + 2 Q per methodum communem reperitur valor − 4 igitur redintegranda eſt operatio, & ponendum pro noua radice 1 N − 4 & ſecundum illam reſoluendi priores termini, vt iam dictum eſt, fientque termini noui 2 Q + 25 − 14 N. & 2 Q + 9 − 10 N. ergo quoniam vnitatum numerus vtrobique quadratus eſt inuenietur ex methodo Diophantæâ valor radicis pro poſterioribus terminis, hinc tolle 4. iuxta nouam radicem & relinquetur pro æqualitate datâ valor verus & realis [illegible], non ergo cadendum animo ſi occurrant aliquando numeri ficti quia reduci poſſunt ad veros vt demonſtratum eſt in exemplis prioribus.

In hoc genere ſoluẽdi duplicatas æqualitates, debet differentia terminorum æquandorum conſtare quadratis & radicibus ſolis.

Sæpius contingit in ſolutione æqualitatum, vt differentia terminorum conſtet radicibus ſolis, vt ſi oporteat æquare quadrato 1 Q. + 1 − 1 N & 1 Q + 1 − 3 N tollendo 14
ſecundum à primo differentia eſt 2 N. aliquando etiam differentia terminorum conſtat radicibus & vnitatibus, vt ſi termini ſequentes æquentur quadrato 9 Q + 15 − 21 N. & 9 Q + 24. − 48 N. ſupponendo enim primum maiorem vel minorem (quod plerumque liberum eſt) erit differentia 27 N − 9 vel 9 − 27 N. verum in Fermatianâ methodo hoc curandum vt differentia terminorum conſtet radicibus & quadratis alioquin vel in impoſſibile caderes, vel labor tuus nullam nouam produceret ſolutionem, vt autem differentia conſtet quadratis & radicibus, debent vnitates quadratæ diuerſæ reduci ad eumdem quadratum vt ſupra docuimus num. 4.

Sit exempli gratia æqualitas duplicata ſequens 1 Q + 1 N + 2 & 1 Q + 3 N + 3 15
valor radicis per methodum communem eſt 2, ergo iuxta methodum Fermatianam ſumi debet pro noua radice 1 N − 2. & iuxta illam oportet reſoluere priores terminos, fientque noui termini æquandi quadrato 1 Q − 3 N. + 4. & 1 Q − 1 N + 1 ſi horum caperes differentiam haberes 2 N − 3 vel 3 − 2 N. prout primus terminus ſupponeretur maior aut minor, cape quoſuis numeros qui has differentias producant, nihil proficies, nec vnquam ad optatum peruenies finem, niſi reducas illos terminos ad eumdem quadratum quod fit diuidendo maiorem quadratum per minorem & per quotientem multiplicando terminum illum qui minorem quadratum continet, in eo igitur exemplo diuide 4. per 1. & quotiens 4. multiplicet terminum 1 Q − 1 N + 1. ita enim habebuntur duo termini noui ad noſtram methodum apti 4 Q − 4 N + 4. & 1 Q − 3 N + 4.

Rurſus ſint duo termini æquandi quadrato 1 Q + 16 − 8 N. & 3 Q + 64 + 48 N. 16
per methodum vulgarem valor eſt 16. ergo pro nouâ radice ſumi debet 1 N. + 16 iuxta quam ſi reſoluantur priores termini fient termini noui quadrato æquandi 1 Q. + 24 N.

+ 256. & 3 Q. + 144 N + 1600. caue capias horum differentiam 2 Q + 120 N + 1344. impossibile enim foret hoc pacto ad solutionem peruenire, quid igitur facies ? Illud quod hactenus factitatum est sæpius : diuides 1600. per 256 & per quotientem $\frac{25}{4}$ multiplicabis 1 Q + 24 N + 256 & productus inde natus $\frac{25Q}{4}$ + 150 N. + 1600 cum 3 Q + 144 N + 1600. repræsentabit duos terminos æquandos quadrato, eorumque terminorum differentia constabit quadratis & radicibus : ergo ad nouam solutionem peruenire fas erit.

Hoc genus operandi non tantum valet ad solutiones duplicatarum æqualitatum, sed etiam ad alias quascunque.

17 Ferax est admodum ager iste quem colere cœpimus, etenim methodus Fermatiana, non tantum valet ad soluendas æqualitates duplicatas in infinitum, sed etiam ad alias ; sit verbi gratia inueniendus numerus cuius duodecuplum sublatum ab octuplo eius quadrato iuncto cum 8. faciat cubum. ponatur numerus ille 1 N. ergo 8 Q + 8 − 12 N. æquatur cubo, finge latus 2 − 1 N. cubus erit 8 − 12 N + 6 Q. − 1 C. æquandus 8 Q + 8 − 12 N. & fit pro valore radicis − 2 quæ radix licet ficta satisfacit propositæ quæstioni. Verum vt inde habeatur numerus verus, pone pro nouâ radice 1 N − 2 & iuxta eam resolue prædictum numerum 8 Q + 8 − 12 N. fietque nouus terminus 8 Q − 44 N + 64. æquandus cubo, finge latus huius cubi 4 $\frac{11N}{12}$ (4 est latus cubi 64. in nouo termino existentis, $\frac{11N}{12}$ vero est quotiens qui fit diuidendo 44 N. in nouo termino existentem per triplum quadratum lateris cubici 4. nempe 48) eius cubus 64 − 44 N. + $\frac{121Q}{12}$ − $\frac{1331C}{1728}$ æquatus nouo termino 8 Q − 44 N + 64 dat pro radice 2 $\frac{938}{1331}$. vnde si tollas 2. ob nouam radicem positam 1 N − 2 restabit valor pro priori positione $\frac{938}{1331}$ talis est numerus quæsitus, eius enim duodecuplum si tollas ab octuplo eius quadrato iuncto cum 8. dat $\frac{6229504}{1771561}$ cubum à latere $\frac{184}{121}$.

18 Rursus, si quæras triangulum rectangulum, cuius area iuncta hypotenusæ faciat quadratum, formabis illud a b 1 N + & 1 N. latera sunt 2 Q + 2 N. 1 + 2 N. 2 Q. + 2. N. junge aream 2 C + 3 Q + 1 N. hypotenusæ 2 Q + 1 + 2 N & fit 1 + 3 N + 5 Q. + 2 C æquandus quadrato; finge latus 1 + $\frac{3N}{2}$ & habebis $\frac{11}{8}$ pro valore, pone igitur nouam radicem in N. − $\frac{11}{8}$ & juxta illam resolue singulas particulas numeri superioris & summam inde ortam æqua quadrato fietque numerus $\frac{3673}{9848}$ pro valore radicis ad primas positiones.

19 Simili ratione si sit inueniendum triangulum rectangulum, cuius area juncta vni lateri circa rectum faciat quadratum, formabis illud vt mox dictum est in numero præcedenti & area 2 C + 3 Q + 1 N. jungetur lateri 1 + 2 N. & fiet valor − $\frac{1}{8}$ cape igitur pro noua radice 1 N. − $\frac{1}{8}$ & iuxta illam resolue singulas particulas numeri quadrato æquati & fiet noua summa 2 C + $\frac{19}{4}$ + $\frac{51N}{32}$ + $\frac{49}{256}$ æquanda quadrato : finge latus $\frac{7}{16}$ + $\frac{51N}{14}$ & fiet valor pro numeris primo positis $\frac{3483}{1568}$ ac proinde triangulum quæsitum erit $\frac{10988674}{3458624}$ $\frac{6927424}{3458624}$ $\frac{8812050}{34586240}$.

Noua methodus ad solutionem duplicatarum æqualitatum.

20 Sit data æqualitas duplicata 25 Q + 4 N − 6 & 9 Q + 20 N. − 6 seu oporteat

æquare quadrato vtrumque numerum propoſitum: methodus communis eſt reuocare numeros quadratorum diuerſos ad eundem vt dictum eſt num. 4. verum hoc non eſt neceſſe, ſed poteſt ſumi immediatè differentia numerorum quæ eſt 16 Q — 16 N. tum inueniendi ſunt tales producentes, vt ſumma radicum faciat 10. N (ſeu duplum radicis 254) tales ſunt 8 N. & 2 N — 2 horum enim producentium ſummæ ſemiſſis quadratum æquatum priori termino 25 Q + 4 N — 6. quem ſuppoſuimus maiorem dabit valorem $\frac{2}{3}$.

Rurſum ſi darentur duo ſequentes termini $\frac{1369}{9}$ + 121 — $\frac{1210N}{9}$ & 1 Q + 121 — 26 N. æquandi quadratis, cum numerus vnitatum vtrobique ſit idem quadratus ex methodo vulgari capienda eſſet differentia $\frac{1360}{9}$ — $\frac{976N}{9}$ tum ſumendi forent producentes $\frac{488N}{99}$ & $\frac{124N}{81}$ — 22 & inde inueniendus valor radicis. Fermatius ſumit producentes $\frac{2N}{3}$ & $\frac{14N}{3}$ — $\frac{22}{3}$ ergo ſumma producentium $\frac{22N}{3}$ — $\frac{22}{3}$ huius ſummæ ſemiſſis quadratus æquatus $\frac{121}{9}$ + 121 — $\frac{1210N}{9}$ dat valorem radicis $\frac{612}{15}$. 21

Iterum ſit ſoluenda æqualitas duplicata 169 Q + 5746 N. + 169. & 1 Q + 10 N. + 169. tripliciter iſta æqualitas ſolui poteſt: primo accipiendo differentiam terminorum illorum quæ eſt 168 Q + 5736 N & eligendo duos producentes in quorum vno ſit 26, duplum videlicet lateris quadrati 169. atque hæc eſt methodus communis: ſecundo ſolui poteſt reuocando diuerſos quadratorum numeros ad eundem, quod fieret ducendo ſingulas particulas numeri poſterioris in 169. vt explicatum eſt num. 4. tertio ſoluetur eadem æqualitas eligendo producentes 14 N & 12 N + $\frac{2868}{7}$ ita enim ſumma radicum erit 26 N. duplum lateris quadrati 169 Q. atque hæc eſt methodus Fermatiana quæ dat pro valore radicis $\frac{224825}{10366}$. 22

Dicet aliquis iſtam methodum eſſe quidem ingenioſam, ſed inutilem, vt pote quæ prodeat tantum ex numeris arte conquiſitis, & tali ratione diſpoſitis vt & illi producant differentiam terminorum quadrato æquandorum, & in ſummâ reperiatur duplum lateris majoris quadrati. At quiſquis hoc opponit ignorat eâ ratione ſolui pulcherrimum & difficillimū problema quod alias torſit omnes Algebriſtas, & quod inſolutum manſiſſet, ni Fermatius hac methodo fultus ſoluiſſet nodum Gordianum. Denique qui inutilitatem huius methodi accuſat videat ſolutionem multorum problematum infra num. 45. 47. 48. 50. Quomodo autem inueniantur iſti producentes facile eſt judicare nam ſumendum duplum lateris quadrati majoris & illud diuidendum in duas partes quæ producant differentiam quadratorum, vt in primo exemplo ſumitur 10. diuidendus in duos qui faciant 16. & inuenientur producentes 8 & 2. ita de cæteris. 23

Poſt inuentos per analyſin primitiuos numeros iterata operatio exhibet ſolutionem.

Contingit non raro, vt in enodatione alicuius problematis incidatur in numeros fictos: iam ſupra oſtenſum eſt quomodo huic malo medeatur ars analytica Fermatij, ſed accipe inſuper radicem ſingularem ex qua fructus innumeri prodibunt: radix illa eſt iterata operatio, ſed ne incaſſum redintegres operationem analyſis exhibebit numeros primitiuos in ſecundâ operatione ponendos. 24

Quæratur verbi gratia triangulum rectangulum cuius tam hypotenuſa quam ſumma laterum circa rectum ſit numerus quadratus, formetur triangulum ab obuiis Numeris 1 N + 1 & 1 N. ergo tria latera erunt 2 Q + 1 + 2 N. 1 + 2 N. 2 N + 2 Q. igitur hypotenuſa 2 Q. + 1 + 2 N. & ſumma laterum circa rectum 2 Q. + 1 + 4 N. æquantur quadrato & fit per methodum cōmunem valor radicis $\frac{12}{7}$ vnde duo numeri à quibus formatum eſt triangulum erunt — $\frac{5}{7}$ & — $\frac{12}{7}$ ſeu in integris accipiendo ſolos numeratores — 5 — 12 triangulum autem inde formatum eſt 169. 119. 120. vnde infero ad ſolu- 25

tionem problematis inueniendum esse aliquod triangulum rectangulum cuius hypotenusa sit quadratus & differentia laterum circa rectum sit quadratus atque hæc conclusio elicitur vi analyseos præcedentis, istud autem triangulum est 169. 119 120. quod formatur vel ab − 5 & − 12. vel a + 5 & + 12. quare itero operationem & formo triangulum quæsitum ab 1 N + 5. & 12. & peruenio tandem ad æqualitatem duplicatam quæ non dabit amplius numeros fictos, sed veros beneficio trianguli illius primitiui vt distinctius videbitur infrà num. 45.

26 Rursus si proponatur quærendum triangulum rectangulum quo productus sub hypotenusa in summam vnius laterum circa rectum & dimidij alterius multatus areâ, faciat quadratum formabitur triangulum ab obuiis Numeris 1 & 1 N + 1. ergo latera erunt 1 Q + 2 N + 2. 1 Q + 2 N. 2 N + 2. duo itaque 1 Q + 2 N + 2 in 1 Q + 3 N 1 & productus 1 QQ + 5 C + 9 Q. + 8 N. + 2. multatus area 1 C. + 3 Q + 2 N dat residuum 1 QQ + 4 C + 6 Q + 6 N + 2 æquandum quadrato. Finge latus 1 Q + 2 N + 1. eius quadratum est 1 QQ + 4 C + 6 Q + 4 N + 1 æquandum numero superiori & fit valor $\frac{1}{2}$ proindeque si hîc sisteremus secundum latus quod fuit 1 Q + 2 N foret minus nihilo & ad solutionem postulatam ineptum, quare iteranda est operatio & formandum triangulum ab 1 N + 1 & 2. ita enim latera erunt 1 Q + 2 N + 5. 1 Q + 2 N − 3. 4 N + 4. productus ex hypotenusa in summam vnius laterum circa rectum & dimidij alterius mulctatus areâ erit 1 QQ + 4 C + 6 Q + 20 N. + 1 æquandus quadrato, finge latus 1 + 10 N − 1 Q & fit pro valore verus numerus $\frac{23}{6}$ ergo iuxta positiones formandum erit triangulum a $\frac{29}{6}$ & 2 siue in integris accipiendo solos numeratores à 29 & 12 & fient latera quæsiti trianguli 985. 697. 696. Idem omnino contingeret si poneres pro noua radice 1 N. − $\frac{1}{2}$ & iuxta illam resolueres 1 QQ + 4 C + 6 N + 2 inde enim orietur nouus terminus æquandus quadrato 1 QQ + 2 C + $\frac{3Q}{2}$ + $\frac{33N}{2}$ + $\frac{1}{16}$ finge latus $\frac{1}{4}$ + 5 N. − 1 Q & fit valor $\frac{23}{12}$. hinc tolle $\frac{1}{2}$ ob nouam radicem & fit $\frac{17}{12}$ pro primis positionibus, quare juxta positiones formabitur triangulum in integris ab 29. & 12 vt supra.

27 Iterum quæratur triangulum rectangulum ita vt hypotenusa sit quadratus sicut & differentia laterum ponatur 1 N + 1 & 1 pro duobus numeris à quibus formetur triangulum, ergo latera erunt 1 Q + 2 + 2 N. 1 Q. + 2 N. 2 N + 2. tolle postremum 2 N + 2. à medio 1 Q + 2 N. igitur differentia 1 Q − 2 & hypotenusa 1 Q + 2 + N. æquantur quadrato & fit per duplicatam æqualitatem $\frac{17}{12}$ pro valore radicis, ergo iuxta positiones numeri formantes triangulum erunt − $\frac{5}{12}$ & 1 seu in integris abiecto denominatore, − 5 & 12. posses iterare operationem, & inuenire triangulum quæsitum, sed aduerte vltro illud offerri ex formatione 5 & 12. fit enim triangulum rectangulum 169. 119. 120. vbi hypotenusa & differentia laterum est quadratus numerus.

Bachetus impossibilitatem agnoscit vbi Fermatius facilitatem inuenit.

28 Fatendum est ingenuè plurimas quæstiones per methodos ordinarias solui infinities vt cum vterque numerus quadrato æquandus constat radicibus diuersis & eodem quadrato, facilè enim est eo in casu reperire quotlibet solutiones, propterea Bachetus ad quæstion. 24 lib. 6. cum in secundo modo soluendi duplicatas æqualitates dixisset vnicam solutionem afferri, in quarto modo solutiones adhibet infinitas. Verum aliæ sunt æqualitates duplicatæ delicatiores in quibus per methodos communes vnica solutio, vel ad summum duplex inuenitur, vnde ille idem illustris Diophanti commentator loco citato ait vnicam solutionem afferri posse, dum numerorum ex tribus speciebus compositorum differentia constat vnicâ specie, vel enim in vno numerorum

quadrato

quadrato æquandorum sunt tres species ex vna parte & duæ tantum ex alia, estque vnicus vtrinque quadratus, vel dum sunt tantum duæ species in terminis æquandis, & vnus constat quadratis & vnitatibus, alter autem vnitatibus & radicibus, addit autem contingere duas solutiones cum tam quadratorum quam vnitatum numerus est quadratus; ego vero, pace tanti viri dixerim, aio ex methodo Fermatianâ etiam in his omnibus casibus contingere solutiones infinitas vt exemplis sequentibus planum erit.

Primum exemplum sit in duplicatâ æqualitate 1 Q + 3 N + 7. & 1 Q − 5 N + 7. differentia eorum terminorum constat vnicâ specie estque 8 N & sit valor 3. frustra Bachetus per suam methodum alium quæreret, sed ponatur pro nouâ radice 1 N + 3. ergo noui termini erunt 1 Q + 25 + 9 N. & 1 Q + 1 + 1 N. igitur quoniam numerus vnitatum quadratus est vtrobique poterit solui ista æquatio nec te terreant numeri ficti qui occurrent iam enim supra dedimus modum ex illis eliciendi veros. 29

Secundum erit in 4 Q − 1 N − 4 & 4 Q + 15 N. vbi sunt tantum duæ species ex vna parte, & quam Bachetus soluit inueniendo vnicum valorem $\frac{5}{4}$. pone pro nouâ radice 1 N + $\frac{5}{4}$. ergo iuxta illam resoluti priores termini dabunt nouos æquandos quadrato 4 Q + 1 + 9 N. & 4 Q + 25 N. ac proinde cum habeatur numerus vnitatum quadratus inueniri potest valor radicis eritque [illegible]. 30

Tertium exemplum sit in duobus terminis 1 Q + 9 & 9 + 24 N æquandus quadrato, duos inuenies valores ad solutionem istius æqualitatis, nempe 3 & $\frac{816}{225}$ inde inuenies infinitos, ponendo pro noua radice 1 N + 3 vel 1 N + $\frac{816}{225}$ verum hoc indicasse satis esto. 31

Deinde Bachetus ait reperiri duas solutiones in iis duplicatis æqualitatibus quarum termini habent tam numerum quadratum quam vnitatum quadratum vt si dentur æquandi quadrato 1 Q + 12 N + 1 & 1 Q + 1 nam per methodos vulgares reperientur valores $\frac{4}{3}$ vel $\frac{3}{4}$ at si quis petat alios, hæret Bachetus, noster tamen Fermatius inde se alacriter expedit & subministat infinitos. Adde quod ne in hoc quidem casu semper dabit duos valores Bachetus vt si dentur duo termini æquandi quadrato 1 Q + 3 N + 1 & 1 Q − 1 N + 1 vnicum enim eius methodus valorem exhibet, imo continget sæpè vt ne vnum quidem sit exhibiturus vt si dentur æquandi quadrato 1 Q − 6 N + $\frac{1}{4}$ & 1 Q − 2 N + $\frac{1}{4}$ hoc autem continget quia valor exhibetur cum defectu; jam autem supra diximus per methodum Fermatianam innumeros valores exhiberi etiam dum numeri ficti occurrunt. 32

Præterea cum Diophantus l. 4. q. 29. eo deuenisset vt 9 QQ − 4 C + 69 − 12 N. + 1 æquandus foret quadrato, Bachetus ait quatuor tantum modis id fieri posse, sublatis enim quadrato quadratis & vnitatibus vel tollet radices, vt maneat æquatio inter cubos & quadratos; vel tollit cubos vt maneat æquatio inter radices & quadrata, vnde inuenit tantum duos valores $\frac{8}{7}$ & $\frac{15}{13}$. Fermatius vero reperit infinitos, primo enim expungit etiam quadrata, vt remaneat æqualitas inter cubos & quadratoquadrata vel inter radices & vnitates. Secundo asserit Bachetus si fingatur latus istius quadrati 3 Q + 6 N − 1. fore vt incidatur in incommodum & 24 Q + 40 C æquentur nihilo, Verum hoc incommodum non pertimescit Fermatius. Tertio ex quolibet valore inuento, alios reperit in infinitum vt iam explicatum est. 33

Deinde Bachetus lib. 4. q. 28. ait esse impossibile æquari cubo 8 C + 8 N − 1 Q − 1 & affert rationem quia non potest fingi cubus iste nisi à latere 2 N − 1 vel tollantur cubi & vnitates: verum, pace tanti viri dixerim, falsum hoc est, primo enim potest fingi latus istius cubi $\frac{8N}{3}$ − 1 ex fit valor [illegible] deinde fingendo latus 2 N − 1 fiet radix − [illegible] & resoluendo numerum superiorem iuxta hanc nouam radicem. Hæc fusius explicabuntur infrà in tertiâ parte. 34

Vietam Fermatius antecellit.

35 Non ſatis caute negauit Vieta numerum compoſitum ex duobus cubis poſſe diuidi in alios duos cubos: Fermatius enim docet id poſſe fieri ex iis quæ habet Bachetus ad l. 4. Q. 2. Diophanti (quod tamen ipſe Bachetus non aduertit) ſit igitur 9. compoſitus ex duobus cubis 1 & 8 diuidendus in alios duos cubos, quærantur primum duo cubi quorum differentia ſit 9. beneficio huius canonis: vtrumque datorum cuborum 1 & 8 ducito ter in latus alterius, productos diuide per interuallum cuborum & minori quotienti adde maius latus, à maiore autem quotiente aufer minus latus, ſumma & reſiduum exhibebunt quæſitorum latera cuborum: proinde latera illa ſunt $\frac{20}{7}$ $\frac{17}{7}$ cubi vero $\frac{4913}{343}$ $\frac{8000}{343}$. Secundo datis duobus cubis inueniuntur alij duo quorum differentia æquet differentiam datorum; hoc autem commode fiet per canonem ſequentem, productum ex vtroque cubo ter in latus alterius diuide per ſummam cuborum, à majore quotiente aufer minus latus à minore quotiente aufer minus latus, relinquentur latera quæſitorum cuborum. At duorum cuborum mox inuentorum differentia eſt 9. ergo latera nouorum cuborum quorum differentia eſt 9. erunt 188479 & 36520 (ſuppoſito vtrique denominatore cõmuni 90391) cubi autem erunt 6695590842626239 & 48707103808000 (modo tamen vtrique ſupponatur communis denominator 738542637646471) horum igitur cuborum differentia eſt 9 ſicut & priorum. Tertio extat alius canon quo inueniuntur duo cubi quorum ſumma æqualis eſt differentiæ duorum cuborum datorum, & eſt eiuſmodi: vtrumque datorum cuborum duc ter in latus alterius, productos diuide per ſummam datorum cuborum, à maiore quotiente aufer minus latus, & minorem quotientem aufer à majore latere, relinquentur cuborum quæſitorum latera. Ergo cum duorum cuborum poſteriorum differentia ſit 9. ſi per hunc canonem inueniantur duo cubi quorum ſumma ſit æqualis illi differentiæ habebuntur latera quæſitorum cuborum $\frac{1243617733990094836481}{609623835676137297449}$ $\frac{487267171714352336560}{609623835676137297449}$.

36 Vieta ſoluit acutiſſime problema Adriani Romani quod fuerat propoſitum omnibus totius orbis mathematicis in vno caſu, dum videlicet numerus cum quo debet fieri æquatio minor eſt binario, idque per ſectiones angulares, vbi ingenij ſui vim mirificè oſtendit & maximam inde exiſtimationem vbique terrarum ſibi comparauit. Verum Fermatius noſter, etiam dum numerus binario maior eſt, quo in caſu nullum eſt ab ſectionibus angularibus præſidium, ſoluit quæſtionem; ſit enim 45.(1) − 3795(1) + 95634 (1) &c. nihil omnino immutando in terminis Adriani numerus æqualis cuiuis numero dato (eo enim recidit problema Adriani vt Vieta ipſe vel agnouit vel emendauit) ſit autem datus numerus ℞ 8 + 6, qui eſt binario maior, aſſerit Fermatius valorem radicis primigeniæ facillime deſignari per radices vniuerſales eritque in eo caſu ℞ poteſtatis 45 (3 + ℞ 2 + ℞ bin. 10. + ℞ 72) + ℞ poteſtatis 45 (3 + ℞ 2 − ℞ bin. 10 + ℞ 72) Rurſus ſi detur numerus 4 aſſerit Fermatius valorem radicis fore ℞ poteſtatis 45 bin. 2 + ℞ 3 + ℞ poteſtatis 45. reſidui 2 − ℞ 3. & ſic infinitum valores nouos dabit etiam ſupra binarium, cum Vieta ne vnum quidem etiam ſectionum angularium ope ſuffultus exhibere poſſit.

37 Vieta l. 5. zetet. 9. infeliciter ſoluit quæſtionem tertiam libri ſexti Diophanti; cum enim iſte proponat inuenire triangulum rectangulum cuius area aſſumens datum numerum faciat quadratum, coarctauit Vieta quæſtionem ad datum numerum ex duobus quadratis compoſitum, at Fermatius innumeris modis ſoluit problema de dato quocumque numero ſi enim dentur 3 numeri ſequentes exhibet triangulum quæſitum $\frac{2442969}{456460}$ $\frac{1597835}{456460}$ $\frac{24}{400}$.

Diophantum in plurimis Fermatius fuperat.

Diophantus l. 5. q. 8. tradit artem inueniendi tria triangula rectangula quæ fint æqualia quoad aream ; qui vero plura ab ipfo expetet numquam obtinebit, præterea numquam tradidit Diophantus methodum inueniendi triangulum dato triangulo æquale quoad aream. Fermatius vtrumque mox atque eadem operatione præftabit, fit verbi gratiá inueniendum triangulum rectangulum cuius area fit 6. qualis eft area trianguli rectanguli 3. 4. 5. efto vnum latus cuiufpiam trianguli rectanguli 3 & aliud latus fit 1 N + 4 horum quadrata fimul fumpta exhibent 25 + 1 Q + 8 N. pro quadrato hypotenufæ : quare ifte numerus æquatur quadrato, deinde area iftius trianguli $\frac{3}{2}$ N + 6. debet effe fextupla alicuius quadrati (quia poftulatur aream effe 6, ergo eius areæ fextans quadratus eft ac proinde ille ductus in 36. efficiet quadratum, efficit autem 9 N + 36. igitur hic numerus æquandus eft quadrato. En igitur duos terminos duplicatæ æqualitatis 9 N + 36. & 25 + 1 Q + 8 N. in his autem vnitatum numerus quadratus eft , ergo valor radicis facile reperietur eritque $-\frac{6053060}{2065040}$; ac proinde 1 N + 4 erit $\frac{2896804}{3405601}$. aliud autem latus circa rectum eft 3 igitur horum quadrata fimul fumpta faciunt quadratum cuius latus $\frac{3726485}{3405601}$ erit hypotenufa ergo habes triangulum rectangulum $\frac{3726485}{3405601}$ $\frac{2896804}{3405601}$. 3. cuius area eft fextupla cuiufpiam quadrati nempe $\frac{724201}{2455600}$. huius vero quadrati latus eft $\frac{851}{1551}$. per quod fi diuidas fingula latera trianguli mox reperti, habebis triangulum quæfitum $\frac{12061328255}{20471685451}$. $\frac{4093941004}{2047166451}$. $\frac{4651}{851}$. cuius area eft 9. aduerte nos inueniffe hoc triangulũ per illud quod datum fuit 3. 4. 5. ac per inuentum inueniri poffe tertium, per tertium, inuenietur quartum & fic in infinitum. Ecce tibi quatuor triangula rectangula quorum area eft 840 primum 58. 40. 42. fecundum 74. 24. 70. tertium 113. 15. 112. quartum $\frac{1140160956}{170324}$ $\frac{168196}{170324}$ $\frac{23606050}{170324}$.

Diophantus l. 6. q. 6. incidit in illam duplicatam æqualitatem 1 + 1 Q & 1 + 14 N. poteft illa refolui duobus modis, fupponendo primum ex illis maiorem vel minorem altero, prout libuerit : & funt duæ radices $\frac{24}{7}$ & $\frac{171}{336}$. fcifcitare ab illo tertiam, non dabit. Fermatius poteft dare infinitas, pro exemplo fumatur noua radix 1 N + $\frac{24}{7}$ & juxta illum refoluantur 1 + 1 Q & 1 + 14. N. fientque noui termini 1 Q + $\frac{625}{49}$ $\frac{48N}{7}$ & 49 + 14 N. ergo cum vnitatum numeri fint quadrati in vtroque termino, refolui poteft per methodum, eritque radix pro duobus terminis pofterioribus $\frac{11652510883350}{358212602160}$ cui necte $\frac{24}{7}$ & fiet valor radicis pro datâ æqualitate + $\frac{10192660706}{15073516290001}$.

Diophantus l. 6. poft quæft. 15. & 17. omifit tertium cafum quo quæri poteft triangulum rectangulum vt tam hypotenufa quam alterum laterum circa rectum, detractâ areâ faciat quadratum : omifit inquam illud problema raræ fubtilitatis non alia de caufa nifi quia incidit in numeros fictos quorum enodationem ignorauit. Fermatius illud acutiffime foluit ; primo enim per analyfin deprehendit inueniendum effe triangulum rectangulum in quo productus fub hypotenufa in fummam vnius laterum circa rectum & dimidij alterius multatus area, fit quadratus, deinde triangulum iftiufmodi inuenit eiufque ratiocinium & praxim dedimus fupra num. 26. vbi diximus triangulum 985. 697. 696. fatisfacere huic lemmati. Tertio latera huius trianguli nectit characteri radicum vt fit triangulum quæfitum 985 N. 697 N. 696 N. cuius area 2425564. tollatur ab hypotenufa 985 N & 697 N. ita duo refidua 985 N − 2425569 & 697 N & 2925564 erunt æquanda quadrato, æquetur illud poftremum quadrato ab 697 N. orto fitque 485809 æquale 697 N − 2425569. & fiet valor radicis $\frac{1}{1045}$ ideoque triangulum ab initio quæfitum erit $\frac{985}{1045}$ $\frac{697}{1045}$ $\frac{696}{1045}$. En quo Diophantus nufquam attingere potuit, multa alia dabimus eiufmodi in fequentibus quæ Diophantus omifit, vt pote fibi ignota.

Quæstiones duodecim circa hactenus dicta.

41 Quot exempla dedimus tot sunt problemata difficillima, quibus enodandis impares erunt algebristæ vulgares. Primum enim exemplum in quo proposita est duplicata æqualitas 4 N + 1 & 1 Q − 2 N + 1 ita enunciari potest. Inuenire numerum octonario majorem cuius quadruplum additum vnitati faciat quadratum & cuius duplum subtractum ab eius quadrato cum vnitate iuncto faciat rursus quadratum, numerus quæsitus est $\frac{11}{4}$. Secundum exemplum sic proponetur. Inuenire numerum cuius duplum detractum vnitati quadratum exhibet & cuius quadruplum subtractum ab vnitate iunctâ cum duplo eius quadrato faciat quadratum. Hinc existit duplicata æqualitas inter 1 − 2 N & 1 − 4 N + 2 Q vbi valor radicis est [illegible]. Tertium exemplum in quo 8 Q + 4 + 16 N & 2 Q + 4 + 4 N æquantur quadrato, sic proponi potest in problema. Inuenire numerum cuius sedecuplum cum octuplo quadrato additum 4. facit quadratum & cuius quadruplum cum quaternario & duplo ipsius quadrato, facit quadratum, hic valor est $\frac{10}{7}$. Omitto reliqua exempla vt proponam illustriores quasdam quæstiones.

Inuenire infinities duos numeros quorum productus sublatus ab alterutro eorum, aut ab illorũ summâ aut à differentiâ relinquat quadratum.

42 Sint duo illi 1 N. & 1 − 1 N sic enim satisfiet duobus postulatis prioribus, restat ergo vt duobus posterioribus satisfiat, suppono 1 N esse minorem, ergo productus 1 N − 1 Q. subtractus à differentia 1 − 2 N dat pro residuo 1 Q + 1 − 3 N. subtractus autem à summa 1. relinquit 1 Q + 1 − 1 N. illa ergo duo residua æquantur quadratis & fit per methodum vulgarem $\frac{3}{8}$ pro valore radicis ac proinde duo numeri quæsiti sunt $\frac{3}{8}$. $\frac{5}{8}$. Supponatur nunc pro nouâ radice 1 N. + $\frac{3}{8}$ & iuxta illam resoluantur duo residua supradicta, fientque de nouo, duo termini 1 Q + $\frac{49}{64}$ $\frac{1N}{4}$ & 1 Q + $\frac{1}{64}$ − $\frac{9N}{4}$ æquandi quadratis, igitur quoniam in vtroque termino vnitatum numerus est quadratus, inuenietur valor pro his terminis [illegible] huic adde $\frac{3}{8}$ & fiet valor pro prioribus terminis, igitur duo numeri quæsiti erunt [illegible] & [illegible].

. Potes ex isto posteriori valore elicere alium tertium, & ex tertio quartum, & sic in infinitum. En tibi alios duos numeros satisfacientes quæstioni 10416 & 41449 modò supposueris denominatorem 51865.

Inuenire infinities tres numeros quorum solidum subtractum à singulis, & à qualibet illorum differentia & à producto medij in extremos, & à quadrato medij, relinquat quadratum.

43 Ponantur tres quæsiti 1 N. 1. 1. − 1 N horum solidum 1 N − Q. detractum primo & tertio, itemque differentiæ primi & secundi, ac differentiæ secundi & tertij relinquit quadratum, superest ergo vt satisfiat reliquis postulatis seu vt 1 Q + 1 − 1 N & 1

Q + 1 − 3 N. æquentur quadratis, ſunt autem iidem plane numeri cum iiſdem ſignis quæ in priori quæſtione; igitur valor eſt [illegible] & fient tres quæſiti 3. 8. 5. modo illis ſupponatur denominator communis 8. Item tres ſequentes 10416. 51865. 41449 (modo ſupponatur illis denominator 51865) ſatisfaciunt quæſtioni ſimili ratione tres ſubſequentes 249875197. 784992912. 535117715. ſuppoſito denominatore communi 784992912. ſoluunt quæſtionem.

Poteſt idem problema aliter proponi hoc modo. Diuidere infinities binarium in tres partes, ita vt ſolidum ſub illis detractum ſingulis, & cuilibet eorum differentiæ & cuilibet producto medij in extremos, & quadrato medij, ſemper relinquat quadratum, nam quilibet ternarius ex ſupradictis æquatur binario. Aduerte dumtaxat me per medium non intelligere minorem majore & majorem minore, ſed habere tantum rationem ſitus, in eo ordine quem ſupra vides.

Inuenire infinities duos numeros tales, vt differentia quadratorũ ab illis ortorum detracta maiori vel minori, vel ſummæ vel differentiæ eorum, relinquat quadratum.

Ponatur ſumma numerorum 1 − 2 N. & differentia 2 N. ergo ipſi numeri erunt $\frac{1}{2}$ & 44
$\frac{1}{2}$ − 2 N. proindeque differentia quadratorum ab illis eſt 2 N − 4 Q quæ detracta ſummæ vel differentiæ relinquit quadratum. Reſtat ergo vt detracta alterutri numerorum, quadratũ relinquat, relinquit autem $\frac{1}{4}$ + 4 Q − 2 N. & $\frac{1}{4}$ + 4 Q − 4 N. igitur hæc æquanda quadratis, & fit 1 N æqualis $\frac{2}{11}$ & duo quæſiti numeri ſunt $\frac{1}{2}$ & $\frac{3}{22}$ vt vero inuenias alios, pone pro nouâ radice 1 N + $\frac{2}{11}$ & iuxta hãc reſolue terminos quadrato æquatos, & perge in operatione ſecundum præcepta ſuperius tradita, neque deſpondeas animum ſi occurrant numeri ficti, iam diximus quomodo reduci debeant ad veros.

Inuenire duos numeros quorum ſumma faciat quadratum, & quorum quadrata ſimul iuncta faciant quadrato-quadratum.

Iſtud problema idem plane eſt cum ſuperiori quo quærebatur triangulum rectangu- 45
lum cuius hypotenuſa & ſumma laterum ſit quadratus aliaſque fuit propoſitum pleriſque doctiſſimis Mathematicis à Fermatio noſtro ſine ſolutione. Vtere igitur triangulo primitiuo ſupra inuento (num. 25) 169. 119. 120. quod formatur ab 5 & 12 & forma triangulum ab 1 N + 5 & 12. latera erunt 1 Q + 169 + 10 N. 1 Q. − 119 + 10 N. 24 N + 120. igitur hypotenuſa 1 Q + 169 + 10 N. & ſumma laterum circa rectum 1 + 1 Q + 34 N. æquantur quadrato, duc ſummam iſtam laterum in 169. ergo productus 169 Q + 5746 N. + 169. cum hypotenuſa 1 Q + 169 + 10 N æquantur quadratis. Ergo (per ea quæ dicta ſunt num. 22) valor radicis eſt $\frac{2068075}{105366}$ & iuxta poſitiones duo numeri à quibus naſcetur triangulum quæſitum 4687298610289. 4565486027761. 1061652293520. nam & hypotenuſa & quadratus & ſumma laterum & quadrata laterum æquantur quadrato hypotenuſæ. Proindeque duo latera circa rectum ſunt duo numeri quæſiti tum quia illorum ſumma quadratus eſt, tum quia horum quadrata ſimul iuncta faciunt quadratoquadratum.

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum ſit numerus quadratus qui additus dato multiplici alterius circa rectum faciat quadratum.

46 Detur triplus pro multiplici & formetur triangulum rectangulum ab 1 N + 1 & 1. latera erunt 2 + 1 Q. + 2 N. 1 Q. + 2 N. 2 + 2 N. triplum poſtremi iſtius lateris eſt 6 N + 6 cui ſi addas medium latus, fiet ſumma 1 Q + 8 N + 6 æquanda quadrato. Inſuper ipſum medium latus nempe 1 Q + 2 N. quadrato æquandum eſt. Hæc duplicata æqualitas modo communi reſoluta dat $\frac{1}{12}$ pro valore radicis & iuxta poſitiones fiet triangulum quæſitum in integris 313. 25. 312.

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum ſit numerus quadratus qui multatus dato multiplici alterius lateris circa rectum faciat quadratum.

47 Detur triplus pro multiplici & capiatur triangulum inuentum in præcedente 313. 25. 312. pro primitiuo, & quia iſtud triangulum formatur ab 13 & 12 forma triangulum quæſitum ab 1 N − 13 & 12. latera erunt 1 Q − 26 N + 313. 1 Q − 26 N + 25. 24 N − 312. huius poſtremi triplum ſubtractum à medio, relinquit 19 + 961 − 98 N. quod eſt æquandum quadrato, at medium latus æquari etiam debet quadrato nempe 1 Q − 26 N + 25. En tibi æqualitatem duplicatam, ducto igitur horum poſtremo in $\frac{961}{25}$ iuxta ea quæ dicta ſunt in numero 4. fient duo termini noui æquandi quadrato $\frac{961Q}{25}$ + 961 − $\frac{24986N}{25}$ & 1 Q + 961 − 98 N. horum differentia eſt $\frac{936Q}{25}$ − $\frac{22536N}{25}$ eligantur duo hanc differentiam producentes $\frac{36N}{5}$ & $\frac{26N}{5}$ − $\frac{22536N}{180}$ & fiant reliqua pro ſolito, inuenieturque valor radicis $\frac{23542921}{3820440}$ ergo 1 N. − 13. & 12. in integris abiecto denominatore erunt 23542921 & 3820440 ex quibus formatur triangulum quæſitum 568864871005841. 539673367418641. 179888634210480. dabimus infra ſolutionem eiuſdem problematis per aliam methodum in 3. p. n. 36.

Inuenire triangulum rectangulum cuius hypotenuſa ſit numerus quadratus, & in quo datus multiplex vnius lateris circa rectum detractus alteri, faciat quadratum.

48 Pone 1 N + 1 & 1 pro numeris formantibus triangulum, latera erunt 2 + 1 Q + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 N + 2. ergo ſi duplum iſtius poſterioris 4 N + 4 tollas ab 1 Q + 2

N. relinquetur 1 Q − 2 N − 4 æquandus quadrato, sed & hypotenusa 2 + 1 Q + 2 N. æquanda est quadrato. En tibi duplicatam æqualitatem vbi valor radicis est $\frac{17}{12}$ igitur 1 N + 1 & 1 in integris relicto denominatore erunt − 5 & 12. vnde formatur triangulum 169. 119 − 120, redintegra ergo operationem & pone pro numeris formantibus triangulum 1 N − 5 & 12 latera trianguli erunt 1 Q + 169 − 10 N. 1 Q − 10. N − 119. 24 N − 120. ac proinde si duplum postremi lateris detrahatur medio, residuum 1 Q + 121 − 58 N sicut & hypotenusa 1 Q + 169 − 10 N. æquabuntur quadratis, ducatur ergo residuum 1 Q + 121 − 58 N in quadratum $\frac{169}{121}$ & fient duo termini æquandi quadrato reducti ad eundem quadratum $\frac{169 Q}{121}$ + 169 − $\frac{9802 N}{121}$ & 1 Q + 169 − 10 N. differentia illorum est $\frac{48 Q}{121}$ $\frac{8592 N}{121}$ quam producunt $\frac{2 N}{11}$ & $\frac{24 N}{11}$ − $\frac{4296}{11}$ horum producentium summæ semissis quadratus æquetur maiori duorum superiorum terminorum & fiet valor radicis $\frac{4593455}{46046}$ & juxta positiones triangulum quæsitum erit 1934304611 3329. 18732418687921. 4821817400400. & satisfacit quæstioni.

Inuenire triangulum rectangulum, cuius vnum latus circa rectum sit quadratus, & alterius lateris circa rectum sit quadratus & alterius lateris circa rectum datus multiplex hypotenusæ additus faciat quadratum.

Detur multiplex duplus & formetur triangulum ab 1 N + 1 & 1 latera sunt 1 Q + 2 + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 N + 2. ponatur medium latus 1 Q. + 2 N. esse quadratum, postremi autem lateris duplum 4 N + 4 additum hypotenusæ facit 1 Q + 6 N. + 6 ergo duo sequentes termini 1 Q + 6 N + 6 & 1 Q + 2 æquantur quadratis, & fit valor $\frac{1}{4}$ ac proinde 1 N + 1 & 1 in integris erunt 5 & 4 vnde formatur triangulum quæsitum 41. 9. 40. hinc solues sequens problema. Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum sit quadratus numerus, alterius autem lateris simplum & duplum additum hypotenusæ faciat quadratum, triangulum est idem quod supra 41. 9. 40. si peteres istius lateris additi simplum & quindecuplum triangulum foret 30. 16. 34. formatum à 5 & 3. 49

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum sit quadratus, alterius autem lateris datus multiplex detractus hypotenusæ faciat quadratum.

Detur multiplex duplus; & assumatur pro triangulo primitiuo illud quod inuentum est in quæstione præcedenti 41. 9. 40. quodque formatur ab 5. & 4. inde ob analysin præcedentem formabitur triangulum quæsitum ab 1 N − 5 & 4. latera erunt 1 Q + 41 − 10 N. 1 Q + 9 − 10 N. 8 N − 40 sit medium latus 1 Q + 9 − 10 N. æquandum quadrato deinde duplum postremi lateris 8 N − 40. detrahatur hypotenusæ & remanet 1 Q + 121 − 26 N æquandus quadrato, ecce ergo duplicatam æqualitatem 50

inter 1 Q + 121 − 26 N & 1 Q + 9 − 10 N quæ multipliciter videtur posse solui, sed vix occurret ratio commoda ad solutionem nisi recurras ad nouam methodum explicatam num. 20. & sequentibus, reuocentur ergo illi duo termini ad eandem vnitatem quadratum ducendo posteriorem in $\frac{121}{9}$ ita fient rursus duo termini $\frac{121Q}{9}$ + 121 − $\frac{1210N}{9}$ & 1 Q + 121 − 26 æquandi, quadrato, horum terminorum differentia est $\frac{112Q}{9}$ − $\frac{976N}{9}$ hanc producunt $\frac{8N}{3}$ & $\frac{14N}{3}$ − $\frac{122}{3}$ horum summæ semissis quadratus æquatus priori termino dat valorem $\frac{658}{33}$ vnde si tollas 5. restabit $\frac{493}{33}$ ergo numeri à quibus formabitur triangulum quæsitum sunt 493 & 132. & ipsum triangulum quæsitum est 260473. 225625. 130152.

Hinc solues sequens problema : Inuenire triangulum rectangulum in quo vnum latus circa rectum sit numerus quadratus & alterius lateris simplum & duplum detractum sigillatim hypotenusæ relinquat quadratum, iidem enim numeri supra dati soluunt quæstionem neque dicas hanc conditionem mox additam esse inutilem cum omni triangulo rectangulo conueniat ; nam & si conueniat omni triangulo, multiplicibus tamen non conuenit vt patet in sequente 624. 576. 240 nam vnum eius latus est numerus quadratus & duplum alterius lateris detractum hypotenusæ facit quadratum, nec tamen simplum illius additum hypotenusæ quadratum facit.

Inuenire triangulum rectangulum cuius area sublata ex quadrato summæ laterum circa rectum relinquat quadratum.

51 Ponantur duo latera circa rectum 1 N & 1. ergo illorum quadrata 1 Q + 1 facient quadratum hypotenusæ, area autem trianguli erit $\frac{1N}{2}$ quæ sublata de quadrato summæ laterum circa rectum relinquit 1 Q + 1 + $\frac{3N}{2}$ æquandum quadrato in hac duplicata æqualitate fit valor − $\frac{55}{48}$ pono ergo nouam radicem 1 N − $\frac{55}{48}$ & iuxta eam resoluo omnes particulas eorum terminorum qui mox æquati sunt quadratis fiuntque noui termini quadrato æquandi 1 Q − $\frac{19N}{24}$ + $\frac{1369}{2304}$ & 1 Q − $\frac{55N}{24}$ + $\frac{5329}{2304}$, duc primum terminum in $\frac{5329}{1369}$ sic enim reuocabuntur duo termini prædicti ad eundem vnitatum quadratum eruntque $\frac{5329Q}{1369}$ − $\frac{101251N}{32856}$ + $\frac{5329}{2304}$ & 1 Q − $\frac{55N}{24}$ + $\frac{5329}{2304}$ æquandi quadrato differentia illorum est $\frac{3960Q}{1369}$ $\frac{2163N}{2738}$ quam producunt $\frac{36N}{37}$ & $\frac{110N}{37}$ − $\frac{2163}{2664}$ & fit valor $\frac{7622505}{5250744}$ hinc tolle $\frac{55}{48}$ ob nouam radicem & extabit valor pro primis positionibus $\frac{39655}{129648}$, igitur duo latera circa rectum quæ posita sunt 1 N & 1 erunt in integris 39655. 129648. & hypotenusa 135577. En triangulum quæsitum.

Inuenire triangulum rectangulum cuius tam vnum latus circa rectum quam summa laterum circa rectum sit quadratus, & in quo dupla area detracta alterutri laterum circa rectum faciat quadratum.

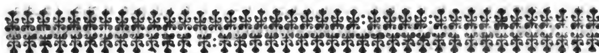
52 Ponantur latera 1 N & 1 − 1 N. duplum areæ est 1 N − 1 Q. quod detractum alterutri laterum facit quadratum : 1 Q & 1 + 1 Q − 2 N. præterea summa laterum est quadratum

tum, nempe vnitas, restat ergo vt secundum latus 1 − 1 N. & insuper summa quadratorum a lateribus 1 + 2 Q − 2 N. faciant quadratum & fit $\frac{40}{49}$ pro valore radicis igitur triangulum quæsitum est $\frac{40}{49}$, $\frac{9}{49}$, $\frac{41}{49}$.

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum sit cubus, à quo detractâ areâ relinquatur quadratus.

Ponantur latera circa rectum 1 N & 1, sic enim vnum latus cubus erit: ex eo cubo 53
tolle aream $\frac{1N}{2}$. residuum $1 - \frac{1N}{2}$ æquandum est quadrato, sed & 1 Q + 1 quadrato æquari debet, in ista duplicata æqualitate valor radicis est $-\frac{272}{225}$ pono igitur nouam radicem 1 N $\frac{272}{225}$ & iuxta illam resoluo singulas particulas terminorum quadratis æquatorum fiuntque noui termini quadrato æquandi $\frac{361}{225} - \frac{1N}{2}$ & 1 Q + $\frac{124609}{50625} - \frac{544N}{225}$ vbi vnitatum numeri sunt quadrati qui ad eundem quadratum vnitatum reducti faciunt 1 Q + $\frac{124609}{50625}$ $\frac{544N}{225}$ & $\frac{124609}{50625} - \frac{124609}{162450}$ quadrato æquandos, horum differentia est 1 Q − $\frac{268159N}{162450}$ quam producunt 1 N & 1 N − $\frac{268159}{162450}$ ergo valor est $\frac{187917462543}{80970928200}$ vnde si tollas $\frac{272}{225}$ ob nouam radicem relinquetur valor pro primis positionibus $\frac{90032607119}{80970928200}$ & fit triangulum quæsitum $\frac{121037416881}{80970928200}$. 1. $\frac{90032607119}{80970928200}$.





PARS SECVNDA.

De Triplicatâ æqualitate, & eius solutionibus infinitis.

1 VVlgare est duos terminos quibusdam conditionibus affectos æquari posse quadratis: sed hactenus inauditum fuit hoc ipsum perfici de terminis tribus; asserit tamen intrepidè Fermatius non tantum hoc non esse impossibile, verum etiam facilè posse fieri, traditque regulas certas quibus id præstetur, modo adsit vnum quadratum ex parte singulorum terminorum: hoc autem facit dupliciter, primo respectu radicum & vnitatum, secundo respectu quadratorum & radicum.

Præceptum generale ad soluendas triplicatas æqualitates.

2 Si fuerint tres termini æquandi quadrato, & sit in illis idem quadratus, cape certum quemdam numerum quadratorum & radicum, pro vnâ radice, hunc multiplica per numerum radicum in vno ex terminis datis existentem ita vt productus numero vnitatum iunctus, efficiat quadratum: & juxta illam nouam radicem resolue duos alios terminos, iisque resolutis adhibe duplicatam æqualitatem vulgarem: ita efficies valorem pro tribus posterioribus terminis, hunc valorem resolue per illum certum numerum quadratorum & radicum quem accepisti, & fiet valor quem quæris pro tribus terminis prioribus qui dati sunt.

3 Exemplum esto in tribus terminis sequentibus 1 + 1 N. 1 + 2 N. & 1 + 5 N. æquandis quadrato, cape pro vna radice 1 Q + 2 N. hoc enim ductum in 1 numerum radicum facit 1 Q + 2 N & hic productus junctus vnitati facit quadratum 1 + 1 Q + 2 N. à latere 1 + 1 N tum juxta eandem radicem nouam resolue duos alios terminos 1 + 2 N & 1 + 5 N. & habebis duos terminos nouos 1 + 2 Q + 4 N & 1 + 5 Q + 10 N. æquandos quadrato, id facies, per methodum vulgarem capiendo istorum terminorum differentiam *6* N + 3 Q. quam producunt 3 N & 2 + 1 N. horum producentium summæ semissis quadratus 1 + 4 Q + 4 N. æquatus maiori termino 1 + 5 Q + 10 N. dat pro valore − *6* (hic numerus fictus æquabit quadratis tres posteriores terminos) hunc resolue per 1 Q + 2 N. quibus vsus es pro noua radice, hoc est cape quadratum − *6*. nempe 26. quem connecte cum duplo − *6*. nempe 12. ita enim fiet + 24. pro valore radicis in tribus prioribus terminis qui dati sunt eruntque tres illi termini quadrati 25. 49. 121. si accipias 24. pro 1 N.

4 Rursus data triplicata æqualitate 4 + 2 N. 4 + 3 N. 4 + *6* N. cape $\frac{1Q}{1}$ + 2 N. pro noua radice, vt eo cossico ducto in 2 fiat 1 Q + 4 N. qui iunctus 4 facit quadratum 4 + 1 Q + 4 N. operare vt supra, & fiet ualor pro triplicata æqualitate data [illegible].

5 Simili prorsus ratione datis tribus terminis *9* + 1 N. *9* + 3 N. *9* + 5 N. æquandis quadrato, oportebit vti resolutione, capiendo 1 Q + 18 N. pro 1 N. & fient noui tres termini, quorum primus erit quadratus indefinite, ac proinde per duplicatam æqualitatem vulgarem, inuenies valotem radicis [illegible].

Si numeri vnitatum ſunt quadrati diuerſi, haud difficilius ſoluetur triplicata æqualitas.

Vt ſi dentur tres termini $1 + 1N. 4 + 3N. 9 + 2N$ æquandi quadratis reuocandi erunt quadrati ad eundem, & perficietur operatio, vt dictum eſt; facile autem reuocabuntur ad eundem quadratum ſi tres illi multiplicentut inter ſe, ſic ergo ſtabit triplicata æqualitas præcedens $36 + 36N. 36 + 27N. 36 + 8N.$ quia enim 1 ducta eſt in 36. oportebit ducere in 36. numerum radicum qui illi iungitur & quia quadratus ſequens 4 ducitur in 9 vt fiat 36. oportebit etiam numerum radicum 3. qui illi nectitur ducere in 4. vt fiat 36. neceſſe erit numerum radicum 2 illi annexum ducere in 4. vt fiant 8 N. at in iſtis poſterioribus terminis valor eſt $\frac{16928}{744769}$ ergo & in prioribus, ille idem valor ſoluit quæſtionem. 6

Hæc eadem praxis extenditur ad numeros diminutos.

Exempli cauſa ſi dentur tres termini $1 + 1N. 1 - 2N. 1 + 5N.$ capiendo pro vna radice $1Q. + 2N.$ reuocabuntur ad iſtos tres $1 + 1Q + 2N. 1 - 2Q - 4N. 1 + 5Q + 10N.$ & quoniam illorum trium primus eſt quadratus indefinite; erunt duo reliqui æquandi quadrato & fiet valor radicis $\frac{2}{11}$ pro poſterioribus terminis, ac pro prioribus $\frac{48}{121}$. 7

Dantur infinitæ ſolutiones in triplicatis æqualitatibus.

Rem totam exemplo illuſtrabimus, quia enim ſupra dixi -6 eſſe valorem $1 + 2Q + 4N.$ & $1 + 5Q + 10N.$ aſſumo $1N - 6$ pro noua radice, iuxta quam reſoluo duos terminos ſuperiores & fiunt noui termini $5Q + 121 - 50N$ & $\frac{2484}{49} + 121 - \frac{2480N}{9}$ æquandi quadrato per methodum vulgarem, & fit pro valore radicis quidam numerus, vnde ſi tollas 6. (ob nouam radicem $1N - 6$) reſtabit valor $\frac{115043858816}{14716382219}$ & quia tres termini primitus dati erant $1 + 1N. 1 + 2N. 1 + 5N.$ & ſumpta erat noua radix $1Q + 2N.$ duplum valoris mox inuenti iunctum eius quadrato, exhibebit pro triplicata æqualitate valorem [illegible] modo ſupponas denominatorem, & ſatisfacit plane, nam iſte numerus additus vnitati facit quadratum, cuius latus eſt 26220768035. ſuppoſito denominatore 14716382219. duplum eiuſdem numeri additum cum vnitate facit quadratum à latere 34036531067. ſupponendo eundem denominatorem; quintuplum autem illius numeri junctum vnitati, quadratum eſt à latere 50708537341. ſuppoſito eodem denominatore. 8

Cum maior numerus radicum æquatur duobus alijs radicum numeris, impoſsibilis eſt ſolutio triplicatæ æqualitatis per hanc methodum.

Sint, verbi gratia, termini tres $1 + 2N. 1 + 3N. 1 + 5N.$ æquandi quadratis; 9
& capiatur pro vna radice $2Q + 2N.$ vt primus terminus per eam reſolutus exhibeat

quadratum 1 + 4 Q + 4 N. duo autem alij termini resoluti exhibebunt 1 + 6 Q + 6 N 1 Q + 10 N. igitur si hæc duplicata æqualitas soluatur per methodum communem prodibit valor pro posterioribus terminis − 1 qui resolutus iuxta nouam radicem 29 + 2 N dat, 0, seu negationem numeri pro numero positiuo.

10 Idem dic de quacumque aliâ duplicatâ æqualitate istiusmodi, vbi aduerte dixisse me solutionem in eo casu impossibilem esse per hanc methodum, nam dari possunt plurimæ æqualitates triplicatæ huius generis quæ in se non sunt impossibiles: vt patet in sequente 1 + 5 N. 1 + 16 N. 1 + 21 N. vbi valor radicis est 3 iuxta quem resoluti termini dant tres quadratos 16. 49. 64.

11 Hic etiam aduertendum est cum nostro Fermatio triplicatam æqualitatem 1 + 1 N. 1 + 2 N. 1 + 3 N. esse impossibilem duobus modis, & essentialiter & methodicè: essentialiter quidem quia demonstratur non posse dari quatuor quadratos in continua proportione arithmetica quod tamen inde sequeretur, proponendo vnitatem: est quoque solutio hîc impossibilis methodicè, quia licet in se foret possibilis, non posset solui per methodum allatam eo quod numerus major radicum æquatur duobus aliis radicum numeris.

12 Hæc tamen cautio intelligenda est dum numerus quadratus vnitatum est vnus & idem quadratus, quia si essent diuersi quadrati pro numero vnitatum, posset numerus maior radicum æquari duobus alijs vt patet in tribus terminis sequentibus 1 + 1 N. 9 + 2 N. 4 + 3 N. vbi radicis valor reperitur per nostram methodum [illegible].

Triplicata æqualitas potest solui etiam si constet solis quadratis & radicibus, modo numerus quadratorum sit quadratus.

13 Sint exempli causa tres 1 Q + 1 N. 1 Q + 2 N. 1 Q + 5 N. æquandi quadrato, reduci potest illa æqualitas ad præcedentem constantem vnitatibus & radicibus 1 + 1 N. 1 + 2 N. 1 + 5 N. in qua ex præcedentibus valor est 24. per hunc valorem diuide vnitatem & fiet valor quæsitus $\frac{1}{24}$. Ratio huius rei est quia si illic loco 1 N. capias $\frac{1}{1N}$ primus terminus qui fiet 1 Q + 1 N. erit $\frac{1}{1Q} + \frac{1}{1N}$ & secundus $\frac{1}{1Q} + \frac{2}{1N}$ tertius autem $\frac{1}{Q} + \frac{5}{1N}$ hi tres æquari debent quadratis; duc illos in 1 Q & fient 1 + 1 N. 1 + 2 N & 1 + 5 N. æquales quadratis, etenim quadrati ducti in quadratum faciunt quadratos. Igitur reducta est triplicata æqualitas constans quadratis & radicibus, ad triplicatam æqualitatem constantem radicibus & vnitatibus debetque vnitas diuidi per valorem numeri quia $\frac{1}{1N}$ sumpta est pro 1 N.

14 Sic data triplicata æqualitas 4 Q + 2 N. 4 Q + 6 N. 4 Q + 9 N. conuertetur in istam 4 + 2 N. 4 + 6 N. 4 + 9 N. & quia in posteriori valor est [illegible] per hunc diuidendo vnitatem, erit in priori valor [illegible] similiter data triplicata æqualitas 1 Q + 2 N. 4 Q + 3 N. 16 Q + 6 N. conuertetur in istam 1 + 2 N. 4 + 3 N. 16 + 6 N. in qua valor est [illegible] ergo si per hunc diuidas vnitatem fiet [illegible] pro valore prioris, denique si detur 1 Q + 1 N. 4 Q + 3 N. 9 Q + 2 N. conuertes illam in + 1 N. 4 + 3 N. 9 Q + 2 N. vbi valor est [illegible] igitur per hunc diuidendo vnitatem fiet [illegible] pro data æqualitate triplicatâ.

15 Aduerte compendiose admodum procedi posse dum non datur idem, sed alius numerus quadratorum quam vnitas, si intactis radicibus, reducatur quadratum ad vnitatem & postea valor inuentus diuidatur per quadratum datum: ut si detur 9 Q. + 9 N. 9 Q + 24 N. 9 Q + 72 N. intactis radicibus pro 9 Q substitue 1 Q vt vides 1 Q + 9 N. 1 Q + 24 N. 1 Q + 72 N. vbi valor est 3. quo diuiso per quadratum 9 fit $\frac{1}{3}$

pro valore prioris æqualitatis, ſi eundem valorem 3. diuidas per 16 fiet valor $\frac{3}{16}$ pro triplicata æqualitate ſequẽte 16Q + 9 N. 16 Q + 24 N. 16 Q + 82 N. & ſic de aliis omnibus.

Per triplicatam æqualitatem ſoluuntur quadruplicatæ, quintuplicatæ & millecuplicatæ æqualitates.

Detur verbi gratia æqualitas quadruplicata ſequens 64 + 20 N. 16 + 12 N. 4 + 8 N. 1 + 2 N. reductis quadratis ad eundem quadratum vt dictum eſt, fit noua æqualitas 64 + 20 N. 64 + 48 N. 64 + 128 N. pro 1 N cape $-\frac{12}{1}$ + 1 N. vt iuxta illam reſoluti duo numeri æquales faciant quadratum & fiet tandem per methodum ſupra traditam, (præter 4 qui eſt obuius valor) 8320. qui ſoluet æqualitatem datam. 16

Non aliter diſponi poteſt quintuplicata æqualitas conſtans diuerſis quadratis & radicibus, ita tamen, vt reducti quadrati ad eundem, faciant tres numeros æquales & reliquos duos inæquales vti videre eſt in ſequente 1 + 2 N. 4 + 8 N 16 + 32 N. 64. + 20 N. 256 + 36 N. vbi valor eſt 4. & [illegible] hoc eodem modo diſponetur centuplicata æqualitas, & ita in infinitum. 17

Ex prædictis ſoluere infinities & quidem facile, quæ Diophantus & Bachetus per intricatiſsimas methodos ſoluunt.

Dentur æquandi quadrato 16 + 1 N & 16 + 2 N. pro 1 N. cape 1 Q + 8 N. vt hoc modo primus numerus fiat quadratus indefinitè 16 + 1 Q + 8 N à latere 4 + 1 N. ergo alter numerus erit 16 + 2 Q + 16 N. æquandus quadrato (fingi autem poteſt latus infinities) finge 4 − 2 N. & fiet valor 16. cuius quadratum cum octuplo 16 (ob 1 Q + 8 N.) pro noua radice dat valorem quæſitum 384. 18

Dentur iterum 16 − 1 N & 16 − 5 N. æquandi quadrato, cape pro noua radice 8 N − 1 Q. & iuxta illam termini reſoluti ſic ſtabunt 16 + 1 Q − 8 N. & 16 + 5 Q − 40 N. quorum prior eſt quadratus, igitur ſolus poſterior æquandus quadrato, finge latus 4 − 7 N. & fit valor $\frac{4}{11}$ ergo eius octuplum multatum quadrato ipſius, (ob nouam radicem 8 N − 1 Q dat valorem quæſitum $\frac{336}{121}$. 19

Rurſus, datis pro tertio caſu æquandis quadrato 16 + 1 N. & 16 − 1 N. cape pro noua radice 1 Q + 8 N. vt primus terminus ſit 16 + 1 Q + 8 N. quadratus igitur ſecundus terminus erit 16 − 1 Q − 8 N. æquandus quadrato, finge latus 4 − 2 N & fit valor $\frac{8}{5}$ cuius octuplum cum ipſius quadrato (ob nouam radicem 1 Q. + 8 N.) dat valorem quæſitum $\frac{384}{25}$. 20

Quæſtiones duodecim circa hactenus dicta in ſecunda parte.

Quot exempla dedimus, tot problemata præparauimus. Vnicum ex multis proferam, quod eſt eiuſmodi. Inuenire alium numerum quam 24. cuius ſimplum duplum, & quintuplum additum vnitati, faciat tres quadratos, ſolutionem huius quæſtionis habes ſupra ſub titulo ſolutionum infinitarum, eſtque numerus quæſitus fractio cuius 21

numerator 470956770729578397264. & denominator 216571905615699363961. imò ſi vis quæſtionem in integris proponi , ſic ſtabit : Inuenire alium quadratum integrum quam vnitatem cui additum ſimplum , duplum & quintuplum cuiuſpiam numeri integri faciat quadratos , ſed propter hoc , ſubnecto alia.

Inuenire tres cubos quorum ſumma juncta tribus numeris eandem cum cubis proportionem habentibus faciat quadratos.

22 Cape tres priores cubos 1. 8. 27. quorum ſumma 36. addatur ſigillatim cubis prædictis charactere radicum affectis , eruntque 36 + 1 N. 36 + 8 N & 36 + 27 N. æquandi quadrato , eligatur pro vna radice 1 Q + 12 N. vt prior numerus iuxta eam reſolutus, ſit quadratus à latere 6 + 1 N. abſolutâ operatione inuenietur valor radicis [illegible].

Inuenire alium numerum quam quaternarium cujus duplum , octuplum , duotrigecuplum , vigecuplum , & trigeſecuplum additum quinque quadratis continuè proportionalibus , faciat quadratos.

23 Eligantur quadrati ſequentes, & deuentum ſit ad æqualitatem quintuplicatam quæ ſic ſtat : 1 + 2 N. 4 + 8 N. 16 + 32 N. 64 + 20 N. 256 + 36 N. reducta illa ad eundem quadratum, erit æqualitas quæ ſequitur : 256 + 512 N. 256 + 512 N. 256 + 512 N. 256 + 80 N. 256 + 36 N. vbi proinde eſt ac ſi daretur triplicata æqualitas, & ſit per methodum ſuperiorem, 1 N. æqualis [illegible] quæ ſoluet quintuplicatam æqualitatem primo inuentam.

Inuenire tres numeros quadratos quorum ſumma iuncta ſigillatim tribus illorum lateribus faciat quadratos.

24 Eligantur tres quadrati , quorum ſumma ſit quadratus , & tales , vt maius latus ipſorum ſuperet reliqua duo latera : iſtiusmodi ſunt 4. 36. 81. hi enim ſimul additi faciunt 121. quare tres quæſiti numeri ſint 4 Q. 36 Q. 81 Q. quorum ſumma addita ſigillatim ipſorum lateribus facit 121 Q + 2 N. 121 Q + 6 N. 121 Q + 9 N. æquandos quadratis , & ſit valor radicis [illegible] iuxta quem reſoluti numeri ſuperiores exhibent quadratos & ſatisfaciunt quæſtioni.

Inuenire tres quadratos diuersos, quorum singulis si addantur tres numeri harmonice proportionales, fiant quadrati.

Hoc curandum, vt maximus trium harmonice proportionalium superet duos reliquos, quare tres termini 1 + 2 N. 4 + 3 N. & 16 + 6 N. æquantur quadrato, reductis illis per methodum superiorem erunt 16 + 32 N. 16 + 12 N. 16 + 6 N. æquandi quadrato, cape pro vna radice $\frac{1Q}{6} + \frac{1N}{1}$ & absolue operationem vt supra diximus & fiet valor pro priori æqualitate triplicata [illegible]. 25

Inuenire tres numeros vt interuallum duorum maiorum ad interuallum duorum minorum datam habeat rationẽ, sed & bini sumpti quadratum constituant. Detur ratio tripla.

Hæc est quæstio quadragesima quinta libri quarti Diophanti quâ nulla est prolixior, & intricatior apud hunc authorem; cape aliquem quadratum pro summa medij & minoris, puta 4. sitque medius 2 + 1 N & minor 2 − 1 N. horum differentia est 2 N. cuius triplum 6 N (quia datur ratio tripla) addatur medio & fiet major 2 + 7 N. quare superest vt summa maioris & medij 4 + 8 N. & summa maioris & minoris 4 + 6 N. æquetur quadrato pro vna radice, cape $\frac{1Q}{6} + \frac{4N}{6}$ vt hæc ducta in 6 (numerum radicum in posteriori termino efficiat 1 Q + 4 N. qui cum 4 facit quadratum, à latere 2 + 1 N. hæc eadem radix noua ducta in 8. (numerum radicum in priori termino) facit productum qui additus 4. dat summam 4 + $\frac{4Q}{3}$ + $\frac{16N}{3}$ æquandam quadrato: huius quadrati potest fingi latus infinitis modis. Finge à latere 2 + $\frac{4N}{6}$ & fit valor qui resolutus per nouam radicem vt diximus dat valorem quæsitum [illegible] & tres quæsiti numeri erunt [illegible]. 26

Inuenire duos numeros quorum summa aucta vel multata differentia eorum aut differentia quadratorum ab illis, faciat quadratum.

Sint duo illi numeri $\frac{1}{2}$ + 1 N & $\frac{1}{2}$ − 1. sic enim differentia numerorum, & differentia quadratorum erit 2 N. igitur superest vt summa numerorum aucta & multata 2 N. æquetur quadrato, eritque sequens duplicata æqualitas 1 + 2 N & 1 − 2 N. cape $\frac{1Q}{2}$ + 1 N pro noua radice vt hac ducta in 2. & producto addito vnitati, fiat quadratus 1 + 1 Q + 2 N. pro priore termino, igitur secundus terminus erit 1 − 1 Q − 2 N. æquandus quadrato, finge latus 1 − 3 N. & fiet valor primus $\frac{2}{5}$ pro posterioribus terminis hic additus dimidio sui quadrati (ob nouam radicem sumptam $\frac{1Q}{2}$ + 1 N.) dabit $\frac{12}{25}$ valorem quæsitum, ergo iuxta positiones duo numeri quæsiti erunt $\frac{49}{50}$ & $\frac{1}{50}$. 27

Inuenire quatuor numeros, quorum tria ſint quadrata, atque inſuper productus duorum quorumcumque auctus vnitate faciat quadratum.

28 Inueniendi primum ex Diophanto l. 5. Q. 27. tres quadrati quorum quilibet adſcita vnitate faciat quadratum: tales ſint $\frac{9}{16}$ $\frac{25}{4}$ $\frac{196}{81}$, ponatur quartus quæſitus 1 N. retentis illis tribus pro primo, ſecundo & tertio; certum eſt productum primi in ſecundum & ſecundi in tertium, & tertij in primum, fore quadratum, reſtat ergo, vt productus quarti in illos tres adſcita vnitate faciat quadratum igitur $\frac{9N}{16}$ + 1 & $\frac{25N}{4}$ + 1 & $\frac{196N}{81}$ + 1 æquantur quadratis, ponatur iuxta præceptum $\frac{169}{9}$ + $\frac{22N}{9}$ pro valore 1 N. vt numerus radicum qui eſt in primo termino iſtum multiplicans faciat 1 Q + 2 N. qui cum vnitate conſtituat quadratum, à latere 1 + 1 N tum reliqui numeri radicum, qui ſunt in duobus aliis terminis ducantur in eundem, & producti nectantur cum vnitate, fientque 1 + $\frac{400Q}{36}$ + $\frac{800N}{36}$ & 1 + $\frac{40069}{729}$ + $\frac{8192N}{729}$ æquandi quadrato, ergo cum numeri vnitatum (imò & quadratorum ſint quadrati) poteſt ſolui duplicata illa æqualitas per methodum vulgarem, & inuenietur valor radicis pro quarto numero quæſito.

Inuenire triangulum rectangulum tale vt productus ex hypotenuſa in ſummam laterum circa rectũ ſit quadratus, atque inſuper quadratum hypotenuſæ iunctum alterutri ex duobus lateribus circa rectum & duplo hypotenuſæ, faciat quadratum.

29 Cape triangulum rectangulum in quo tam hypotenuſa quam ſumma laterum circa rectum ſit quadratus: (vt dictum eſt in prima parte n. 45.) & necte ſingulis lateribus characterem radicum, ſic enim peruenies ad æquationem, & reperies quod quæritur. Enimuero productus ex hypotenuſa in ſummam laterum quadratus erit quare ſi quadratum hypotenuſæ nectas cum alterutro latere circa rectum, & cum duplo hypotenuſæ fiet triplicata æqualitas, quæ ſoluetur per ea quæ dicta ſunt num. 13.

Inuenire triangulum rectangulum tale vt quadratus perimetri iunctus cuilibet lateri circa rectum, & dato multiplici hypotenuſæ faciat quadratum.

30 Eſto datus multiplex hypotenuſæ, duplus: & ponatur triangulum quæſitum 3 N. 4 N. 5 N. ergo 144 Q + 3 N. 144 Q + 4 N. & 144 Q + 10 N. æquantur quadrato. Hic valor radicis per ea quæ dicta ſunt ſupra num. 13. eſt $\frac{1521}{345744}$ igitur triangulum rectangulum quæſitum erit $\frac{4563}{345744}$. $\frac{6084}{345744}$. $\frac{7605}{345744}$.

Inuenire

Inuenire triangulum rectangulum tale vt productus ex hypotenusa in differentiam laterum circa rectum sit quadratus, & quadratus perimetri iuncti alterutri laterum circa rectum, vel dato multiplici hypotenusæ faciat quadratum. Esto datus multiplex duplus.

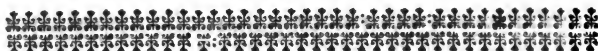
Cape pro triangulo primitiuo 119. 120. 169. in quo hypotenusa & differentia laterum circa rectum est quadratus: hos numeros necte characteri radicum, & fiet summa 408. N. ergo eius quadratus iunctus cuilibet lateri circa rectum & duplo hypotenusæ dat tres numeros 166464 Q. + 119 N. 166464 Q + 120 N. 166464 Q + 338 N. æquandos quadrato, reliqua sunt facilia ex num. 13. 31

Inuenire triangulum cuius vnum latus circa rectum si ducatur in differentiam eiusdem lateris & areæ faciat quadratum & quadratus perimetri junctus alterutri circa rectum & dato multiplici hypotenusæ faciat quadratum.

Capiatur ex prima parte num. 53. triangulum rectangulum in quo vnum latus circa rectum est vnitas, & differentia illius vnitatis & area sit quadratus, tum perimetri capiatur quadratus & nectatur singulis lateribus circa rectum affectis charactere radicum & cuilibet multiplici hypotenusæ, efficieturque problema propositum ex dictis num. 13. 32

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum si ducatur in summam laterum efficiatur quadratus & quadratus perimetri iunctus cuilibet lateri ex tribus faciat quadratum.

Capiatur aliquod triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum & summa laterum sit quadratus numerus, tale est 40. 9. 41. tum singula latera affecta charactere radicum nectantur quadrato perimetri & tres numeri 8100 Q + 40 N. 8100 Q. + 9 N. 8100 Q + 41 N. æquentur quadratis, eritque absolutum problema, neque dicas id repugnare iis quæ dicta sunt num. 9. & sequentibus vbi asseruimus quæstiones esse impossibiles per artem Fermatianam dum maior numerus radicum æqualis est duobus alijs radicum numeris, vnde fortasse videbitur alicui multo magis repugnare dum numerus maior superatur à duobus alijs simul sumptis: illud enim in quocumque casu inæqualitatis non est impossibile, vt laborioso analystæ planum fiet. 33



PARS TERTIA.

Complectens artem eliciendi radices infinitas ex numeris plures species habentibus, quam tres.

1 AGam hic potiſſimum de numeris continentibus quinque ſpecies quæ vocantur quadrato-quadrata, cubi, quadrata, radices, & vnitates & occaſione illorum, dicam quoque de quatuor ſpeciebus, ſiue habeant vbique ſigna poſitiua, ſiue etiam habeant intermixta negatiua: finis autem huius tractationis eſt æquare eiuſmodi numeros vel quadratis vel cubis, idque infinities: illud vero in vniuerſum dici poteſt eſſe neceſſarium, vt ſaltem vel quadratoquadratorum, vel vnitatum numerus ſit quadratus pro radice quadratâ, ſicut etiam neceſſe eſt vt cuborum vel vnitatum numerus ſit cubus, pro radice cubicâ.

Quadrato æquare numerum compoſitum ex quinque ſpeciebus in quo ſolus quadratoquadratorum numerus eſt quadratus.

2 Curandum in primis vt tam in numero æquando quam in æquante ſit idem numerus quadratoquadratorum, cuborum, & quadratorum: quod vt fiat, capietur primo latus quadratum numeri quadrato-quadratorum, vt ſit vna particula lateris quæſiti: deinde per illius duplum diuidetur numerus cuborum qui eſt in numero æquando, & quoties affectus charactere radicum, erit ſecunda particula lateris quæſiti: tertio capta differentia quadrati quod naſcitur ex iſtâ ſecundâ particulâ, & quadratorum in numero æquando exiſtentium, diuidetur per idem duplum lateris ſupradicti, vt habeatur tertia particula ex vnitatibus conſtans. Huius lateris quadratum in numero dato æquatum dabit radicem quæſitam: Vt ſi detur numerus 1 QQ + 4 C + 6 Q + 2 N + 7 æquandus quadrato, capies 1 Q + 2 N + 1 (ſic enim obſeruantur omnia præcepta mox tradita) & huius lateris quadratum 1 QQ + 4 C + 6 Q + 4 N + 1 æquatum numero dato exhibebit 3 pro valore radicis, juxta quam reſolutus numerus datus efficiet quadratum 256.

Quadrato æquare numerum quinque ſpeciebus conſtantem, in quo ſolus vnitatum numerus eſt quadratus.

3 Aduerte hic contra fieri ac in præcedente, nam id curandum præcipuè, vt æquales ſint inter ſe vtrinque vnitates, radices & quadrati, quare capies latus quadratum

numeri vnitatum, pro prima particula lateris, & per eius duplum diuides numerum radicum quotienſque erit ſecunda particula lateris; tum differentia quadratorum numeri æquandi, & eorum qui naſcuntur ex radice mox inuenta, diuidatur per idem duplum latus, vt fiat numerus quadratorum in æquante ponendus, ſic conficietur latus quadrati, quod ſi æquetur numero dato, exhibebit valorem radicis. Vt ſi detur numerus 10 QQ + 4 C + 19 Q + 6 N + 9 æquandus quadrato finges latus 3 + 1 N + 3 Q (ſic enim omnia præcepta mox tradita obſeruantur) & eius quadratum 9 + 6 N. + 19 Q + 6 C + 10 QQ æquabis numero dato fietque valor 2. iuxta quem reſolutus ille numerus exhibebit 289.

Multipliciter æquare quadrato numerum ex quinque ſpeciebus compoſitum in quo tam quadratoquadrata quam vnitates habent numerum quadratum.

Primo fingi poteſt latus tale vt vtrinque in numeris æquandis reperiantur vnitates 4
radices & quadrato-quadrata æqualia: vt ſi detur æquandus quadrato 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N. + 1. finge latus 1 + 10 N + 1 Q. huius quadratum eſt 1 + 20 N + 102 Q + 20 C + 1 QQ ergo cum tres ſpecies ſe elidant reſtabit æquatio inter − 924 & 16 C. diuides − 92 per 16. & fiet pro valore radicis [illegible] iuxta quem reſolutus datus numerus dabit quadratum [illegible]

Secundo fingi poteſt latus tale, vt reperiantur vtrinque æquales vnitates radices 5
& quadrati: vt ſi detur idem numerus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 æquandus quadrato, finges latus 1 + 10 N − 45 Q. cuius quadratum æquatum numero dato relinquet cubos & quadrato-quadratos, ergo cum ſint ſpecies collaterales & proximæ fiet valor radicis [illegible] iuxta quem datus numerus quadratus erit à latere [illegible].

Tertio fingi poteſt latus tale, vt quadrato-quadrati, cubi, & vnitates, æquales 6
vtrinque reperiantur: Vt ſi detur idem numerus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1. æquandus quadrato, finges latus 1 Q + 2 N + 1. & eius quadratum relinquet quadrata & radices ad æquationem, fietque − 4. pro valore radicis iuxta quem reſolutus qui datus eſt numerus exhibebit quadratum 81.

Quarto fingi poteſt latus tale, vt quadratoquadrati, cubi & quadrati vtrinque ſint 7
æquales: vt ſi detur idem numerus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 æquandus quadrato, finges latus 1 Q + 2 N + 3. & ex punctis æqualibus reſtabunt radices & vnitates inter ſe æquandæ, & fiet tandem poſt diuiſionem 1. primo valore radicis reſolutuſque iuxta eum numerus datus exhibebit quadratum 36.

Quinto fingi poteſt aliud latus ab eo quod ſupra fictum eſt ita vt vnitates radices & 8
quadrato-quadrati vtrinque reperiantur æquales: Vt ſi detur idem numerus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 æquandus quadrato, finges 1 + 10 N − 1 Q & fiet valor radicis [illegible] iuxta quem datus numerus erit quadratus à latere [illegible].

Sexto fingi poteſt latus aliud ab eo quod ſupra fictum eſt ita vt quadrato-quadrati, 9
cubi, & vnitates ſint æquales: vt dato eodem numero 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 finges 1 Q + 2 N − 1 & continget valor radicis − 3 iuxta quem reſolutus ſuperior numerus exhibebit quadratum 40.

Omitto reliqua latera quæ fingi poſſunt, vt 1 Q − 3 & 1 − 2 N 1 Q & 1 − 10 N − 1 Q 10
& 45 Q − 10 N − 1 & − 1 − 2 N − 1 Q. quia licet dent aliquos valores, illi tamen non differunt ab iis, quos exhibuimus.

Quid ſint radices deriuatiuæ & quomodo eruantur.

11 Duplex eſt genus radicum: aliæ enim ſunt primitiuæ aliæ vero deriuatiuæ: primitiuæ ſunt illæ quæ immediatè eruuntur ex numero dato, vt ſunt illæ quas mox elicuimus: deriuatiuæ autem ſunt illæ quæ ex primitiuis oriuntur: & quidem ſi ex primitiuis immediatè oriuntur, ſunt deriuatiuæ primi gradus: ſi eliciũtur ex deriuatiuis primi gradus, erunt deriuatiuæ ſecundi gradus: ſi eliciuntur ex deriuatiuis ſecundi gradus, dicentur deriuatiuæ tertij gradus, & ſic in infinitum. Aduerte autem ex radicibus fictis poſſe elici veras, & ex veris fictas, vti ex ſequentibus manifeſtum erit.

Eruere radices deriuatiuas primi gradus ex quacumque primitiua.

12 Iunge 1 N. radici primitiuæ cum ſuo ſigno, ſiue habeat plus, ſiue habeat minus, illud conflatum ſumatur pro radice noua & iuxta illam reſoluantur ſingulæ particulæ componentes numerum datum: omnium illorum ſumma æquetur quadrato fingendo illius latus, vt dictum eſt valorque repertus nectatur radici primitiuæ, ita extabit radix quæſita, vt ſi eruenda ſit radix deriuatiua primi gradus ex numero ſupradicto 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1. cape − 3 vnam ex primitiuis radicibus, & necte cum 1 N. vt fiat 1 N − 3. tum iuxta 1 N − 3 reſolues 1 QQ & 4 C. & 10 Q. & 20 N. quibus nectes numerum vnitatum vt hic vides.

1 QQ	+ 1 QQ	− 12 C	+ 54 Q	− 108 N	+ 81
4 C		+ 4 C	− 36 Q	+ 108 N	− 108
10 Q			+ 10 Q	− 60 N	+ 90
20 N				20 N	− 60
1					+ 1
ſumma	+ 1 QQ	− 8 C	+ 28 Q	− 40 N	+ 4

13 Hæc ſumma æquari debet quadrato: finge latus 1 Q − 4 N − 2 & fiet pro valore radicis in iſta ſumma $\frac{7}{2}$ & quia poſita eſt noua radix 1 N. − 3 ex $\frac{7}{2}$ tolles 3. reſtabitque $\frac{1}{2}$ pro valore radicis in numero dato, quare iuxta iſtam reſolutus numerus datus erit $\frac{225}{16}$ quadratus à latere $\frac{15}{4}$.

14 Eandem ſummam quadrato æquabis fingendo latus 1 Q − 10 N + 2. eius enim quadratum æquatum prædictæ ſummæ, dabit $\frac{19}{3}$ pro valore radicis in ſumma, vnde ſi tollas 3. reſtabit $\frac{10}{3}$ pro valore radicis in numero dato, ergo numerus datus erit $\frac{36481}{81}$ quadratus à latere $\frac{191}{9}$.

15 Rurſus finge latus 2 − 10 N − 1 Q & fiet valor pro ſumma $-\frac{17}{7}$ & tollendo 3 extabit valor radicis pro numero dato $-\frac{38}{7}$ igitur iuxta hunc valorem reſolutus numerus datus exhibebit $\frac{998001}{2401}$. quadratus à latere $\frac{999}{49}$.

16 Quarto finge latus 2 − 10 N − 18 Q & fiet valor $\frac{368}{323}$ pro ſumma, vnde ſi tollas 3. fit valor pro numero dato $\frac{1337}{323}$.

Posset etiam fingi latus 1 Q + 2 − 4 N vel 4 N − 2 − 1 Q. sed vtrinque ex illa æquatione proueniret 3 pro summa prædicta & pro numero dato proueniret, 0, quod est friuolum, & ad institutum nostrum inutile.

Dixi præterea vnam ex radicibus primitiuis esse − 4. ex hac sic erues deriuatiuas re- 17
solues primo numerum datum 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 iuxta nouam radicem 1 N − 4. vt factum est primitus in resolutione eiusdem numeri iuxta radicem 1 N − 3 & fiet summa 1 QQ − 12 C + 58 Q − 124 N + 81 æquanda quadrato finge latus 1 Q + 9 − 6 N & fiet valor pro numero dato [illegible]. Finge aliud latus 1 Q + 9 − [illegible] & fiet valor [illegible]. Finge tertium latus 9 − [illegible] + [illegible] & fiet valor [illegible]. iterum finge latus 9 − [illegible] − 1 Q & fiet valor − [illegible] potuit rursus fingi latus 1 Q + 9 − 6 N. vel 6 N − 9 − 1 Q. sed inde fieret valor pro summa facta 4. & pro numero dato, 0. quod est inutile ad rem nostram.

Dictum est insuper vnam ex radicibus primitiuis numeri dati esse − $\frac{23}{4}$ igitur noua ra- 18
dix erit 1 N − $\frac{23}{4}$ iuxta quam resolutus numerus datus, vt fecimus supra dabit summam 1 QQ − 19 C + [illegible] [illegible] + [illegible]. æquandam quadrato. Finge latus 1 Q − [illegible] − [illegible] & fiet valor [illegible]. ex alio latere 1 Q + [illegible] [illegible] prodibit valor [illegible] ex ficto latere 1 Q + [illegible] − [illegible]. prodit valor [illegible]. Iterum prodibit alius valor ex ficto latere [illegible] − [illegible] + [illegible].

Atque hoc quidem de radicibus primitiuis quæ habent signum minus; eodem au- 19
tem modo agendum [illegible] iis quæ habent signum plus; vt quia diximus 1 esse vnam radicem primitiuam, fingenda erit noua radix 1 N + 1. & iuxta illam resoluendus numerus datus, habebiturque summa æquanda quadrato 1 QQ + 8 C + 28 Q + 56 N. + 36. finge latus 1 Q + 6 + [illegible]. & prodibit valor − [illegible]. finge aliud latus 1 Q − 6 − [illegible]. & fiet valor − [illegible]. tertio si fingas latus 6 + [illegible] + [illegible] extabit valor [illegible].

Rursus vna ex primitiuis radicibus est [illegible]. igitur si capias pro noua radice 1 N + [illegible]. & 20
juxta eam resoluas numerum datum vt dictum est n. 12. fiet summa 1 QQ + [illegible] + [illegible] + [illegible] + [illegible] æquanda quadrato. Finge latus 1 Q + [illegible] + [illegible] & fiet valor [illegible] finge aliud latus [illegible] − [illegible] − 1 QQ & fiet valor [illegible] finge aliud latus 1 Q + [illegible] + [illegible] & fiet valor 1. finge aliud latus [illegible] + [illegible] − 1 Q. & fit valor [illegible].

Pari modo ex vltima radice primitiua habente signum plus, fiet noua radix 1 N + 21
[illegible]. secundum quam resolutæ particulæ numeri dati exhibebunt summam æquandam quadrato, & fingendo diuersa latera vt hactenus factum est habebuntur noui valores.

Eruere radices deriuatiuas secundi gradus & tertij & quarti, & sic in infinitum.

Sicut ex radicibus primitiuis elicuimus deriuatiuas primi gradus ita ex deriuatiuis 22
primi gradus elici possunt deriuatiuæ secundi, vt quia vna ex deriuatiuis primi gradus est $\frac{1}{2}$ capienda erit noua radix 1 N + $\frac{1}{2}$ & juxta eam resoluendus numerus datus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 summa ex hac resolutione nata 1 QQ + 6 C + $\frac{35}{2}$ + $\frac{67N}{2}$ + $\frac{225}{16}$ æquanda est quadrato, finge latus 1 Q + 3 N + $\frac{17}{4}$ eritque radix deriuatiua secundi gradus quia nascitur ex radice deriuatiua primi gradus.

Non aliter ex ista poteris eruere aliam ponendo pro noua radice 1 N − [illegible] siquidem 23
iuxta eam resolutæ singulæ particulæ numeri dati faciunt 1 QQ − 38 C + [illegible] − [illegible] + [illegible] hæc summa æquanda erit quadrato. Finge latus 1 Q − 19 N − [illegible] & fiet valor pro summa [illegible] vnde si tollas [illegible]. relinquetur valor pro numero dato [illegible] estque radix deriuatiua tertij gradus quia prodit ex radice deriuatiua gradus secundi. Ita poteris elicere radicem deriuatiuam gradus quarti, quinti, sexti, & sic in infinitum.

Quadrato æquare numerum compositum ex quatuor speciebus, dum numerus vnitatum vel quadrato-quadratorum, quadratus est.

24 Sint 20 C + 5 Q + 40 N. + 16 æquandi quadrato. Finge latus 4 + 5 N. & numerus radicum & vnitatum idem fiat ex vtraque parte, & fiet 1 pro valore radicis: hoc posito inuenies radicem deriuatiuam, ponendo vt supra, pro noua radice 1 N + 1 & iuxta illam resoluendo numerum primarium 20 C + 40 N + 16. vt sæpius factum est, summa enim ex hac resolutione nata 20 C + 65 Q + 110. N + 81 æquari debet quadrato, fingendo latus 9 + $\frac{55N}{9}$ & fiet valor pro summa — $\frac{112}{81}$. & pro numero primario — $\frac{31}{81}$. tertio ex hac deriuatiua primi gradus perges ad deriuatiuam secundi gradus fingendo pro noua radice 1 N. — $\frac{112}{81}$. & juxta illam resoluendo singulas particulas numeri primarij, ita enim fiet noua summa æquanda quadrato, & finges latus quadrati $\frac{401}{729}$ — $\frac{147495N}{3609}$ & proueniet radix deriuatiua secundi gradus + [illegible].

25 Esto jam numerus quadrato-quadratorum quadratus, & sic æquandum quadrato 1 QQ + 4 C — 3 Q + 2 N. finge latus 1 Q + 2 N. vt duo majores characteres elidantur & fiant 7 Q. æquales 2 N. ita fiet valor $\frac{2}{7}$ (propter vnitatem quæ est altera radix eiusdem numeri) ergo potest poni noua radix 1 N + $\frac{2}{7}$ vel 1 N + 1 pro radicibus deriuatiuis.

25 Tertio licet omittatur aliqua species intermedia, potest numerus compositus ex quatuor speciebus quadrato æquari: ita æquabis 16 + 24 N + 16 C + 5 QQ fingendo latus 4 + 3 Q. & fiet valor 4. Vnde pro deriuatiua poterit poni 1 N + 4 simili ratione si detur 1 QQ + 600. + 800 N + 50000. finges latus quadrati 1 Q + 300 extabitque valor 5. & poni poterit pro radice deriuatiua 1 N + 5.

Potest æquari cubo numerus compositus ex quatuor speciebus modo numerus vnitatum vel cuborum sit cubus.

26 Enimuero si vnitatum numerus cubus est sumpto eius latere cubico pro numero absoluto radicis fictæ, diuides radices quæ sunt in termino æquando per triplum quadratum prædicti lateris cubici & ita componetur radix ficta ex latere & quotiente prædicto cum signis debitis: vt si detur æquandus quadrato 2 C. + 1 Q + 3 N + 1. finges pro latere 1 + 1 N (est enim 1 latus cubicum vnitatis, 1 N. autem est quotiens natus ex diuisione 3 N. per 3. triplum quadratum vnitatis) ergo cubus illius 1 C + 3 Q + 3 N + 1 æquatus numero dato, exhibet 2 pro valore radicis vnde per radicem deriuatiuam poteris assumere 1 N. + 2. pro noua radice.

27 Quod si numerus cuborum est sumpto eius latere diuides numerum quadratorum per triplum quadratum illius lateris & fiet altera pars eligenda: vt si detur æquandus cubo 8 C + 24 Q + 2 N + 48. finges latus 2 N + 2 (est enim 2 N latus cubicum 8 C. 2 vero est quotiens ortus ex diuisione 24 per 12 triplum quadratum numeri 2.) eius cubus 8 C + 24 Q + 24 N. + 8. æquatus dato numero exhibet $\frac{20}{11}$ pro valore radicis, vnde facile est colligere radices deriuatiuas.

Si vterque numerus tam vnitatum quam cuborum cubus eſt, poteſt triplici modo æquari cubo numerus datus.

Detur enim verbi gratia 1 C + 2 Q + 4 N. 1 æquandus cubo & capiatur 1 N + 1 pro latere; hoc eſt latus cubicum vtriuſque cubi; ergo eius cubus 1 C + 3 Q + 3 N + 1 æquatur numero dato, & fit 1 pro valore, rurſus poteſt ſumi pro latere 1 N + $\frac{2}{3}$ vt elidantur duæ ſpecies maiores reſtentque tantum minores inter ſe æquandæ, & ſic habebitur valor − $\frac{19}{72}$. denique ſumi poteſt 1 + $\frac{4N}{3}$. vt reſtet tantum æqualitas facienda inter maiores ſpecies atque ita extabit valor − $\frac{90}{37}$ ex his porro tribus radicibus primitiuis eliciantur deriuatiuæ, vt ſæpius factitatum eſt. 29

Cautio circa prædicta.

Aliquando contingit vt numerus compoſitus ex quatuor ſpeciebus, quarum vna eſt cubus, vel duæ ſunt cubi, non poſſit cubo æquari, cum poſt reductionem relinquuntur tres ſpecies æquandæ inter ſe vel dum reſtat vnica ſpecies æquanda nihilo: vt ſi detur 1 + 3 N + 3 Q + 4 C non poteſt in eo caſu aliter procedi quam ſi fingatur latus 1 + 1 N. at in iſto caſu relinquuntur 3 C æquales nihilo: igitur tunc non poteſt numerus datus æquari cubo. Item ſi detur 1 + 2 Q + 3 N + 1 C. inueniri tantum poteſt vna radix immediatè & primitus, ponendo pro latere ficto 1 N + $\frac{2}{3}$ nam ſi poneretur 1 N. + 1 reſtaret 1 Q æquale nihilo. Propter aliquam ex his rationibus non poſſunt æquari cubo numeri ſequentes 1 − 3 Q − 3 N − 1 C 1 − 3 Q + 3 N + 1 C. vnica enim ſpecies reſtaret nihilo æqualis. 30

Quæſtiones duodecim circa ea quæ dicta ſunt in hac tertia parte.

Quæ hactenus dicta ſunt, vberem præbent materiam ex qua tanquam ex auri fodina eruere poſſis Theſaurum infinitum problematum: vt ſi quis poſtulet numerum, cuius vigecuplum additum decem ipſius quadratis & quatuor ipſius cubis, & vni ipſius quadrato-quadrato atque inſuper vnitati faciat quadratum, velit autem numerum poſtulatum majorem eſſe octonario & denario minorem, oportebit neceſſario elicere primum radicem primitiuam − 3. & ex illa deriuatiuam primi gradus + $\frac{1}{3}$ inde deriuatiuam ſecundi gradus − $\frac{11}{3}$. atque ex hac deriuatiuam tertij gradus $\frac{127}{13}$ quæ ſatisfacit omnibus poſtulatis in problemate, vt iam ſupra eſt oſtenſum num. 23. ſed lubet alias quæſtiones ſoluere. 31

Inuenire in numeris rationalibus integris triangulum rectangulum, cuius hypotenuſa & ſumma laterum circa rectum ſit numerus quadratus.

Iam ſolutum eſt illud problema im prima parte num. 45. per duplicatas æqualitates, 32

ſed quia ſolui poteſt per numerum ex quinque ſpeciebus compoſitum lubet etiam illud aggredi. Formo triangulum ex 1 N + 5 & 12. per ea quæ dicta ſunt loco citato: igitur latera ſunt 1 Q + 10 N + 169. 1 Q − 119 + 10 N. 24 N + 120, hypotenuſa ergo 1 Q + 10 N. + 169. & ſumma laterum 1 Q + 34 N + 169 æquantur quadrato, finge latus 13 + $\frac{2878 N}{14}$ − 1 Q. & fiet valor $\frac{2648075}{205666}$. & iuxta poſitiones trianguli quæſiti latera 106165229352o. 4565486027761. 468729861o289. eadem cum ſuperioribus.

Inuenire triangulum rectangulum ita vt ſumma hypotenuſæ & alterius lateris circa rectum relinquens aream faciat datum numerum.

33 Eſto datus 4 ac primum inueniatur triangulum rectangulum ita vt quadratus ſemiſſis ſummæ ex hypotenuſa & vno latere relinquens quadruplum areæ faciat quadratum. Formetur triangulum iſtud rectangulum ab 1 N + 1 & 1 N. ergo latera erunt 2 Q + 1 + 2 N. 1 + 2 N. 2 Q + 2 N. ſumma hypotenuſæ & lateris ſequentis eſt 2 Q + 2 + 4 N. huius ſemiſſis 1 Q + 1 + 2 N. cuius quadratum 1 QQ + 4 C + 6 Q + 4 N + 1. relinquens quadruplam aream 8 C + 12 Q + 4 N. facit 1 QQ − 4 C − 6 Q + 1 æquandum quadrato. Finge latus 1 Q + 1 − 2 N & fit quadratus 1 QQ − 4 C + 6 Q − 4 N + 1 qui æquatus 1 QQ − 4 C − 6 Q + 1 dat valorem $\frac{1}{3}$. ergo iuxta poſitiones, numeri duo à quibus formabitur triangulum, erunt $\frac{4}{3}$ & $\frac{1}{3}$ & ſumendo ſolos numeratores 4 & 1. inde formabis triangulum 17. 15. 8. his necte characterem radicum vt fiant latera trianguli quæſiti 17 N. 15 N. 8 N. ergo 32 N − 60 Q æquatur 4 & fiet 1 N $\frac{1}{3}$. & trianguli quæſiti latera tria $\frac{17}{3}$ $\frac{15}{3}$ $\frac{8}{3}$ & ſatisfaciunt quæſtioni. Hanc quæſtionem omiſit Diophantus poſt 10 & 11. libri 6.

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum ſit numerus quadratus qui iunctus dato multiplici alterius lateris circa rectum facit quadratum.

34 Iubeatur numerum quadratum triplo alterius lateris iunctum facere quadratum & formetur triangulum ab 1 + 1 N & 1 latera erunt 2 + 1 Q + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 + 2 N. triplum poſtremi iſtius lateris eſt 6 + 6 N. cui ſi addas medium latus fiet ſumma 1 Q + 8 N + 6. æquanda quadrato, ſicut etiam medium latus quadrato æquandum eſt, duc ſummam illam 1 Q + 8 N. + 6 in medium latus 1 Q + 2 N & fiet productus 1 QQ + 10 C + 22 Q + 12 N. æquandus quadrato, finge latus 1 Q + 5 N − $\frac{1}{2}$ ergo eius quadratum 1 QQ + 10 C + 22 Q − 15 N + $\frac{1}{4}$ illi æquatum dabi[illegible]. pro valore radicis, & iuxta poſitiones fiet triangulum quæſitum in integris 313. 25. 312. potuit inueniri ſolutio per duplam æqualitatem inter 1 Q + 8 N + 6 & 1 Q + 2 N.

Inuenire

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum sit numerus quadratus qui multatus dato multiplici alterius circa rectum relinquat quadratum.

Iam dedimus solutionem istius problematis 1 p. n. 47. sed per aliam metho- 35
dum. Ergo jubeatur numerum quadratum multatum triplo alterius relinquere quadratum & capiatur pro triangulo primitiuo, illud quod mox inuentum est in quæstione præcedenti nempe 313. 25. 312. quod formatur ab 13. & 12. formeturque triangulum quæsitum ab 1 N − 13 & 12 erunt latera 1 Q − 26 N + 313. 1 Q − 26 N + 25. 24 N − 312. ergo huius postremi triplum subtractum ex medio relinquit 1 Q + 961 − 98 N æquandum quadrato, sed medium latus 1 Q − 26 N. + 25 est æquandum quadrato. Igitur horum duorum productus 1 QQ − 124 C + 3534 Q − 27436 N + 24025. æquandus erit quadrato, finge latus 1 Q − [illegible] + 155 huius quadratum priori numero est æquandum & fit valor [illegible] ergo 1 N 13 & 12 relicto denominatore erunt 23542921 & 3820440 ex his formatum triangulum erit illud quod postulatur 568864871005841. 539673367418641. 179888634210480. & satisfacit quæstioni.

Inuenire triangulum rectangulum cuius hypotenusa sit numerus quadratus & datus multiplex vnius lateris circa rectum detractus alteri lateri faciat etiam quadratum. Multiplex sit duplus.

Pone 1 + 1 N & 1 pro numeris vnde formatur triangulum: Ita enim latera erunt 2 36
+ 1 Q + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 + 2 N. ergo 1 Q 2 + 2 N. erit quadratum & residuum dupli lateris postremi ex medio subtracti nempe 1 Q − 4 − 2 N. erit iterum quadratum & fit ex ista duplicatâ æqualitate valor − [illegible] ergo 1 N + & 1 erunt − [illegible] [illegible] & acceptis numeratoribus solis habebis − 5 & 12. vnde formatur triangulum primitiuum 169 119. 120. quare iteranda erit operatio & ponendi numeri ex quibus formatur triangulum 1 N − 5 & 12. ergo latera erunt 1 Q + 169 − 10 N. 1 Q − 10 N − 119. 24 N − 120 ac proinde si duplum postremi lateris 48 N − 240 tollatur à medio, erit residuum 1 Q + 121 − 58 N æquandum quadrato, sicut & hypotenusa 1 Q + 169 − 10 N. horum duorum productus 1 QQ − 68 C + 870 Q − 11012 N + 20449 est æquandus quadrato, finge latus 143 − [illegible] + 1 Q & fit valor [illegible]. Verum lubet etiam alia via rem aggredi, reducantur illi duo termini ad eundem vnitatum quadratum & fient [illegible] + 169 − [illegible] & 1 Q + 16 Q − 10 æquandi quadratis. Differentia illorum est [illegible] − [illegible]. duo producentes eligantur [illegible] & [illegible] − [illegible] (per ea quæ dicta sunt in primâ parte num. 21. & sequentibus) & fiet valor [illegible]. & iuxta positiones, triangulum quæsitum erit in integris 19343046113329. 18732418687921. 4821817400400.

Inuenire duos numeros quorum ſumma ducta in ſummam quadratorum ab ipſis ortorum, faciat cubum.

37 Sint duo numeri quæſiti 1 N & 2 − 1 N. ergo ſumma 2 ducta in ſummam quadratorum 2 Q + 4 − 4 N facit 4 Q + 8 − N. æquandum cubo. Finge latus cubi $2 - \frac{2N}{3}$ eius cubus æquatus 4 Q + 8 − 8 N dabit $-\frac{9}{2}$. quare pono rurſus pro nouâ radice 1 N − $\frac{9}{2}$ iuxta quam reſoluo ſingulas particulas numeri ſuperioris 4 Q + 8 − 8 N & fit nouus terminus 4 Q + 125 − 44 N æquandus cubo. Finge latus cubi $5 - \frac{44N}{75}$. ergo eius cubus 125 − 44 N + [illegible] − $\frac{85184C}{421875}$. æquandus eſt 4 Q + 125 − 44 N. & valor extat $\frac{490500}{85184}$ vnde ſi tollas $\frac{9}{2}$ ob nouam radicem 1 N − $\frac{9}{2}$ habebis valorem pro primis poſitionibus $\frac{26793}{21296}$ hunc tolle à 2 iuxta poſitiones & fiet ſecundus numerus quæſitus $\frac{15799}{21296}$. Aduerte primo ſolos numeratores ſoluere quæſtionem nempe *26793*. & *15799*. Aduerte ſecundo hinc ſolui problema ſequens. Diuidere numerum 2. in duos taliter vt ſumma quadratorum duplicata ſit cubus. Aduerte tertio indidem ſolui aliam quæſtionem, nempe inuenire duos numeros, vt ſumma quadratorum per quemcumque numerum multiplicata fiat cubus, vt ſi cuperes ſummam quadratorum quintuplicatam facere cubum poneres 1 N. & 5 − 1 N & procederes vt ſupra: Aduerte denique hinc ſolui pulcherrimum problema nempe. Inuenire duos numeros quorum differentiæ ſit æqualis differentia quadratoquadratorum: nam ſi capias duos numeros ſuprà inuentos *26793* & *15799*. & iis ſupponas pro denominatore communi, latus cubi facti ex ſumma eorum in ſummam quadratorum quod quidem latus eſt 34540 fient duo numeri quæſiti, $\frac{26793}{34540}$ $\frac{15799}{34540}$.

Inuenire duo triangula rectangula quæ habeant eandem differentiam minorum laterum & talia vt in vno eorum maius latus circa rectum æquetur hypotenuſæ alterius.

38 Formetur primum triangulum ab 1 N & 1 latera ſunt 1 Q + 1. 1 Q − 1. 2 N. ergo ſecundi trianguli maius latus circa rectum erit 1 Q + 1. inde ſi tollas differentiam duorum minorum laterum primi, quæ eſt 1 Q − 1 − 2 N. fiet minus latus circa rectum ſecundi 2 N + 2, reſtat igitur vt duo quadrata quæ naſcuntur ab 1 Q + 1 & 2 N + 2 ſimul iuncta faciant quadratum. Horum ergo ſumma 1 QQ + *6* Q + 8 N + 5. æquanda eſt quadrato. Finge latus 1 Q + *3*. igitur quadratum illius lateris 1 QQ + *6* Q + *6* æquatur 1 QQ + *6* Q + 8 N + 5 & fit 1 N. æqualis $\frac{1}{2}$ & iuxta poſitiones numeri à quibus formatur triangulum, in integris, abjecto videlicet denominatore, ſunt 1 & 2. at primus numerus minor eſt ſecundo. Proinde in formatione trianguli occurrerent numeri ficti, quod eſt abſurdum, quare vt huic incommodo remedium adferamus redintegranda eſt operatio & formandum triangulum ab 1 N + 1 & 2, igitur latera erunt 1 Q + 5 + 2 N. 1 Q + 2 N − 3. 4 N + 4. pro primo triangulo: & pro ſecundo latere minore erunt 1 Q + 2 N + 5 & 4 N + 12. horum duorum quadrata ſimul juncta faciunt ſummam 1 QQ + 4 C + 30 Q + 116 N + *169*. æquandam quadrato, huius quadrati latus fingi poteſt multipliciter, finge illud 10 + $\frac{58N}{13}$ − 1 Q eius quadratum priori ſummæ æquatum dat pro valore radicis − [illegible] ergo numeri à quibus formatum eſt triangulum, juxta poſitiones, in integris abjecto denominatore erunt − *979* &

1092. vtere iis numeris per inde ac si nullus esset fictus & forma triangulum ab 1092 & 979, fientque duo triangula quæsita 2150905. 2138136. 234023. & 2165017. 2150905. 246792. & satisfaciunt quæstioni.

Inuenire duo triangula rectangula in quorum vtroque summa laterum circa rectum sit æqualis & talia vt hypotenusa vnius sit æqualis maiori lateri circa rectum alterius.

Formetur primum triangulum ab 1 N + 1 & 1 latera erunt 1 Q + 2 + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 N + 2. ergo hypotenusa 1 Q + 2 + 2 N. erit maius latus secundi trianguli quo sublato ex summa laterum circa rectum primi restabit 2 N pro altero latere circa rectum secundi. Igitur horum duorum laterum quadrata simul sumpta 1 QQ + 4 C + 124 + 8 N + 4 æquantur quadrato. Finge latus 14 + 2 N + 4 & eius quadratum 1 QQ + 4 C + 12 Q + 16 N + 16 æquetur priori fietque valor radicis $-\frac{3}{2}$. & cape ergo pro noua radice 1 N $-\frac{3}{2}$ & iuxta illam resolue singulas particulas numeri prædicti 1 QQ + 4 C + 12 Q + 8 N + 4. fietque nouus terminus 1 QQ − 2 C + $\frac{15Q}{2}$ − $\frac{19N}{2}$ + $\frac{169}{16}$ æquandus quadrato, finge latus $\frac{13}{4}$ − $\frac{19N}{13}$ + 1 Q & fiet valor $\frac{21}{13}$ pro isto nouo termino, vnde si tollas $\frac{3}{2}$ fiet valor pro primis positionibus $\frac{3}{26}$ igitur 1 N + 1 & 1 in integris, abjecto denominatore erunt 29 & 26. à quibus formabis triangulum primum quæsitum 1517. 165. 1508. & inde nascetur secundum 1525. 1517. 156. Aliter ex $-\frac{3}{2}$ supra inuentis potuit inueniri solutio applicando illam radicem 1 N + 1 & 1. ita enim in integris fient 1 & 2 quare ponendi sunt numeri formantes triangulum 1 N − 1 & 2 & redintegranda operatio, ita enim latera primi trianguli erunt 1 Q + 5 − 2 N. 1 Q − 3 − 2 N. 4 N − 4. & latera circa rectum secundi 1 Q + 5 − 2 N & 4 N. − 12. horum quadrata simul addita 1 QQ − 4 C + 30 Q 116 N + 169 æquantur quadrato, finge latus 13 − $\frac{18N}{13}$ + 1 Q & fiet valor $\frac{81}{29}$. ergo 1 N − 1 & 2 in integris erunt 29 & 26 vt supra, vnde formabuntur eadem triangula. 39

Inuenire triangulum rectangulum cuius hypotenusa sit numerus quadratus & datus multiplex vnius lateris circa rectum additus alteri lateri faciat quadratum.

Detur multiplex duplus & formetur triangulum quæsitum ab 1 N & 1 latera sunt 1 Q + 1. 1 Q − 12 N. duplum posterioris lateris 4 N addatur priori lateri circa rectum & & fiet 1 Q − 1 + 4 N æquandus quadrato sicut & hypotenusa 1 Q + 1 horum differentia est 2 − 4 N & fit valor radicis $\frac{1}{2}$, debet autem 1 N esse maior vnitate; ergo iteranda est operatio & formandum triangulum ab 1 N + 5 & 12. latera sunt 1 Q + 169 + 10 N. 1 Q − 119 + 10 N. 24 N + 120. duplum istius postremi lateris 48 N + 240 additum medio facit 1 Q + 121 + 58 N. æquandum quadrato & est etiam hypotenusa 1 Q + 16 Q + 10 N. æquanda quadrato horum duorum productus 1 QQ + 68 C + 870 Q + 1102 N + 20449 æquandus quadrato. Finge latus 143 + $\frac{1504N}{143}$ − $\frac{6262010}{1924107}$ & fit valor radicis $\frac{1909713009641496}{1067046618736}$ ergo numeri formantes triangulũ in integris erunt 2145082341079296 & 3680455474448320. vnde triangulum ipsum non latebit. 40

Inuenire quadrato-quadratum cuius triplum additum alteri quadrato-quadrato quam vnitati, faciat quadratum.

41 Iubetur addi alteri quadrato-quadrato quam vnitati quia alioqui res esset perfacilis, nam triplum vnitatis additum vnitati facit 4. Item triplum quadratoquadratum 16 additum vnitati facit 49. pone ergo latus quadrato-quadrati quæsiti 1 N − 1 cuius quadrato-quadratum 1 QQ − 4 C + 6 Q − 4 N + 1. triplicatum & additum 1 QQ facit 4 QQ − 12 C + 18 Q − 12 N + 3 æquandum quadrato, finge latus quadrati 2 Q − 3 N + $\frac{9}{4}$. & fiet valor $\frac{11}{8}$. ergo iuxta positiones latus quadratoquadrati erit in integris 3 cuius quadrato-quadratum 81 triplicatum & additum quadrato-quadrato numeratoris 11. nempe 14641 facit 14884. quadratum à latere 122. similiter capiendo duplum 3. nempe 6. eius quadrato quadratum triplicatum additum quadrato-quadrato 22 (hoc est dupli 11) facit 238144 quadratum à latere 488 rursus capiendo triplum 3 nempe 9 eius quadrato-quadratum triplicatum & additum quadrato-quadrato 33 (hoc est tripli 11) facit 1205604 quadratum à latere 1098. & sic in infinitum.

Inuenire triangulum rectangulum in quo quadratum hypotenusæ additum dato multiplici areæ faciat quadratum.

42 Detur duplum areæ & formetur triangulum ab 1 N & 1 latera sunt 1 Q + 1. 1 Q − 1. 2 N. quadratum hypotenusæ est 1 QQ + 2 Q + 1 cui additum duplum areæ 2 C − 2 N. facit 1 QQ + 2 C + 2 Q − 2 N + 1 æquandum quadrato finge latus 1 Q + 1 + $\frac{1}{2}$ & fiet $\frac{1}{4}$ pro valore radicis at $\frac{1}{4}$ non est maior 1 ergo non potest inde formari triangulum quin habeantur numeri ficti, quare iteranda est operatio & ponendo pro noua radice 1 N + $\frac{1}{4}$ iuxta quam si resoluantur singulæ particulæ numeri mox quadrato æquati fiet nouus terminus 1 QQ + 3 C + $\frac{31 Q}{8}$ $\frac{9 N}{16}$ + $\frac{169}{256}$ quadrato æquandus finge latus $\frac{13}{16}$ − $\frac{9 N}{26}$ + $\frac{5077 Q}{2197}$ & fiet valor radicis $\frac{20512532}{20949120}$ huic adde $\frac{1}{4}$ ob nouam radicem, & fiet valor pro primis positionibus $\frac{6437453}{5237280}$ quare duo numeri à quibus formabitur rectangulum triangulum erunt in integris 6437453 & 5237280. in vnico casu problema est impossibile.

Inuenire triangulum rectangulum in quo area detracta ex quadrato vnius lateris circa rectum faciat quadratum.

43 Formetur illud triangulum ab 1 N − 1 & 4. latera sunt 1 Q + 17 − 2 N. 1 Q − 15 − 2 N. 8 N − 8. eius area 4 C − 12 Q − 52 N + 60 sublata ex quadrato secundi lateris, quod est 1 QQ − 4 C − 26 Q + 60 N + 225. relinquit 1 QQ − 8 C − 14 Q + 112 N + 165 æquandũ quadrato, finge latus 1 Q − 4 N − 15. & fit valor radicis − $\frac{15}{2}$ quare pono nouam radicem 1 N − $\frac{15}{2}$. & iuxta illam resoluo singulas particulas termini quadrato æquati, fitque nouus terminus æquandus quadrato 1 QQ − 38 C + $\frac{1007 Q}{2}$ − $\frac{5431 N}{2}$ + $\frac{81225}{16}$. Finge latus 1 Q − 19 N − $\frac{285}{4}$ & fit valor $\frac{5423}{285}$ vnde si tollas $\frac{15}{2}$ ob nouam radicem, & ex residuo vnitatem, ob positionem restabunt duo numeri formantes triangulum in integris 6001 & 2280. igitur triangulum quæsitum est 41210401. 30813601. 27364560.

CLAVDII



CLAVDII GASPARIS BACHETI SEBVSIANI,

IN DIOPHANTVM PORISMATVM,

LIBER PRIMVS.

PROPOSITIO PRIMA.

SI duobus æqualibus numeris inæquales duo adiiciantur, erit compositorum minor ratio quàm adiectorum.

Sint æquales numeri A B. C D. quibus addantur inæquales B E maior, & D F minor. Dico minorem esse rationem A E ad C F quàm B E ad D F. Quoniam enim A B & C D sunt æquales [a] minor erit ratio ipsius A B ad maiorem B E, quàm ipsius C D ad minorem D F. igitur & componendo [b], minor est ratio A E ad B E quàm C F ad D F. Quare & vicissim [c] minor est ratio A F ad C F quàm B F ad D F. Quod demonstrandum erat.

A.....B...E
C.....D..F

[a] octaua, quinti. [b] vigesima octaua, quinti. [c] vigesima septima, quinti.

PROPOSITIO II.

Si fuerint quotlibet numeri continuè proportionales, planus sub extremis æquatur plano sub duobus quibuslibet ab extremis æqualiter distantibus, atque etiam quadrato medij, si multitudo numerorum fuerit impar.

A 2. B 4. C 8. D 16. E 32. F 64.

Sint quotlibet numeri A B C D E F continuè proportionales & numero pari, dico primo planum sub A F. æqualem esse tum plano sub B E, tum plano sub C D. Quia enim est A ad B vt E ad F ex hypothesi [a] fiet idem numerus ex primo A in quartum F qui fit ex secundo B in tertium E. Similiter quia est B ad C vt D ad E [b] fiet idem numerus ex primo B in quartum E qui fit ex secundo C in tertium D seu idem qui fit ex A in F. Igitur plani sub A F sub B E sub C D sunt æquales. Quod erat propositum.

Deinde considerentur tantum numeri A B C D E multitudine impari. Dico planum sub A E æquari tum plano sub B D. tum quadrato ipsius C. Nam vt prius quia est A ad B vt D ad E. [c] planus sub A E æquatur plano sub B D. sed quia est vt B ad C. ita C ad D [d] planus sub B D. æquatur quadrato ipsius C. Igitur planus sub A E planus sub B D. & quadratus ipsius C æquales sunt inter se. Quod demonstrandum erat.

[a] decima nona, 7. [b] decima nona, 7. [c] decima nona, 7. [d] vigesima, 7.

PROPOSITIO III.

Si tres, plures ve numeri inter se multiplicentur, idem semper procreabitur numerus, quomodocunque & quouis ordine seruato fiat multiplicatio.

Quod ostendit Euclides de duobus numeris inter se multiplicatis decimasexta 7. id in vniuersum de tribus pluribus ve hic ostendetur. Tres autem, plures ve numeri inter se multiplicari dicuntur, cùm vnus ex illis ducitur in alium, tum productus in alium, & rursus productus in alium, & ita deinceps, donec omnes multiplicati sint.

A 2. B 3. C 4.
D 6. H 8. F 12.
E 24. K 24. G 24.

Sint ergo tres numeri A B C. ductoque A in B fiat D. quo ducto in C fiat E. Rursus ordine mutato, ducatur B in C & fiat F, quo ducto in A fiat G. Denique mutato rursus ordine ducatur A in C & fiat H, quo ducto in B. fiat K. (tot enim modis ordo variari potest.) Dico tria producta E K G inter se esse æqualia. Quia enim B ductus in vtrosque A C. producit ipsos D F [a] erit A ad C vt D ad F. [b] Igitur productus ex A in F nempe G. æquatur producto ex C in D nempe ipsi E. Similiter quia idem C ductus in vtrumque A & B producit ipsos H F. erit A ad B vt H ad F. Igitur qui fit ex A in F nempe

[a] decima septima 7. [b] decima nona, 7.

G. æquatur ei qui fit ex B in H nempe ipsi K. Quamobrem constat tres E K G. æquales esse inter se. Quod erat propositum.

E 24. F 60.
A 2. B 3. C 4. D 5.
G 12.
K 120. H 120.

Deinde sint quatuor numeri A B C D. & tribus A B C inter se ductis fiat E quo ducto in reliquum D fiat K. Tum mutato ordine, & tribus B C D inter se ductis fiat F. quo ducto in reliquum A fiat H. Dico ipsos K & H æquales esse inter se, & semper eundem produci numerum quomodocumque aliter ordine mutato iidem A B C D inter se multiplicentur. Quia enim sumendo ternos A B C. tum ternos B C D. duo B C vtrique sumptioni communes sunt, productus ex B in C esto G. patet ergo ex demonstratis in tribus numeris ex G in A produci E, & ex G in D, produci F. Quare [a] vt E ad F sic est A ad D. [b] Igitur qui fit ex E in D, nempe H, æquatur ei qui fit ex F in A nempe ipsi K. similiter quomodocumque sumantur tres ex iisdem quatuor numeris, duo ex illis reperientur in qualibet alia trium sumptione. Quare licebit eodem argumento propositum concludere.

[a] decima septima 7. [b] decima nona, 7.

Eodem modo si sint quinque numeri, sumendo quaternos & quaternos, productumque ex mutua quatuor numerorum multiplicatione, ducendo in reliquum, reperientur tres iidem numeri in duabus quibuslibet sumptionibus, vnde sumendo productum ex trium communium mutuo ductu, licebit simili prorsus argumento propositum concludere. Et sic in sex numeris per ea quæ in quinque demonstrata sunt probabitur intentum, & in septem per ea quæ in sex erunt ostensa. Igitur ex omni parte constat propositum.

PROPOSITIO IV.

Si fuerint quatuor numeri in proportionalitate arithmetica, erit summa extremorum, summæ mediorum æqualis. Et si summa extremorum sit æqualis summæ mediorum, erunt in proportionalitate arithmetica ipsi quatuor numeri.

Arithmetica proportionalitas dicitur cùm primi & secundi idem est interuallum, quod tertij & quarti, ita tamen vt primus secundo, & tertius quarto comparati, singuli singulis vel æquales sint, vel maiores; vel minores, non perturbato ordine.

A.........B
C.........
D.......G
H.......

Sint ergo arithmeticè proportionales A B ad C sicut D G ad H. dico extremorum A B & H summam æquari summæ mediorum C & D G. etenim vel A B æqualis est ipsi C. vel maior vel minor illo. Sit primum æqualis ergo vt seruetur arithmetica medietas, erit & D G. æqualis, ipsi H. Quamobrem si æqualibus A B & C addantur æquales H & D G. erunt duo A B & H simul æquales duobus C & D G simul. Quod est propositum.

A.......E..B
C.......
D.....F..G
H.....

Deinde excedat A B numerum C numero E B ita vt A E & C sint æquales, igitur & D G excedit H numero F G. æquali ipsi E B. per definitionem, & erit D F ipsi H æqualis. Itaque si æqualibus A E & C addantur æquales H & D F fient A E & H simul æquales H & D F fient A E & H simul æquales ipsis C & D F simul, igitur si his summis æqualibus addantur rursus æquales E B & F G. Erunt A B & H simul æquales ipsis C & D G simul. Quod demonstrandum erat.

Denique concipiatur H primus. D G secundus. C tertius. A B quartus, ita vt H sit minor quàm D G numero F G. & C sit minor quàm A B numero E B, sintque differentiæ F G. E B æquales; dico rursus extremorum H & A B summam æquari summæ mediorum D G & C. Nam consideratis iisdem numeris ordine inuerso concludetur per proximè demonstrata summam duorum A B & H. æquari summæ duorum C & D G. Quod est propositum.

Iam è conuerso sit summa extremorum A B & H æqualis summæ mediorum C & D G. Dico ipsos quatuor numeros esse in arithmetica medietate. Nam vel A B æqualis est ipsi C vel maior vel minor illo. Sit primum æqualis. Quia igitur A B & H simul æquantur ipsis C & D G simul, si vtrimque auferantur æquales A B. & C. remanebunt D G. & H æquales. Quare sicut ipsorum A B & C nullum est interuallum, sic & ipsorum D G. & H. Vnde constat propositum.

Deinde excedat A B ipsum C numero E B ita vt A E & C sint æquales. Igitur ab æqualibus summis duorum A B & H simul, & duorum C & D G simul, auferendo æquales numeros A E & C. remanent E B & H simul, æquales ipsi D G. Quare si abscindatur ex D G. numerus D F æqualis H, erit reliquus F G. æqualis E B. Cùm itaque A B. excedat C. eodem numero quo D G excedit H. erunt arithmeticè proportionales ipsi quatuor numeri. Quod demonstrandum erat.

Denique concipiatur H primus D G. secundus. C tertius. A B quartus. Ita vt H sit minor quàm D G numero F G. & reliquus D F sit æqualis ipsi H. Quia ergo ab æqualibus summis duorum H & A B. & duorum D G, & C. auferendo æquales H & D F remanent F G & C simul æquales ipsi A B, si ab A B abscindatur A E æqualis ipsi C relinquetur E B æqualis ipsi F G. Quare cum H deficiat à

D G. eodem numero quo C deficit ab A B. sunt arithmeticè proportionales H ad D G. sicut C ad A B. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc apparet si quatuor numeri fuerint in hac proportionalitate, & conuertendo fore eos in eadem proportionalitate.

Nam si primus excedat secundum, eodem interuallo quo tertius excedit quartum, & conuertendo, quartus deficiet à tertio, eodem numero quo secundus deficit à primo. Rursus si primus deficiat à secundo, eodem numero quo tertius à quarto, & conuertendo quartus excedet tertium, eodem interuallo quo secundus primum.

PROPOSITIO V.

Si tres numeri arithmeticè proportionales fuerint, summa extremorum æqualis est duplo medij. Et si summa extremorum sit æqualis duplo medii, ipsi tres numeri arithmeticè proportionales erunt.

A 9.
B 6. D 6.
C 3

Sint, tres numeri A B C in arithmetica proportionalitate, vt A ad B ita B ad C. Dico extremorum A C summam æquari duplo medij B. Etenim sumpto D æquali ipsi B. erit ex hypothesi in arithmetica proportionalitate vt A ad B ita D ad C. (quia D idem est atque B) Igitur per primam partem præced. erit extremorum A C summa æqualis summæ mediorum B D, seu duplo ipsius B. Quod erat primò propositum.

Sit deinde summa ipsorum A C æqualis duplo ipsius B. Dico esse in arithmetica proportionalitate vt A & B ita B ad C. Nam rursus sumpto D æquali B erit ex hypothesi, summa duorum A C summæ duorum B D æqualis. Quare per secundam partem præcedentis erit in arithmetica medietate A ad B vt D ad C. hoc est A ad B vt B ad C. Quod erat secundò demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

Si sint quotlibet numeri in arithmetica medietate continui, summa extremorum æqualis est summæ duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, atque etiam duplo medij, si multitudo numerorum fuerit impar.

A 3. B 5. C 7. D 9. E 11. F 13.

Sint quotlibet numeri A B C D E F in arithmetica medietate continui, dico summam extremorum A F æqualem esse summæ duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, hoc est summæ duorum B E, & summæ duorum C D. Nam ob continuitatem arithmeticæ proportionalitatis, est A ad B sicut E ad F. Igitur [a] extremorum A F summa, summæ mediorum B E æqualis est. Similiter quia est in arithmetica medietate B ad C, vt D ad E. [b] erit summa extremorum B E æqualis summæ mediorum C D. Quare cùm eadem summa duorum B E sit iam ostensa æqualis summæ duorum AF. erit vtique summa duorum A F æqualis tam summæ duorum B E. quàm summæ duorum C D & sic de aliis si plures essent numeri propositi.

[a] *quarta huius.*
[b] *quarta, huius.*

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10. F 12. G 14.

Quod si numeri A B C D E F G sint multitudine impari, ostendemus vt prius summam extremorum A G æqualem esse summæ duorum C E. Quia vero ex hypothesi est C ad D vt D ad E. in medietate arithmetica, [c] summa duorum C E æqualis est duplo medij D. Quamobrem ex omni parte constat propositum.

[c] *quinta huius.*

PROPOSITIO VII.

Si fuerint quatuor numeri arithmeticè proportionales, & permutando, arithmeticè proportionales erunt.

A 12. B 9.
C 4. D 1.

Sit in medietate arithmetica primus A ad secundum B. sicut tertius C ad quartum D. Dico & permutando esse in eadem medietate A ad C vt B ad D. Quia enim est in hac medietate A ad B vt C ad D. erit summa extremorum A D æqualis summæ mediorum C B per primam partem quartæ huius. Igitur per secundam partem eiusdem erit in eadem medietate primus A ad C secundum, sicut tertius B ad D quartum. Quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO VIII.

Omnis numerus pariter par, dimidium par habet. Et si quis numerus dimidium par habet, is est pariter par.

a trigeſimatertia, 9. A 24. B 12. Eſto A numerus pariter par, cuius dimidium B. Dico B eſſe parem. Si enim B eſſet impar, [a] ipſe A eſſet pariter impar tantum, contra hypotheſim. Non eſt ergo B impar, ſed par. Quod eſt propoſitum.

Deinde ſit B par, dico A eſſe pariter parem, & patet ex definitione. Etenim A producitur ex binario numero pari, in parem B. Quamobrem ex omni parte patet intentum.

COROLLARIVM.

Binarius metitur omnem numerum parem, per ipſius dimidium.

PROPOSITIO IX.

Omnis numerus pariter impar tantum, dimidium impar habet.

a octaua, huius. A 10. B 5. Hæc conuertit trigeſimam tertiam, 9. Euclidis. Eſto A numerus pariter impar tantum, cuius dimidium B. Dico B eſſe imparem. Nam ſi B eſſet par, [a] ipſe A eſſet pariter par. Atqui A ſupponitur pariter impar tantum. Igitur B non eſt par ſed impar. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO X.

Omnem numerum pariter parem quaternarius metitur. Et omnem numerum quem quaternarius metitur, is pariter par eſt.

A......C......B
G 4. D 2.

Eſto A B numerus pariter par cuius dimidium ſit C B numerus par per octauam huius. Et ſit G. quaternarius. Dico primo G metiri ipſum A B. Nam ſumpto D binario, erit D ad G ſicut ſicut C B ad A B. & permutando erit D ad C B, ſicut G ad A B. ſed [a] D binarius metitur numerum parem C B. Igitur & G metitur ipſum A B. Quod demonſtrandum erat.

a coroll. octaua. huius. b vigeſima prima, 9. c octaua, huius.

Deinde quaternarius G metiatur numerum A B. Dico A B eſſe pariter parem. Nam primo parem eſſe conſtat, [b] quia eum metitur G numerus par. Itaque ipſius A B dimidium eſto C B. Tunc vt prius ſumpto binario D. oſtendemus eſſe D ad C B ſicut G ad A B. Sed G metitur A B ex hypoteſi. [c] Igitur & D metitur C B. Quamobrem A B habens dimidium par, eſt pariter par. Quod ſecundo erat oſtendendum.

PROPOSITIO XI.

Omnis numerus excedens binario aliquem pariter parem, eſt pariter impar tantum.

A..C........B

a vigeſima prima, 9. b octaua, huius.

Sit numerus A B excedens pariter parem C B. binario A C. Dico A B eſſe pariter imparem tantum. Nam primò eſſe parem conſtat, [a] quia componitur ex duobus paribus A C. C B. Deinde eſſe pariter imparem ſic probatur. Nam ſi ponatur pariter par, [b] metietur eum quaternarius. Sed & idem quaternarius metitur pariter parem C B. Ergo quaternarius metiens totum A B. & ablatum C B, metietur & reliquum binarium A C, maior minorem. Quod eſt impoſſibile. Quamobrem A B non eſt pariter par. Eſt igitur pariter impar tantum. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO XII.

Omnis numerus pariter impar tantum, excedet aliquem pariter parem binario.

A..G.....C.D......B

a nona, huius. b octaua, huius.

Eſto A B pariter impar tantum, dico eum excedere binario aliquem pariter parem. Quia enim A B eſt par, ſecetur bifariam in A C. C B. [a] eruntque A C C B impares. Quare ſi ab ipſo C B auferatur vnitas C D, reliquus D B erit par. Sit illius duplus G B. [b] Igitur G B erit pariter par. Quum itaque vt totus A B ad totum C B, ſic ſit ablatus G B ad ablatum D B. (nam vtrobique eſt proportio dupla) erit & reliquus A G ad reliquum C D in eadem proportione dupla. Quare cùm C D ſit vnitas, erit A G binarius. Atque ideo cùm G B ſit oſtenſus pariter par, numerus A B ſuperat pariter parem G B binario A G. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XIII.

Si numerus pariter par, numero pariter impari tantum addatur, erit compoſitus pariter impar tantum.

A....C......B

a octaua huius. b octaua, huius.

Numerus pariter par A C. addatur pariter impari tantum C B. Dico compoſitum ex his A B eſſe pariter imparem tantum. Nam ſi A B ponatur pariter par, [a] metietur eum quaternarius. Sed idem quaternarius metitur pariter parem A C. Igitur metiens totum A B, & ablatum A C, metietur & reliquum C B. quamobrem C B erit pariter par contrà hypotheſim.

Nam positus est pariter impar tantum. Igitur A B non potest esse pariter par. Vnde relinquetur esse pariter imparem tantum. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XIV.

Si numerus pariter par per aliquem numerum multiplicetur, productus erit pariter par.

A 8. B 3.
C 24.

Sit numerus pariter par A quo ducto in quemlibet numerum B fiat C. Dico C esse pariter parem. Quia enim A est pariter par, [a] metitur eum quaternarius. Quare cùm A metiatur C. metietur & quaternarius, eundem C. [b] Igitur C est pariter par. Quod demonstrandum erat.

a octaua, huius.
b octaua, huius.

PROPOSITIO XV.

Si numerus pariter impar tantum, per numerum imparem multiplicetur, productus erit pariter impar tantum.

A 6. B 5.
D 3. E 15.
C 30.

Sit A numerus pariter impar tantum, quo ducto in B. imparem numerum, producatur C. Dico C esse pariter imparem tantum. Sumatur enim D dimidium ipsius A, quo ducto in B fiat E. Euidens est, quia B ductus in vtrumque D A producit E C [a] esse E ad C sicut D ad A. Quamobrem E est dimidium ipsius C. [b] Atqui D est impar, cùm sit semissis ipsius A numeri pariter imparis tantum & B etiam impar est ex hypothesi. [c] Igitur E productus ex duorum imparium mutuo ductu, & ipse impar est. [d] Quare C habens dimidium impar E, est pariter impar tantum. Quod erat demonstrandum.

a decima septima 7.
b nona, huius.
c vigesima nona, 9.
d trigesima tertia, 9.

PROPOSITIO XVI.

Si pariter pares quotcumque componantur, totus pariter par erit.

A 8.
B 12. D 36.
C 16.

Sint pariter pares quotcunque A B C. quorum summa D. dico D esse pariter parem. Quia enim A B C. sunt pariter pares, [a] singulos illorum quaternarius metitur. Igitur & compositum ex ipsis D, idem quaternarius metietur. [b] Quamobrem erit D pariter par. Quod demonstrandum erat.

a octaua huius
b octaua, huius.

PROPOSITIO XVII.

Si quotlibet numeri pariter impares tantum componantur, sit autem par illorum multitudo, totus erit pariter par. Si vero sit impar illorum multitudo, totus erit pariter impar tantum.

A 6. E 4.
B 10. F 8.
C 14. G 12.
D 18. H 16.
K 48.

Sint quotcunque pariter impares tantum A B C D. & sit primum par eorum multitudo, & compositus ex ipsis K. dico K esse pariter parem. sumantur enim E F G H singuli binario minores singulis A B C D. [a] Eruntque ipsi E F G H pariter pares. Numerus autem K æquabitur composito ex ipsis E F G H & totidem binariis. At [b] compositus ex ipsis E F G H est pariter par. Necnon & totidem binarij faciunt pariter parem [c] cùm compositus ex illis habeat dimidium par, scilicet numerum multitudinis ipsorum E F G H. [d] Igitur K compositus ex duobus pariter paribus, est pariter par. Quod demonstrandum fuit.

A 6. E 4.
B 10. F 8.
C 14. G 12.
D 30.

Sint vero A B C pariter impares tantum, multitudine impari, quorum summa D. dico D esse pariter imparem tantum. Nam sumptis vt prius E F G binario minoribus quàm ipsi A B C. erit D æqualis composito ex ipsis E F G & totidem binariis. [e] Quia uero singuli E F G sunt pariter pares, erit [f] & compositus ex ipsis pariter par. Summa vero totidem binariorum est pariter impar tantum, [g] quia dimidium impar habet, numerum multitudinis ipsorum E F G. Igitur [h] numerus D compositus ex duobus quorum alter est pariter par, alter pariter impar tantum, est & ipse pariter impar tantum. Quod demonstrandum erat.

a duodecima huius.
b decima sexta huius.
c octaua, huius.
d decima sexta, huius.
e duodecima, huius.
f decima sexta, huius.
g trigesima tertia, 9.
h decima tertia, huius.

PROPOSITIO XVIII.

Si cuiuis quadrato addatur duplum lateris illius, & præterea vnitas, fit quadratus à latere vnitate maiore.

A 16.
B....C.D
G 25.

Sit quadratus A cuius latus B C cui addita vnitate C D fiat B D & ipsius B D quadratus esto G. dico si addatur ad A duplum sui lateris B C & præterea vnitas, fieri quadratum G. etenim [a] quadratus G. æqualis est quadratis ipsorum B C. C D. & producto bis ex B C in C D. Atqui quadratus ipsius B C est A, & quadratus C D

a quarta, 2.

est ipsa vnitas: Productus autem ex vnitate C D in B C bis, est duplum ipsius B C. Patet ergo quadratum G æquari quadrato A & vnitati, & duplo ipsius B C. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Eadem prorsus ratione si cuilibet quadrato addatur quadruplum sui lateris & præterea 4. ostendetur fieri quadratum lateris binario maioris. Et si quadrato addatur sextuplum sui lateris, & præterea 9. fiet quadratus lateris ternario maioris, & sic in infinitum multiplicando latus per omnes numeros pares ordinatè dispositos, & assumendo quadratos illis collaterales seu quadratos semissum eorundem numerorum parium. Nec ad hoc demonstrandum requiritur aliud quàm quarta, 2.

PROPOSITIO XIX.

Si à quolibet quadrato auferatur numerus vnitate minor duplo lateris illius, relinquetur quadratus à latere vnitate minore.

A 25. B 5. C 10. D 9. E 4. F 8.

Sit A quadratus, cuius latus B cuius duplum C, vnde ablata vnitate relinquatur D & sit E vnitate minor ipso B. Dico si D auferatur à quadrato A, relinqui quadratum ipsius E. sumpto enim F duplo ipsius E, cùm B E differant vnitate, patet eorum dupla C F differre binario. Quare idem fiet numerus siue auferatur vnitas ex C. siue addatur vnitas ad F, nempe idem D. Atqui si ad quadratum ipsius E addatur duplum eiusdem E vnitate auctum nempe D. [a] fiet quadratus ipsius B nempe A. Igitur si ex A detrahatur D. residuum erit quadratus ipsius E. Quod demonstrandum erat.

a decima octaua, huius.

PROPOSITIO XX.

Omnis numerus quadratus aut impar est, aut pariter par.

A 25. A 16. B 5. B 4.

Sit numerus quadratus A, cuius latus B. dico A vel imparem esse, vel pariter parem. Etenim vel B impar est, vel par. Sit primum impar. Quia ergo ex impare B in imparem B. fit A. [a] erit A impar.

a vigesima nona, 9.

Deinde sit B par. Quia igitur ex pari B in parem B fit A, erit A pariter par ex definitione. Quamobrem A vel impar est, vel pariter par. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM.

G. I.

Nullus numerus pariter impar tantum, est quadratus.

Patet, cùm numerus pariter impar tantum, nec impar sit, nec pariter par.

PROPOSITIO XXI.

Quilibet quadratus impar, excedit numerum pariter parem vnitate.

A 25. C 24. B 5. D 4.

Sit A quadratus impar, cuius latus B. & ab ipso A detracta vnitate superfit C. dico C esse pariter parem, Sumatur D numerus vnitate minor ipso B. Quia ergo B est impar [a] (nam si B esset par, ex ductu illius in seipsum fieret A par contrà hypothesim) erit D par. [b] Atqui duplum ipsius D vnà cum quadrato eiusdem D, æquatur numero C. Quadratus autem numeri paris D, [c] est pariter par. Duplum quoque numeri paris D est pariter par (cùm fiat ex binario pari numero, in D parem:) igitur & C compositus ex duobus pariter paribus, [d] est pariter par. Quod demonstrandum erat.

a Schol. vigesima octaua, 9. b decima octaua, huius. c vigesima, huius. d decima sexta, huius.

PROPOSITIO XXII.

Duorum quorumlibet quadratorum interuallum, aut impar est, aut pariter par.

A 25. B 9. C 16. D . . . E . . F

Sint duo quadrati A maior & B minor, quorum interuallum C. Dico C esse pariter parem, vel imparem. Sumatur ipsius A latus D F, & latus ipsius B sit D E, ita vt E F sit differentia dictorum laterum. Itaque E F vel par est, vel impar. Sit primum par. Cùm igitur interuallum quo quadratus A superat quadratum B [a] æquetur quadrato ipsius E F & producto ex D E in E F bis, erit C æqualis quadrato ipsius E F & producto ex D E in E F bis, [b] At quadratus paris numeri E F est pariter par. Necnon & duplum producti ex D E in E F est pariter par, [c] cùm dimidium eius, nempe productus ex D E in E F parem, sit par. [d] Igitur C compositus ex duobus pariter paribus, est pariter par. Quod erat propositum.

a quarta, 2. b vigesima, huius. c octaua, huius. d decima sexta, huius.

A 25. B 4. C 21.
D..E...F

Deinde sit E F impar. Tunc quia quod fit bis ex D E in E F est numerus par (habet enim dimidium quod fit semel ex DE in EF.) si ei adiiciatur quadratus imparis EF,[a] qui impar est,[b] erit C. compositus ex pari & impari, impar. Quamobrem ex omni parte patet propositum.

[a] vigesima, huius.
[b] Schol. vigesima tertia, 9.

COROLLARIVM.

Numerus pariter impar tantum, non potest esse interuallum duorum quadratorum.

Intellige vnitate indiuisibili manente, aliter enim quilibet numerus statui potest interuallum duorum quadratorum, vt ostendit Diophantus lib. 2. sed & vigesima propositio, & hæ etiam intelligendæ sunt de numeris integris, nam fracti numeri nec pares sunt nec impares.

PROPOSITIO XXIII.

Si duorum inæqualium numerorum summæ addatur & adimatur eorundem interuallum, aggregatum quidem, maioris numeri, residuum vero, minoris duplum est.

E...A....B....C...D

Sint inæquales numeri AB minor & BD maior & à maiori abscindatur BC minori AB æqualis ita vt reliquus CD sit interuallum ipsorum. Dico primo, si toti AD addatur EA æqualis interuallo CD aggregatum ED esse duplum maioris numeri BD. etenim cùm æqualibus AB. BC. addantur æquales EA. CD erunt toti EB. BD æquales, atque ideo totus ED ipsius BD duplus erit. Quod erat propositum.

Dico secundo, si à toto AD auferatur interuallum CD, residuum AC minoris AB duplum esse, & patet cùm BC ipsi AB sit æqualis. Quamobrem ex omni parte constat propositum.

COROLLARIVM.

Si semissi summæ duorum numerorum addatur & adimatur semissis interualli eorundem aggregatum quidem maiori numero, residuum vero minori æquale est.

PROPOSITIO XXIV.

Si quotlibet numeri continuè proportionales, in totidem alios continuè proportionales ducantur, primus in primum, secundus in secundum, tertius in tertium & ita deinceps, & producti continuè proportionales erunt.

P 16.	A 2.	B 4. C 8. D 16.
Q 324.	E 27.	F 18. G 12. H 8.
R 5184.	K 54.	L 72. M 96. N 128.

Sint quotlibet numeri continuè proportionales ABCD & totidem alij EFGH ductisque A in E. B in F. C in G. D in H. fiant KLMN. Dico & ipsos KLMN esse continuè proportionales. Etenim ex A in C & ex E in G fiant PQ[a] quadrati ipsorum BF sumaturque etiam R productus ex K in M. Itaque quoniam ex A in E & ex C in G fiunt KM & ex K in M fit R. patet R produci ex mutua multiplicatione quatuor numerorum ACEG.[b] Quamobrem idem R producetur quomodocunque iidem quatuor numeri inter se ducantur, nimirum si A ducatur in C. & E in G. & producti PQ inter se ducantur. Igitur ex P in Q fiet R. At productus ex mutuo ductu quadratorum PQ[c] æquatur quadrato plani sub lateribus BF & ex B in F fit L ex hypothesi. Ergo R est quadratus ipsius L,[d] ac proinde tres KLM sunt continuè proportionales. Eadem ratione ostendemus tres LMN esse continuè proportionales. Quamobrem patet & omnes KLMN esse continuè proportionales. Quod erat demonstrandum.

[a] vigesima, 7.
[b] tertia, huius.
[c] vndecima, 8.
[d] vigesima, 7.



CLAVDII GASPARIS BACHETI SEBVSIANI
IN DIOPHANTVM PORISMATVM.
Liber Secundus.

PROPOSITIO I.

SI numerus secetur in quotlibet partes. Quadratus totius æquatur quadratis partium, & numeris qui fiunt bis ex qualibet parte in quamlibet ex aliis.

A....D...C.....B Numerus AB sectus sit primum in tres partes AD. DC. CB. Dico quadratum totius AB æquari quadratis partium AD. DC. CB.& numeris qui fiunt bis ex qualibet parte in quamlibet ex aliis, nimirum productis bis ex AD in CB ex DC in CB & ex AD in DC. Etenim concipiendo numerum diuisum in duas partes AC. CB. [a]erit quadratus totius AB æqualis quadratis partium AC. CB.& producto bis ex AC in CB. [b] Sed productus bis ex AC in CB æquatur productis bis ex singulis AD. DC in CB. Quadratus autem ex AC. [c] æquatur quadratis partium AD, DC. & producto bis ex AD in DC. Igitur constat quadratum totius AB æquari quadratis ipsorum AD. DC. CB & numeris qui fiunt bis ex quolibet in quemlibet ex aliis. Quod est propositum.

a quarta 2. b prima, 2. c quarta, 2.

A..E...D....C.....B Deinde secetur AB in quatuor partes AE. ED. DC. CB. Dico nihilominus sequi propositum. Nam si totus AB concipiatur diuisus in duas partes AC. CB. [a] erit quadratus totius æqualis quadratis partium AC. CB & producto ex AC in CB bis. At productus ex AC in CB bis, [b] æquatur productis bis ex singulis AE. ED. DC. in CB. Et quadratus ex AC. æquatur per iam demonstrata quadratis singulorum AE. ED. DC. & productis ex quolibet illorum in quemlibet ex aliis. Igitur quadratus totius AB æquatur quadratis singulorum AE. ED. DB. CB. & productis bis ex quolibet in quemlibet ex alijs. Quod demonstrandum erat. Similiter si numerus secetur in quinque partes, idem ostendetur assumendo quod demonstratum de sectione in quatuor partes, & sic in infinitum. Igitur ex omni parte constat propositum.

a quarta, 2. b prima 2.

PROPOSITIO II.

Datis duobus numeris inæqualibus, productus ex mutua eorum multiplicatione vna cum quadrato semissis interualli ipsorum, æquatur quadrato semissis summæ eorundem.

Hæc propositio eadem est cum quinta, 2. Euclidis mutatis tantum verbis. Etenim sint numeri A... F.. E..B... C inæquales AB maior & BC minor, & totius AC semissis esto AE vel EC, & in semissi AB sumatur FE æqualis ipsi EB. Tunc ab æqualibus AE. EC. auferendo æquales FE. EB. erunt reliqui AF. BC æquales. Quamobrem FB est interuallum inæqualium numerorum AB. BC. & EB est semissis eiusdem interualli. Itaque per quintam, 2. constat quadratum ipsius EC semissis summæ æquari producto ex AB in BC. & quadrato EB semissis interualli. Quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO III.

Duorum inæqualium quadratorum interuallum, æquale est numero qui fit ex summa laterum in interuallum eorundem.

Hæc etiam non differt à sexta, 2. etenim sint inæquales numeri AC minor, & CD maior abscindatur ex CD numerus CB æqualis ipsi AC. erit ergo BD interuallum duorum A... C... B..... D AC. CD. Dico itaque quadratum ex CD superare quadratum ex AC. numero qui fit ex AD summa laterum, in BD interuallum eorundem. Cùm enim AB sectus sit bifariam in C. & ei adiectus sit BD, erit per sextam, 2. quadratus ex CD æqualis producto ex AD in BD & quadrato ex AC. Quare quadratus ex CD superat quadratum ex AC producto ex AD in BD. Quod demonstrandum fuit.

PROPOSITIO IV.

Duorum quadratorum summa, æquatur duplo plani sub lateribus, vnà cum quadrato interualli eorundem.

Hæc

Hæc quoque aliis verbis idem pronunciat, quod septima 2. Etenim sint inæquales numeri A C maior & C B minor, & abscindatur D C æqualis ipsi C B. ita vt A D sit interuallum ipsorum A C. C B. Dico summam quadratorum ab ipsis A C. C B. æquari duplo plani sub A C. C B. vnà cum quadrato ipsius A D. Quia enim numerus A C sectus est vtcumque in D, per septimã 2. quadratus ex A C cum quadrato ex D C. idest summa quadratorum ab ipsis A C. C B. æquatur duplo plani sub A C. D C. seu sub A C. C B. vnà cum quadrato ipsius A D. Quod demonstrandum erat.

A..D....C....B

PROPOSITIO V.

Quadratus summæ duorum numerorum, æqualis est quadruplo plani sub ipsis numeris contenti, vnà cum quadrato interualli eorundem.

Hæc rursus eadem est cum octaua 2. sint enim inæquales numeri A B maior, & B D minor, & abscindatur C B æqualis ipsi B D, ita vt A C sit interuallum ipsorum A B. B D. Dico quadratum totius A D æquari quadruplo plani sub A B, B D. vnà cum quadrato interualli A C. Cùm enim numerus A B sectus sit vtcumque in C. per octauam 2. quadratus compositi ex A B. C B. nimirum totius A D, æquatur quadruplo plani sub A B. C B. seu sub A B. B D, cum quadrato ipsius A C. Quod demonstrandum proponebatur.

A.....C..B..D

PROPOSITIO VI.

Duorum inæqualium quadratorum summa, dupla est quadrati semissis summæ laterum, & quadrati semissis interualli eorundem.

Hæc non differt à nona 2. sint enim inæquales numeri A D. D B. & totius A B. semissis esto A C. vel C B ergo per ostensa secunda huius C D erit semissis interualli ipsorum A D. D B. Itaque dico summam quadratorum ab ipsis A D D B. duplam esse quadratorum ab ipsis C B. C D. Quod ipsum enunciat nona 2. Quamobrem constat propositum.

A.....C..D...B

PROPOSITIO VII.

Quadratus summæ duorum numerorum, & quadratus interualli eorum simul, dupli sunt quadratorum ab ipsis numeris.

Hæc quoque coïncidit cum decima 2. sint enim inæquales numeri A C. minor, & C D maior & à maiori abscindatur C B minori A C æqualis, ita vt B D sit interuallum ipsorum A C. C D. Dico Quadratum totius A D cum quadrato interualli B D esse duplum quadratorum ab ipsis A C. C D. Cùm enim A B sectus sit bifariam in C. & adiectus sit ei B D. per decimam 2. Quadrati ipsorum A D. B D simul dupli sunt quadratorum ab ipsis A C. C D. Quod erat ostendendum.

A.....C....B..D

COROLLARIVM.

Cuiuslibet numeri ex duobus quadratis compositi tam dimidium quam duplum componitur & ipsum ex duobus quadratis.

SCHOLIVM.

Colligitur manifestò hoc corollarium ex his duabus postremis propositionibus, & verum est in omni numero siue pari, siue impari, siue integro, siue fracto, cùm hæ duæ demonstrationes omnibus numeris conueniant, vt apparet, vnde constat lapsum esse Cardanum cap. 42. suæ Arithmeticæ regula 120. vbi hanc proprietatem numeris fractis conuenire negat. Notandus etiam error Nicolai Tartaleæ lib. 6. secundæ partis quæst. 48. vbi ait si numerus ex duobus quadratis compositus sit duplus alterius ex duobus item quadratis compositi, semper euenire vt minus latus subduplorum sit interuallum inter maius latus eorundem & minus duplorum, vt quia quadrati 64. & 4. simul sunt dupli quadratorum 25. & 9. accidit 3. latus ipsius 9. esse differentiam laterum 5. & 2. Etenim cùm vterque numerus ex duobus quadratis compositus, infinitis modis componatur ex duobus quadratis, vt ostendit Diophantus quæst. decima lib. 2. sanè vterque infinitis modis diuidi poterit in duos quadratos in quibus non eueniet quod semper euenire asserit Tartalea, quod vnico exemplo probare sufficiet. Quadrati 121. & 9 simul dupli sunt quadratorum 64. & 1. cùm illorum summa sit 130. horum 65. Attamen cùm latera illorum sint 11. & 3. horum 8. & 1. manifestum est, minus horum nempe 1. non esse interuallum ipsorum 8. & 3. Rursus 130. componitur ex duobus quadratis 81. & 49. At 65. componitur è duobus 49 & 16. & illorum latera sunt 9. & 7. istorum 7. & 4. vbi tamen 4. non est interuallum ipsorum 7. & 7. Verum quidem est si aliter comparentur hi quadrati, euenire quod ait Tartalea nimirum si quadrati 121. & 9. comparentur ipsis 49. & 16. vel si quadrati 81. & 49. comparentur ipsis 64. & 1. Hoc igitur distinguere debuit Tartalea; sed doctrinam de numeris è duobus quadratis compositis perfectè non calluit.

Hinc etiam colligere licet. Nullum numerum pariter parem tantum componi posse ex duobus quadratis integris & inæqualibus. Nam si hoc ponatur, facilè concludetur ex quibusdam propositionibus lib. 1. porism. & ex sexta huius, illius quoque dimidium componi è duobus quadratis integris & inæqualibus. Quia igitur numeri pariter paris tantum, continuè dimidium sumi potest, & dimidium dimidij donec ad binarium & ad vnitatem deueniatur per trigesimam quartam 9. Euclidis, patet sequi & ipsum binarium & ipsam vnitatem componi quoque ex duobus quadratis integris & inæqualibus. Quod est impossibile.

PROPOSITIO VIII.

Differentia medij proportionalis à quolibet quadratorum inter quos medius eſt, æquatur productis ex interuallo laterum in quodlibet latus.

D 4. E 3. F 7.
A 16. B 28. C 49.

Sint quadrati A C. quorum latera D F, quorum interuallum E & medius proportionalis inter ipſos A C. eſto B. Dico differentiam qua B ſuperat A æquari producto ex E in D. & differentiam qua C ſuperat B æquari producto ex E in F. [a] Etenim patet ipſum B fieri ducto D in F. Quia ergo F æquatur ipſis D E ſimul, [b] fiet idem B ducto D in ſingulos D E. Atqui ex D. in D fit quadratus A. Igitur ſi à productis ex D in D & in E hoc eſt à numero, B auferatur productus ex D in D, nempe quadratus A, reſtabit productus ex D in E pro differentia inter ipſos A B. Similiter quia ex F in F fit C. & F æquatur ambobus D E, fiet idem C ex F in ſingulos D E. At ex F in D fit B vt dictum eſt. Igitur ſi à quadrato C. auferatur B. reſtat productus ex F in E pro differentia inter B C. Quamobrem ex omni parte conſtat propoſitum.

[a] vndecima, 8. [b] prima, 2.

PROPOSITIO IX.

Si à duobus quadratis, & à medio eorum proportionali auferatur ſigillatim quilibet datus numerus, & tria reſidua per differentiam laterum ſigillatim diuidantur, medius quotientum ſuperat minimum latere minoris quadrati, & ſuperatur à maximo latere maioris quadrati, & ſumma maximi & minimi ſuperat duplum medij, eorundem laterum interuallo.

D 4 E 3. F 7.
A 16 C 28. B 49.
G 10.
H 6. K 18. L 39.
M 2. N 6. P 13.

Sint A B duo quadrati, quorum latera D F. quorum interuallum E. & medius proportionalis ſit C. & ab ipſis A. C. B. auferendo ſigillatim datum quemuis numerum G. ſuperſint H. K. L. quibus diuiſis ſigillatim per E, fiant quotientes M. N. P. Dico primo N. ſuperare ipſum M. numero D, & eundem N. ſuperari ab ipſo P. numero F. Etenim cùm à ſingulis A C B. ablatus ſit idem G. patet reſiduorum H K L eadem eſſe interualla quæ ipſorum A C B. [c] Atqui C ſuperat A. producto ex D in E. & B ſuperat C producto ex E in F. Igitur & interuallum duorum H K. eſt productus ex D in E, & interuallum duorum K. L eſt productus ex E in F. Quoniam verò diuiſis H K L. per E, prodeunt M N P. conſtat duorum M N interuallum fieri, diuiſo per E interuallo ipſorum H K. ſeu producto ex D in E. ſimiliter duorum N P. interuallum fiet, diuiſo per E interuallo ipſorum K. L. ſeu producto ex E in F. Atqui diuidendo per E productos ex E in D, & ex E in F, fiunt quotientes ipſi D F. Igitur duorum M N interuallum eſt D. & duorum N P interuallum eſt F. Quod erat propoſitum.

[c] octaua, huius.

Deinde, dico ſummam ipſorum M P. ſuperare duplum ipſius N numero E. Nam per oſtenſa P. æquatur ipſis N F. Igitur ſumma ipſorum M P. æquatur tribus numeris M N F. At F æquatur vtrique D E. Igitur ſumma amborum M. P. æquatur quatuor numeris D E M N. Verùm per oſtenſa ambo D M æquantur ipſi N. Igitur ambo M P. æquantur duplo ipſius N, & numero E. Quod demonſtrare oportuit.

PROPOSITIO X.

Si duobus quadratis & medio eorum proportionali addatur ſigillatim idem numerus, & tres ſummæ per interuallum laterum ſigillatim diuidantur, idem quod prius quotientibus accidet.

D 4. E 3. F 7.
A 16. C 28. B 49.
G 2.
H 18. K 30. L 51.
M 6. N 10. P 17.

Sint iidem qui ſuprà D E F. A C B. & ipſis A C B addatur ſigillatim numerus G, vnde fiant H. K. L. quibus diuiſis ſigillatim per E, fiant quotientes M N P. Dico primo N ſuperare ipſum M numero D. & eundem N ſuperari ab ipſo P. numero F. Etenim cùm ſingulis A C B additus ſit idem G. patet ſummarum H M L eadem eſſe interualla, quæ ipſorum A C B. Atqui C ſuperat A & aſſumantur reliqua omnia verba præcedentis demonſtrationis, & nulla quidem mutata litera propoſitum concludetur.

PROPOSITIO XI.

Si à duobus quadratis auferatur idem numerus ſigillatim, & reſidua per interuallum laterum ſigillatim diuidantur, qui fit ex quotientum mutuo ductu, adſcito numero qui à quadratis detractus eſt, quadratus euadit.

D 4. E 3. F 7.
A 16 B 49.
G 10.
M 2. N 6. P 13.

Sint quadrati A B. quorum latera D F. & horum interuallum E & ab ipsis A B auferendo G. sigillatim supersint duo numeri, quibus diuisis sigillatim per E. fiant quotientes M P. Dico ex mutuo ductu ipsorum M P. fieri numerum qui adscito G. quadratus euadit. Sumatur N quotiens qui fit si medius proportionalis inter A B detracto G, diuidatur per E. [a] Quare N æquabitur vtrique D M. & P vtrique N F. Igitur qui fiet ex N in D. [b] æquabitur iis qui fient ex D in D & ex D in M, hoc est quadrato A & numero qui fit ex D in M. Sed quadratus A æquatur producto ex M in E adsciscenti G ex constructione. Igitur qui fit ex N in D æquatur productis ex M. in D & in E addito G. & [c] quia producti ex M in ipsos D E æquantur producto ex M in F compositum ex ipsis, patet productum ex N in D æquari producto ex M in F adsciscenti G. Rursus, quia productus ex M in P æquatur productis ex M. in N. & in F, ex quibus P ostensus est componi, addendo vtrimque numerum G. erit productus ex M in P addito G. æqualis productis ex M in N & in F addito G. Quare loco producti ex M in F adscito G. sumendo eum qui ostensus est æqualis, productum scilicet ex N in D. erit productus ex M in P adscito G. æqualis productis ex N in D & in M. Quare cùm D & M simul ostensi sint æquales ipsis N. [d] & ideo producti ex N in D & in M æquentur quadrato ipsius N, erit vtique productus ex M. in P adscito G. æqualis quadrato ipsius N. Quod erat demonstrandum.

a nona, huius.
b prima, 2.
c prima, 2.
d secunda, 2.

PROPOSITIO XII.

Si duobus quadratis idem numerus sigillatim addatur, & summæ per interuallum laterum sigillatim diuidantur, qui fit ex quotientum mutuo ductu multatus numero qui quadratis additus est, euadit quadratus.

D 4. E 3. F 7.
A 16. B 49.
G 2.
M 6. N 10. P 17.

Sint quadrati A B quorum latera D F, & horum interuallum E. & numerus G addatur sigillatim ipsis A B. & summæ sigillatim diuidantur per E & fiant quotientes M P. Dico productum ex M in P. detracto numero G euadere quadratum. Sumatur enim N qui fit si medius proportionalis inter A & B adscito G diuidatur per E. Igitur [e] ambo D M æquantur ipsi N. & ambo N F æquantur ipsi P. [f] Quare qui fit ex N in D. æquatur productis ex D in D (seu quadrato A) & ex D in M. At quadratus A per constructionem est æqualis producto ex E in M. detracto G. Igitur productus ex N in D æquatur productis ex M in D & in E detracto G. Quia vero D E componunt F. [g] producti ex M in D & in E æquantur producto ex M in F. Quare productus ex N in D. æquatur producto ex M in F detracto G. Rursus quia productus ex M. in P æquatur productis ex M in N & in F ex quibus P componitur, detrahendo vtrimque numerum G. erit productus ex M in P detracto G. æqualis productis ex M in N & in F detracto G. Quare loco producti ex M in F detracto G, sumendo illi æqualem (vt ostensum est) productum ex N in D, erit productus ex M in P detracto G, æqualis productis ex N in D & in M. Quia vero D M æquantur ipsi N (vt ostensum est) [h] producti ex N in D & in M æquantur quadrato ipsius N. Igitur productus ex M in P. detracto G. æquatur quadrato ipsius N. Quod demonstrandum erat.

e decima huius.
f prima, 2.
g prima, 2.
h secunda, 2.

PROPOSITIO XIII.

Si à duobus quadratis auferatur datus aliquis numerus sigillatim, & residua diuidantur sigillatim per interuallum laterum, duo quotientes, vnà cum duplo summæ ipsorum multato supradicto interuallo, exhibent tres numeros, quorum bini quilibet si inuicem ducantur, & producto addatur datus numerus, fit quadratus.

C 4 D 3. E 7.
A 16. B 49.
H 6. G 10.
K 2. L 13. M 27.
N 36. P 64. Q 361.

Sint quadrati A B. quorum latera C E & horum interuallum D. & sit datus numerus G. quo detracto sigillatim ex ipsis A B, & diuidendo residua per D fiant quotientes K L, & horum summæ duplum multatum ipso D fit M. Dico tres K L M. præstare quod proponitur. Etenim à medio proportionali cadente inter A & B detrahendo G, & residuum per D diuidendo, fiat quotiens H. Et primò ducto K in L & producto addendo G. fiat N. Dico N esse quadratum. Etenim N est quadratus ipsius H [i] vt suprà demonstratum est. Secundò ducto K in M & producto addendo G. fiat P. dico P esse quadratum. [k] Quia enim summa duorum K L æquatur duplo ipsius H, & numero D. duplum ipsorum K L. æquabitur quadruplo H & duplo D. Quare auferendo D vtrimque, duplum ipsorum K L detracto D. nempe numerus M æquatur quadruplo H, & ipsi D semel sumpto. Vnde qui fit ex K in M æquatur producto ex K in H quater & in D semel. Igitur addito vtrimque numero G. productus ex K in M addito G, (nempe P.) æquatur productis ex K in H quater, & in D semel adscito G. At numerus qui fit ex K in D adscito G æquatur ipsi A per constructionem. Igitur P æquatur ipsi A & producto quater ex K in H. Quamobrem [l] cùm A sit

i vndecima, huius.
k nona, huius.
l nona, huius.

quinta, huius. quadratus interualli duorum K H. patet numerum qui fit quater ex K in H. adscito A *a* esse quadratum summæ duorum K H. Igitur P est talis quadratus.

Denique ducto L in M & producto addendo G, si fiat Q. simili prorsus argumento ostendemus Q esse quadratum summæ duorum H L. Igitur ex omni parte patet propositum.

PROPOSITIO XIV.

Si duobus quadratis addatur sigillatim quilibet datus numerus, & summæ sigillatim diuidantur per interuallum laterum, duo quotientes, vna cùm duplo summæ illorum multato dicto interuallo, exhibent tres numeros, quorum bini quilibet si inuicem ducantur, & à producto detrahatur datus numerus, fit quadratus.

C 4. D 3. E 7.
A 16. B 49.
H 10. G 2.
K 6. L 17. M 43.
N 100. P 256. Q 729.

Sint quadrati A B. quorum latera C E, & horum interuallum D. & ipsis A B addendo sigillatim G, fiant numeri qui diuisi sigillatim per D, dent quotientes K L. quorum duplum multatum numero D. fit M. Dico tres K L M. efficere quod proponitur.

Nam primo ducto K in L. & à producto auferendo G superfit N. & sumatur H quotiens qui fit si medius proportionalis cadens inter A & B auctus numero G diuidatur per D. [b] Constat igitur N. esse quadratum ipsius H.

b duodecima, huius. *c decima huius.* Secundo ducto K in M & à producto detrahendo G superfit P. [c] Quoniam ergo K L simul æquantur duplo ipsius H & numero D. patet duplum ipsorum K L detracto G. nempe numerum M. æquari quadruplo ipsius H, & numero D. Quare qui fit ex K in M. æquatur ei qui fit ex K in H quater, & in D semel. Ergo detracto vtrimque G. numerus qui fit ex K in M detracto G nimirum P. æquatur eis qui fiunt ex K in H quater, & in D semel detracto G. At numerus qui fit ex K in D detracto G æquatur ipsi A per constructionem. Igitur P. æquatur ipsi A & producto ex K in H quater. Quoniam igitur A [d] est quadratus interualli ipsorum K H. numerus qui fit ex K in H quater adscito A, [e] est quadratus summæ duorum K H. Igitur P. est talis quadratus.

d decima huius. *e quinta, huius.* Denique ducto L in M & à producto detrahendo G superfit Q. simili prorsus argumento probabitur Q esse quadratum summæ amborum H L. Igitur ex omni parte constat propositum.

PROPOSITIO XV.

Differentia quælibet duorum quadratorum à medio eorum proportionali, est media proportionalis inter eundem quadratum, & quadratum interualli laterum.

H 3 K 2. L 5.
M 4.
G 6. D 10.
A 9. B 15. C 25.

Sint quadrati A C. & medius eorum proportionalis B. sintque H L. quadratorum latera, quorum interuallum K. cuius quadratus M. Et differentiæ ipsius B à quadratis A C. sint G D. Dico G esse medium proportionalem inter A & M. Itemque D inter C & M. Etenim differentia G [f] fit ex K in H. Quamobrem G [g] est medius proportionalis inter quadratos ipsorum H K. nempe inter A & M. Similiter differentia D. fit ex K in L. Igitur D est medius proportionalis inter quadratos ipsorum K L. nempe inter M & C. Quamobrem constat propositum.

f octaua, huius. *g vndecima, 8.*

PROPOSITIO XVI.

Datis duobus quadratis si sumatur duplum summæ illorum, & quadrati interualli laterum: habentur tres numeri, quorum bini quem producunt mutuo ductu, is si adsumat productum ex quadrato interualli laterum, siue in amborum summam, siue in reliquum, quadratum facit.

Sint dati quadrati A B. & sit E quadratus interualli laterum sumaturque C duplus summæ ipsorum A B E. Dico tres A B C. præstare quod proponitur.

D 15. E 4. F 8.
A 9. B 25. C 76.

H 225.	H 225.	G 684.	G 684.
K 136.	M 304	P 340.	R 100.
L 361.	N 529	Q 1024.	S 784.
	T 1900.	T 1900.	
	V 404.	Y 36.	
	X 2304.	Z 1936.	

h vndecima, 8. *i vigesima, 7.* *k quarta, huius.* *l quarta, 2.*

Quod erat propositum.

Primò, enim ducatur A in B & fiat H. ducaturque E in summam ipsorum A B & fiat K, sitque L summa ipsorum H K. Dico L esse quadratum. Sumatur D medius proportionalis inter ipsos A B. [h] qui vtique fit ex mutua laterum multiplicatione. [i] Igitur H qui fit ex A in B est quadratus ipsius D. [k] Sed & summa quadratorum A B. æquatur duplo ipsius D & ipsi E. Igitur productus ex E in summam ipsorum A B. puta K. æquatur duplo producti ex D in E. & quadrato ipsius E. Quare addito H quadrato ipsius D, summa L æquabitur quadratis ipsorum D E. & duplo producti ex D in E. [l] Ergo L quadratus est cuius latus est summa ipsorum D E.

Secundò, ducatur E in reliquum C vnde fiat M. & amborum H M summa esto N. Dico N. esse quadratum. Sumatur F duplum ipsius E. Quia ergo C æquatur duplo ipsorum A B E. erit productus ex E in C. puta M. æqualis duplo producti ex F in A B. & duplo quadrati ipsius E. Et quia A B simul, vt ostensum est, æquantur ipsi D bis, & E semel productus ex E in A B. bis, æquatur producto ex E in D quater, & duplo quadrati ipsius E. Quare totus productus ex E in C. puta M æquatur producto ex E in D quater, & quadruplo quadrati ipsius E seu quod idem est duplo producti ex D in F. & quadrato ipsius F. Quare addito H quadrato ipsius D. fiet N æqualis quadratis ipsorum D F & duplo producti ex D in F.[a] Ac proinde N est quadratus latus habens summam ipsorum D F. Quod erat intentum. [a] quarta, 2.

Tertiò, ducatur A in C. & fiat G. ducaturque E in summam ipsorum A C. & fiat P. sitque amborum G P. summa Q. Dico Q esse quadratum. Quia enim C æquatur duplo ipsorum A B E. erit productus ex A in C puta G. æqualis duplo quadrati ipsius A. duplo producti ex A in B seu duplo quadrati ipsius D, & duplo producti ex A in E. At duplum quadratorum ab ipsis A D[b] æquatur quadrato summæ ipsorum A D, & quadrato interualli ipsorum. Quia vero interuallum hoc[c] est medium proportionale inter A & E,[d] quadratus illius æquatur producto ex A in E. Igitur G. æquatur quadrato summæ ipsorum A D, & triplo producti ex A in E. Rursus productus ex E in A C puta P. ostendetur æqualis triplo producti ex E in A, duplo producti ex E in B, & duplo quadrati ipsius E. Quare Q compositus ex ipsis G P. æquatur quadrato summæ amborum A D. sextuplo producti ex E in A, duplo producti ex E in B. & duplo quadrati ipsius E. & loco eius qui fit bis ex E in A B. sumendo illi æqualem quadruplum producti ex E in D, vnà cum duplo quadrati ipsius E vt ostensum est in secunda parte, erit Q æqualis quadrato summæ ipsorum A D. quadruplo producti ex E in A D, & quadruplo quadrati ipsius E. & loco quadrupli ex E in A D sumendo duplum ex F in A D, & loco quadrupli quadrati ipsius E sumendo quadratum ipsius F. fit Q æqualis quadrato summæ A D, & quadrato F. & duplo producti ex F in A D.[e] Quare Q est quadratus summæ ipsorum A D F. Quod erat propositum. [b] septima, huius. [c] decima quinta, huius. [d] vigesima, 7. [e] quarta, 2.

Quartò, ducatur E in B. & fiat R. quo addito ad G. fiat S. Dico S. esse quadratum. Quia enim vt ostensum est, G continet quadratum summæ ipsorum A D, & triplum producti ex A in E. huic addendo R productum ex E in B. fiet S. continens quadratum summæ ipsorum A D. triplum producti ex E in A. & productum ex E in B. Quare loco producti ex E in A B. sumendo duplum producti ex E in D cum quadrato ipsius E. patet S æquari quadrato summæ amborum A D, & quadrato ipsius E, & duplo producti ex E in A D. A C[f] proinde S. quadratus est summæ ipsorum A D E. Quod erat intentum. [f] quarta, 2.

Quintò, ducatur B in C & fiat T ducaturque E in summam ipsorum B C & fiat V. & summa ipsorum T V esto X. Dico X esse quadratum. Quia enim C. æquatur duplo ipsorum A B E erit productus ex B. in C. puta T. æqualis duplo quadrati ipsius B. duplo producti ex B in A, & ex B in E. Et loco producti bis ex B in A. sumendo illi æqualem duplum quadrati ipsius D. Tum pro duplo quadratorum ab ipsis B D.[g] sumendo quadratum summæ amborum B D cum quadrato interualli eorundem, & pro hoc quadrato interualli ipsorum B D,[h] sumendo productum ex B in E, fiet totus T æqualis quadrato summæ amborum B D, & triplo producti ex B in E. Rursus autem productus ex E in B C puta V, æqualis est triplo producti ex E in B duplo producti ex E in A, & duplo quadrati ipsius E. Quare X compositus ex vtroque T V æquatur quadrato summæ amborum B D, sextuplo producti ex E in B. duplo producti ex E in A & duplo quadrati ipsius E. Itaque loco eius qui fit bis ex E in AB sumendo illi æqualem quadruplum producti ex E in D, vnà cum duplo quadrati ipsius E, erit X æqualis quadrato summæ ipsorum B D quadruplo producti ex E in B D. & quadruplo quadrati ipsius E. Quare rursus loco quadrupli ex E in B D, sumendo duplum ex F in B D, & loco quadrupli quadrati ipsius E, sumendo quadratum ipsius F. fiet X æqualis quadrato summæ ipsorum B D, & quadrato ipsius F, & duplo producti ex F in B D.[i] Proinde X quadratus est summæ ipsorum B D F. Quod erat propositum. [g] septima, huius. [h] decima quinta, huius. [i] quarta 2.

D 15. E 4. E 8.
A 9. B 25. C 76.

H 225.	H 225.	G 684.	G 684.
K 136.	M 304.	P 340.	R 100.
L 361.	N 529.	Q 1024.	S 784.
	T 1900.	T 1900.	
	V 404.	Y 36.	
	X 2304.	Z 2936.	

Denique ducatur E in A & fiat Y. quo addito ad T fiat Z. Dico Z esse quadratum. Quia enim, vt ostensum est, T continet quadratum summæ ipsorum B D & triplum producti ex B in E. huic addendo Y productum ex E in A fiet Z. continens quadratum summæ ipsorum B D, triplum producti ex E in B, & productum ex E in A. Quare loco producti ex E, in A B sumendo duplum producti ex E in D vnà cum quadrato ipsius E, patet Z æquari quadrato summæ amborum B D. & quadrato ipsius E. & duplo producti ex E in B D. A C[k] proinde Z quadratus est, cuius latus componitur ex summa ipsorum B D E. Quamobrem ex omni parte constat propositum. [k] quarta, 2.

PROPOSITIO XVII.

Datis duobus quadratis, ſi ſumatur duplum ſummæ illorum, & quadrati interualli laterum: habebuntur tres numeri, quibus ſi addatur ſigillatim duplum quadrati interualli laterum, fient tres alij, quorum bini quem producunt mutuo ductu, detracto eo qui fit ex quadrato interualli laterum, ſiue in ſummam amborum, ſiue in reliquum remanet quadratus.

D 15. E 4.
A 9. B 25. C 76.
F 8. F 8. F 8.

G 561.	G 561.	N 1428.	N 1428.
H 336.	L 200.	P 404.	R 132.
K 225.	M 361.	Q 1024.	S 1296.
	T 2772.	T 2772.	
	V 468.	Y 68.	
	Z 2304.	Z 2704.	

Sint duo quadrati A B. & quadratus interualli laterum E. & duplum ipſorum A B E. eſto C. addaturque ſingulis A B C. duplum ipſius E puta F. Dico tres A F. B F. C F. præſtare quod dictum eſt.

Primo enim ducatur A F in B F & fiat G. Ductoque E in reliquum C F. fiat H, quo detracto ex G, maneat K. Dico K eſſe quadratum. a Quia enim ducere A F in B F idem eſt, atque ducere A in B & F in F & vtrumque A B in F. patet G continere productum ex A in B. & productum ex F in A B, (ſeu ex E bis in A B.) & quadratum ipſius F, ſeu quadratum ipſius E quater. Rurſus, quia C continet duplum ipſorum A B E. productus ex E in C F, puta H. continet productum ex E in A B bis, & ex E in ſeipſum quater. Quare detracto H ex G. reliquus K æquatur producto ex A in B, b ſeu quadrato medij proportionalis D. Quod erat propoſitum.

a prima, 2.
b vigeſima, 7.

Secundo, ducatur E in ſummam ipſorum A F. B F, & fiat L. quo detracto rurſus ex G. ſuperſit M. Dico M eſſe quadratum. Nam vt oſtenſum eſt, G continet productum ex A in B, & productum ex E bis in A B. & quadruplum quadrati ipſius E. At productus ex E in A. F. B F, puta L. continet productum ex E in A B. & ex E in ſui quadruplum, ſeu quadruplum quadrati ipſius E. Igitur detrahendo L ex G reliquus M manet æqualis producto ex A in B. & producto ex E in A B. Quamobrem M. quadratus eſt per primam partem præcedentis, cuius latus eſt ſumma amborum D E. Quod erat propoſitum.

Tertiò, ducatur A F in C F. & fiat N. tum ducatur E in ſummam ipſorum A F C F & fiat P. quo detracto ex N. ſuperſit Q. Dico Q. eſſe quadratum. Quia enim ducere A F in C F idem eſt atque ducere A in C. & F in F. ac demum F in ipſos A C. patet N. continere productum ex A in C. & productum ex F in F ſeu ex E in ſeipſum quater, & productum ex F in A C. ſeu ex E bis in A C. Rurſus productus ex E in A F. C F puta P. continet productum ex E in A C. ſemel, & ex E in ſeipſum quater. Quare detracto P ex N. reliquus Q manet æqualis producto ex A in C & producto ex E in ipſos A C. Quare Q. quadratus eſt per tertiam partem præcedentis cuius latus componitur ex ipſis D A F. Quod erat intentum.

Quartò, Ducatur E in reliquum B F & fiat R quo detracto ex eodem N. maneat S. Dico S. quadratum eſſe. Quia enim ducto E in A F. C F fit P. & ducto eodem E in B F fit R. patet P ſuperare R. producto qui fit ex E in interuallum quo A F. C F ſuperant B F. Atqui loco ipſius C. ſumendo duplum ipſorum A B E. Interuallum quo A F. C F ſuperant B F reperitur continere A ter. F bis. B ſemel. Igitur P ſuperat R producto ex E in A ter, in F bis, in B ſemel. Porrò quia P Q ſimul conficiunt eundem N. quem & R S. ſimul conficiunt, c ſunt in arithmetica medietate P ad R. vt S. ad Q. Igitur S. ſuperat Q producto ex E in A ter, in F bis, in B ſemel. Et loco producti ex E in A B ſemel, d ſumendo productum ex E in D bis, & in ſeipſum ſemel, fiet interuallum quo S ſuperat Q æquale producto ex E bis in ipſos D A F. & quadrato ipſius E. Quare cùm Q oſtenſus ſit quadratus, cuius latus componitur ex ipſis D A F. & quadrato Q. addendo quadratum ipſius E & duplum producti ex ipſo E in latus ipſius Q. fiat S. e Vtique S. quadratus eſt latus habens compoſitum ex ipſis D A F E ſeu ex D A & triplo ipſius E. Quod erat propoſitum.

c quarta, 1. poriſm.
d quarta, huius.
e quarta, 3.

Quintò, Ducatur B F in C F. & fiat T. tum ducatur E in ſummam ipſorum B F. C F. & fiat V. quo detracto ex T ſuperſit X. Dico X eſſe quadratum. Quia enim T producitur ex B F. in C F. patet T continere productum ex B in C, & productum ex F in F, ſeu ex E in F bis, & productum ex F in B C, ſeu ex E bis in B C. At productus ex E in B F. C F. ſeu V. continet productum ex E in B C. ſemel, & ex E in F bis. Igitur detracto V. ex T. reliquus X. continet productum ex B in C. & productum ex E in B C. Quare X quadratus eſt per quintam partem præcedentis, cuius latus componitur ex ipſis B D F. Quod erat propoſitum.

Denique ducatur E in reliquum A F & fiat Y. quo detracto ab eodem T. ſuperſit Z. Dico & ipſum Z quadratum eſſe. Quia enim ex E in B F. C F fit V. & ex eodem E in A F fit Y, patet V ſuperare

Y producto qui fit ex E in interuallum quo B F. C F superant A F. Sed eodem quo suprà, ductu vtentes inueniemus hoc interuallum continere ipsum B ter. F bis. A semel. Quare V. superat Y. producto ex E in B ter, in F. bis, in A semel. Et loco producti ex E in A B semel, sumendo illi æqualem productum [a] ex E in D bis, & in seipsum semel. fiet interuallum quo V superat Y æquale producto ex E in ipsos D B F bis, & quadrato ipsius E. Quoniam vero V X. simul, æquantur ipsis Y Z simul, [b] sunt in æquali differentia V Y. & Z X. Ergo interuallum quo Z. superat X. æquatur duplo producti ex E in ipsos D B F. & quadrato ipsius E. Quamobrem cùm X ostensus sit quadratus, cuius latus componitur ex ipsis B D F. patet ad ipsum X. addendo quadratum ipsius E. & duplum producti ex ipso E in latus ipsius X, [c] compositum Z esse quadratum cuius latus constat ex ipsis D B F E seu ex D B & triplo ipsius E. Quare ex omni parte constat propositum.

a quarta, huius. b quarta, 1. porism. c quarta, 2.

PROPOSITIO XVIII.

Si planus sub duobus numeris contentus, ducatur in compositum ex ipsis, idem fiet numerus, atque si quadratus primi ducatur in secundum & quadratus secundi ducatur in primum.

D 12. E 18.
A 2. B 3.
C 6.

Sint duo numeri A B. & planus sub ipsis contentus C. quo ducto sigillatim in ipsos A. B. fiant D E. patet ergo [d] summam ipsorum D E. æqualem esse producto ex C in compositum ex ipsis A B. Hanc igitur summam dico æqualem esse productis ex quadrato ipsius A in B, & ex quadrato ipsius B in A. Nam sumptis tribus numeris A. B & A rursus, [e] idem gignetur numerus quomodocunque & quouis ordine inter se ducantur. Quare ducto A in A & producto, nempe quadrato ipsius A ducto in B. fiet idem D, qui fit ducto A in B & producto C in A. Eodem argumento probabitur numerum E fieri ducto quadrato ipsius B in A. Quamobrem constat propositum.

d prima, 2. e tertia, 1. porism.

PROPOSITIO XIX.

Si numerus secetur in duas partes, cubus totius æqualis est cubis partium, & numero qui fit ter ex toto numero in planum sub partibus comprehensum.

A . . . C . . B
D . . . . G . . . . K . . . . M

Sit numerus A B sectus in duas partes A C. C B. Dico cubum totius A B æquari cubis partium A C. C B, & numero qui fit ter ex toto A B in planum sub ipsis A C. C B comprehensum. Sumatur D M quadratus ipsius A B. [f] qui cùm sit æqualis quadratis ipsorum A C. C B & plano bis sub ipsis comprehenso, esto D G quadratus ipsius A C. & G K quadratus ipsius C B. & K M planus bis sub A C. C B contentus. Itaque patet ex definitione cubi ex toto A B in totum D M produci cubum ipsius A B. [g] Ergo idem cubus producetur ductis singulis partibus ipsius A B in singulas ipsius D M. Ducto autem A C in suum quadratum D G. fit cubus ipsius A C. & ducto C B in suum quadratum G K. fit cubus ipsius C B. Ergo iam habemus cubos partium. Restat vt ducamus A C in G K, & C B in D G, tum vtrumque A C. C B in K M. [h] Atqui ducere ipsos A C. C B in K M. idem est atque ducere totum A B in K M. Quare cùm K M. sit planus bis sub partibus A C. C B contentus, patet ducere A C. C B in K M. idem esse atque ducere totum A B in planum bis sub partibus comprehensum. Rursus autem ducere A C in G K, & C B in D G, [i] idem est atque ducere totum A B in planum sub partibus comprehensum. Quamobrem harum omnium multiplicationum producta simul, (seu cubus totius A B) æquantur cubis ipsorum A C. C B, & numero qui fit ter ex toto A B in planum sub ipsis A C. C B. comprehensum. Quod erat ostendendum.

f quarta, 2. g schol. prima, 2. h prima, 2. i decima octaua, huius.

PROPOSITIO XX.

Si numerus secetur in duas partes, cubus totius æqualis est cubis partium, & numeris qui fiunt ex qualibet parte in quadratum alterius ter.

A . . . C . . B

Sit numerus A B sectus in duas partes A C. C B. Dico cubum totius A B æquari cubis ipsorum A C. C B, & numeris qui fiunt ter ex quadrato ipsius A C in C B, & ex quadrato ipsius C B in A C. Etenim [k] cubus totius A B æquatur cubis ipsorum A C. C B, & numero qui fit ter ex A B in planum sub A C. C B. Sed numerus qui fit ex A B in planum sub A C. C B. [l] æquatur productis ex qualibet parte in quadratum alterius. Quare numerus qui fit ter ex A B in planum sub partibus, æquatur eis qui fiunt ter ex qualibet parte in quadratum alterius. Igitur cubus totius A B æquatur cubis partium & numeris qui fiunt ter ex qualibet parte in quadratum alterius. Quod demonstrandum erat.

k decima nona, huius. l decima octaua, huius.

PROPOSITIO XXI.

Duorum cuborum interuallum, æquatur cubo interualli laterum, & numero qui fit ter ex eodem interuallo laterum in planum sub lateribus comprehensum.

A..:.D..B....C
E 216. F 64.

Sint inæquales numeri A B. B C. quorum interuallum D B, ita vt A D. B C. sint æquales. Et cubus ipsius A B esto E, cubus autem ipsius B C sit F. Dico interuallum ipsorum E F. æquari cubo ipsius D B. & numero qui fit ter ex D B in planum sub A B. B C. Etenim [a] cubus totius A B, nimirum E æquatur cubis partium A D D B & numero qui fit ter ex A B in planum sub A D. D B. quare cùm A D sit æqualis B C. & ideo cubus ipsius A D sit F. patet E æquari ipsi F & cubo ipsius D B & numero qui fit ter ex A B in planum sub A D. D B. Sumptis autem tribus numeris A B. A D. D B. [b] idem producetur numerus quouis ordine ij inter se ducantur. Quare idem numerus qui fit ex A B in planum sub A D. D B. fiet etiam ex D B in planum sub A B. A D. seu sub A B. B C. Quamobrem cubus E æquatur cubo F, cubo ipsius D B, & numero qui fit ter ex D B in planum sub A B. B C. Itaque à cubo E auferendo cubum F, remanet interuallum cuborum æquale cubo interualli laterum D B, & numero qui fit ter ex eodem D B in planum sub lateribus A B. B C comprehensum. Quod demonstrandum erat.

a decima nona, huius.

b tertia, 1. porism.

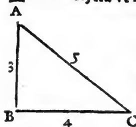


CLAVDII

CLAVDII GASPARIS BACHETI SEBVSIANI IN DIOPHANTVM PORISMATVM Liber Tertius.

DEFINITIO I.

Triangulum rectangulum in numeris constitui dicitur, cùm tres exhibentur numeri, ita vt maioris quadratus, quadratis reliquorum simul sumptis æqualis sit.



Vt tres numeri 3. 4. 5. dicuntur constituere triangulum rectangulum quia maioris 5. quadratus 25. æqualis est quadratis 9. & 16. reliquorum 3. & 4. Cuius rei ratio pendet à quadragesima septima, 1. Euclidis. Nam verbi gratia, si sit triangulum rectangulum A B C. cuius angulus rectus B. demonstrauit Euclides quadratum lateris A C. æquari quadratis ipsorum A B. B C.

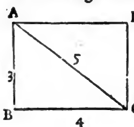
DEFINITIO II.

Maius latus trianguli rectanguli, dicitur hypotenusa. Reliqua duo, latera circa rectum, & horum alterum, basis: alterum vocatur Cathetus seu perpendiculum.

Sic in superiore diagrammate A C vocatur hypotenusa seu subtendens, quia subtendit angulum rectum. Reliqua vero latera A B. B C dicuntur latera circà rectum, quia rectum angulum comprehendunt. Et horum alterum, puta B C dicitur basis, alterum A B dicitur perpendiculum, si triangulum concipiatur inniti lateri B C. vel è conuerso B C dicetur perpendiculum, & A B basis, si triangulum ipsi A B niti concipiatur.

DEFINITIO III.

Area trianguli rectanguli est semissis plani contenti sub lateribus circa rectum.



Sic positis lateribus circa rectum A B. B C. 3. & 4. cùm planum sub ipsis sit 12. erit area trianguli rectanguli A B C. numerus 6. Et ratio est euidens. Nam si perficiatur parallelogrammum rectangulum A B C D. patet eius aream fieri ducto latere A B in B C. Quamobrem cùm triangulum A D C. triangulo A B C sit æquale, manifestum est ipsum A B C. esse dimidium totius parallelogrammi, atque adeo eius aream esse dimidium producti ex A B in B C.

DEFINITIO IV.

Similia triangula rectangula dicuntur, quæ latera habent proportionalia.

Cùm scilicet est hypotenusa vnius ad hypotenusam alterius, sicut basis ad basim, & perpendiculum ad perpendiculum, qualia sunt triangula 3. 4. 5. & 12. 16. 20.

DEFINITIO V.

A duobus planis similibus formari dicitur triangulum rectangulum, cùm ex eorum summa, & eorundē interuallo, & duplo medij proportionalis, constant latera trianguli.

Sic à planis similibus 3. & 12. dicetur formari triangulum. 15. 9. 12. quia 15. est summa planorum similium, 9. interuallum eorundem, 12. duplum medij proportionalis.

DEFINITIO VI.

A duobus quibuſcunque numeris formari dicitur triangulum rectangulum, cùm ex aggregato & ex interuallo quadratorum ab ipſis, & ex duplo plani ſub ipſis numeris contenti, conſtant latera trianguli.

Sic à duobus numeris 2. & 3. formari dicitur triangulum 13. 5. 12. Quia 13. eſt aggregatum quadratorum ab ipſis 2. & 3. & 5. eſt eorundem quadratorum interuallum, & 12. eſt duplum plani ſub 2. & 3. contenti. Hos autem duos modos formandi triangulum rectangulum legitimos eſſe demonſtrabimus hoc libro, propoſitione tertia & quinta.

OBSERVATIO D. P. F.

A Tribus numeris in proportione Arithmeticâ poſſumus formare triangulum, ſi ſecundum hanc definitionem ſextam formemus illud à medio & differentiâ, Nam ſolidum ſub tribus ductum in differentiam faciet aream dicti trianguli, atque ideo ſi differentia ſit vnitas, ſolidum ſub tribus erit area trianguli.

DEFINITIO VII.

A duobus datis triangulis rectangulis, tertium efformari dicitur, cùm productus ex hypotenuſa 1'. in hypotenuſam 2'. fit hypotenuſa 3'. At aggregatum productorum ex baſi 1'. in baſim 2'. & ex perpendiculo 1'. in perpendiculum 2'. fit alterum latus circa rectum 3'. Denique productorum ex baſi 1'. in perpendiculum 2'. & ex baſi 2'. in perpendiculum 1'. minus de maiori ſubtrahendo, fit alterum latus 3'.

Sic datis duobus triangulis 5. 4. 3. & 13. 12. 5. fiet tertij hypotenuſa productum ex 5. & 13. nempe 65. alterum latus circa rectum erit aggregatum numerorum 48. & 15. qui fiunt ex baſi in baſim & ex perpendiculo in perpendiculum. Tertium vero latus erit quod relinquitur auferendo productum ex 4. in 5. nempe 20. à producto ex 3. in 12. nempe à 36. Erunt igitur latera omnia tertij trianguli. 65. 63. 16. Hic modus etiam demonſtrabitur infrà, propoſitione decima.

PROPOSITIO I.

Si latera trianguli rectanguli per eundem numerum multiplicentur aut diuidantur, fit aliud triangulum rectangulum ſimile priori.

Hanc & ſequentem propoſitionem omnibus triangulis ſimilibus in vniuerſum applicatam demonſtrauit Euclides libro ſexto ſed ex propriis numerorum principiis eruto demonſtrationis medio, libet hic vtramque triangulis rectangulis ſingulariter applicare. Sint trianguli rectanguli latera circa rectum A B, & hypotenuſa G. & horum quadrati D E F [a] ita vt F ſit æqualis ambobus D E. ductoque eodem numero G in ipſos A B C. fiant H. K. L. quorum quadrati M. N P. Dico H K L conſtituere triangulum rectangulum ſimile priori, nimirum quadratum P. ambobus M N. eſſe æqualem, & latera H K L. eſſe proportionalia lateribus A B C. & quidem hoc vltimum patet [b] cùm fiant H K L. ex eodem G in ipſos A B C. Primum autem probatur. [c] Quia enim rationes ipſorum D E F ad ipſos M N P ſunt duplicatæ rationum ipſorum A B C ad ipſos H K L, cùm vt oſtenſum eſt, ſit A ad H, vt B ad K & vt C ad L, erit etiam D ad M vt E ad N. & vt F ad P. & permutando erit D ad F vt M ad P. & E ad F vt N ad P. Cùm ergo ſit D primus ad F ſecundum, ſicut M tertius ad P. quartum, & rurſus ſit E quintus ad F ſecundum, ſicut N ſextus ad P quartum; [d] Erunt & D E ſimul, primus ſcilicet & quintus ad F ſecundum, ſicut M N ſimul, nimirum tertius & ſextus ſimul ad P quartum. Sed D E ſimul æquantur ipſi F ex hypotheſi. Ergo & M N ſimul æquantur ipſi P. [e] Quare H K L conſtituunt triangulum rectangulum ſimile priori. Quod demonſtrandum erat. Eadem porro diuiſionis ratio eſt quæ multiplicationis vt manifeſtum eſt. Igitur conſtat propoſitum.

A 3. B 4. C 5. D 9. E 16. F 25.
G 2.
H 6. K 8. L 10. M 36. N 64. P 100.

a definitio prima.
b decima ſeptima 7.
c vndecima, 8.
d vigeſima quarta, 5.
e definitio prima.

PROPOSITIO II.

Areæ ſimilium triangulorum rectangulorum ſunt in duplicata ratione homologorum laterum.

Sint latera triangulorum rectangulorum ſimilium. A B C. D E F. & ſint A & D hypotenuſæ B C.

ualli eorum K [a] æquatur quadratis ipsorum B C. Manifestum est quadratos singulorum A B C D æquari quadratis ipsorum H K. Eadem prorsus ratione, quia quadratus abs G. æquatur quadratis [b] partium B. C. & plano bis sub B & C. seu sub A & D. & planus bis sub A & D vnà cum quadrato interualli eorum L. æquatur quadratis ipsorum A D, sequitur quadratos abs G & L æquari rursus quadratis à singulis A B C D. Quamobrem constat propositum.

a *decima nona, 7.*
b *quarta, 2. porism.*

PROPOSITIO VII.

Si numerus ex duobus inæqualibus quadratis compositus; ducatur in alium compositum quoque ex duobus inæqualibus quadratis, qui non sint proportionales iis ex quibus prior componitur, producetur numerus qui componetur bis ex duobus quadratis.

C 65.
A 5. B 13.
D 1. E 4. F 4. G 9.
H 1. K 2. L 2. M 3.
N 2. P 4. Q 3. R 6.

Sit A compositus ex duobus quadratis inæqualibus D E. itemque B compositus ex alijs quadratis inæqualibus F G. qui non sint proportionales ipsis D E. ductoque A in B. fiat C. Dico C componi bis ex duobus quadratis. Etenim quadratorum D. E. F. G latera sunto H K L M. ductoque L. in ipsos H K fiant N P. & ducto M in eosdem H K fiant Q R. [c] Erit igitur tam N ad P quàm Q ad R sicut H ad K. Quare ipsi N. P. Q. R. sunt proportionales. Quia verò ducere A in B [d] idem est ac ducere singulos DE in singulos F G. At ex singulis quadratis D E in singulos quadratos F G. fiunt quadrati quatuor quorum latera sunt ipsi N. P. Q. R. qui fiunt ex singulis lateribus HK in singula latera LM. patet C æqualem esse quadratis ipsorum N. P. Q. R. [e] sed quadrati ipsorum N. P. Q. R. æquantur tum quadrato summæ extremorum N R. & quadrato interualli mediorum P Q. tum quadrato summæ mediorum P Q & quadrato interualli extremorum N R. Igitur & C æquatur tum quadrato summæ extremorum, & quadrato interualli mediorum; tum quadrato summæ mediorum, & quadrato interualli extremorum, ac proinde componitur bis ex duobus quadratis. Quod erat demonstrandum.

c *decima septima 7.*
d *schol. prima, 2.*
e *sexta, huius.*

SCHOLIVM.

Hic duæ veluti conditiones apponuntur. Prima vt vterque A B componatur ex quadratis inæqualibus. Secunda vt quadrati componentes A non sint proportionales componentibus B. Quarum conditionum vt necessitas appareat, ponatur alter ipsorum puta B componi ex quadratis æqualibus F G. Igitur & latera L. M. erunt æqualia. Quare ipsi N & Q. qui fiunt ex eodem H in L & in M. æquales erunt, similiter æquales erunt ipsi P R cùm fiant ex eodem K in æquales numeros L. M. Patet igitur extremorum N R summam æquari summæ mediorum P Q. & vtrorumque etiam idem esse interuallum. Quare C. non exinde componetur bis ex duobus quadratis, sed tantum semel, nimirum ex quadrato summæ extremorum, vel mediorum, & ex quadrato interualli eorundem.

C 136.
A 17. B 8.
D 16. E 1. F 4. G 4.
H 4. K 1. L 2. M 2.
N 8. P 2. Q 8. R 2.

Iam verò quadrati D E sint proportionales quadratis F G. Ergo & latera erunt proportionalia, eritque H ad K. sicut L ad M. [f] Quare planus sub extremis H M, puta Q. æqualis erit plano sub mediis nempe ipsi P. Quamobrem cùm mediorum P. Q. nullum sit interuallum, non poterit concludi numerum C. componi ex duobus quadratis, eò quod æqualis sit quadrato summæ extremorum N R, & quadrato interualli mediorum P Q. Sed tantum ostendi poterit C componi semel ex duobus quadratis, quia æquatur quadrato summæ mediorum P Q & quadrato interualli extremorum N. R. Sed & hinc constat ipsum C esse quadratum, æqualem scilicet quadrato summæ extremorum N R. Quod & ipsum aliunde arguitur. Quia enim est D ad F vt E ad G, [g] erit & vterque D E simul seu A ad vtrumque F G simul seu ad B. sicut D ad F. Quare cùm D F sint quadrati, est A ad B in ratione quadrati ad quadratum [h] ac proinde A B sunt plani similes, [i] & ex eorum mutuo ductu productus C est quadratus.

C 100.
A 5 B 20.
D 1. E 4. F 4. G 16.
H 1. K 2. L 2. M 4.
N 2. P 4. Q 4. R 8.

f *decima nona, 7.*
g *duodecima, 7.*
h *vigesima sexta, 8.*
i *prima, 9*

Attamen in propositionis conditione dixi potius quadratos ex quibus A componitur non debere esse proportionales quadratis componentibus B. quàm A B non debere esse planos similes. Quia plani similes non omnino excludendi erant, sed tantum quatenus ex quadratis proportionalibus componuntur; nam si dentur plani similes qui componantur ex quadratis minimè proportionalibus, ij optimè satisfacient proposito quales sunt 5. & 125. quorum ille componitur ex quadratis 1. & 4. iste vero ex quadratis 4. & 121. qui non sunt illis proportionales. Vnde nihil obstat quo minus per hanc propositionem concludamus productum ex 5. in 125. componi bis ex duobus quadratis, nimirum ex 225. & 400. Itemque ex 576. & 49.

PROPOSITIO VIII.

Si duorum triangulorum rectangulorum latera circa rectum proportionalia fuerint, similia erunt triangula. Sed & si fuerit hypotenusa primi ad alterum latus eiusdem, sicut hypotenusa 2. ad alterum illius latus, similia erunt ipsa triangula.

Demonstratur hoc ab Euclide in omnibus triangulis lib. 6. prop. sexta & septima. Sit triangulum rectangulum A B C. cuius hypotenusa A. Itemque triangulum rectangulum D E F cuius hypotenusa D. & primo sit B ad E sicut C ad F. Dico triangula esse similia. Sumantur G H K quadrati ipsorum A B C. Itemque L M N. quadrati ipsorum D E F. Cùm ergo sit B ad E vt C ad F, erit & H ad M vt K ad N [a] cum vtraque ratio sit eiusdem rationis duplicata. [b] Igitur & antecedentes simul H K seu G. ad consequentes simul M N. seu ad L. erunt vt H ad M vel K ad N. Quare cùm sit G ad L vt H ad M vel vt K ad N. [c] erit & A ad D vt B ad E & vt C ad F. Atque ideo tota triangula similia erunt ex definitione. Quod erat propositum.

G 25.	H 16.	K 9.
A 5.	B 4.	C 3.
D 10.	E 8.	F 6.
L 100.	M 64.	N 36.

a undecima, 8. b duodecima, 7. c undecima, 8.

Deinde sit A ad D vt B ad E. Dico rursus similia esse triangula. Etenim quia est A ad D vt B ad E, erit & G ad L vt H ad M. Quare permutando erit G ad H vt L ad M. & diuidendo erit K ad H vt N ad M. & rursus permutando erit K ad N vt H ad M. Igitur est & C ad F vt B ad E vel vt A ad D. Ac proinde similia sunt triangula. Quod erat demonstrandum

PROPOSITIO IX.

A proportionalibus numeris formata triangula, similia sunt.

Sint proportionales numeri A B. C D. quorum quadrati E F. G H [d] à quibus formentur triangula rectangula, sit videlicet K. summa ipsorum E F, at L eorundem interuallum, M duplum medij proportionalis. Similiter sit N. summa ipsorum G H. At P eorundem interuallum. Q duplum medij proportionalis. Dico triangula K C M. N P Q. esse similia. Quia enim est A ad B vt C ad D. erit & E ad F vt G ad H & componendo erit vterque E F simul, nempe K ad F. sicut ambo G H, nempe N. ad H. Rursus quia est E ad F vt G ad H, diuidendo & conuertendo, erit F ad L, sicut H ad P. Cùm ergo sit K ad F vt N ad H, & rursus F ad L, vt H ad P. erit ex æquo K ad L. vt N ad P. [e] Quamobrem similia erunt triangula K L M. N P Q. Quod erat propositum. Eademque erit demonstratio si formentur triangula à planis similibus proportionalibus vt traditum est prop. tertia. Nam si ponantur huiusmodi plani EF. G H. ab eis formata erunt triangula K L M. N P Q. quæ ostendentur similia vt prius.

E 4.	F 1.	G 36.	H 9.		
A 2.	B 1.	C 6.	D 3.		
K 5.	L 3.	M 4.	N 45.	P 27.	Q 36.

d quinta, huius. e octaua, huius.

PROPOSITIO X. *Problema 3.*

A datis duobus triangulis non similibus, efformare alia duo.

Sit triangulum rectangulum A B C. & aliud non simile D E F, à quibus oporteat efformare alia duo; ducatur basis A in basim D, & perpendiculum B in perpendiculum E & fiant H G. Tum ducatur basis D in perpendiculum B & basis A in perpendiculum E & fiant K L. Deinde additis K & L simul fiat M. & ex duobus H G minor de maiore auferatur & supersit N. Similiter addantur H G. & fiat Q & ex ipsis K L minor de maiore detrahatur, & supersit P. Denique ducatur hypotenusa C. in hypotenusam F & fiat R. Dico M N R. & P Q R esse quæsita triangula. Primum enim ea formata esse constat à datis triangulis, vt traditum est definitione septima, si videlicet latera A D. vel B E nunc vt bases nunc vt perpendicula considerentur. Igitur restat solum probandum M N R constituere triangulum rectangulum, itemque P Q R. Ducatur C in ipsos D E & fiant T V. Cùm ergo idem C ductus in singulos D E F fecerit ipsos T V R [f] patet T V R constituere triangulum rectangulum, & quadratum ab R æquari quadratis abs T, & V. Similiter quia idem D ductus in singulos B A C, producit ipsos K H T, constituunt & hi triang. rect. & quadratus abs T æquatur quadratis abs K & H. Rursus quia idem E ductus in singulos A B C, producit ipsos L G V, constituunt & hi triang. rect. & quadratus ab V æquatur quadratis abs L. & G. Quare cùm quadratus ab R sit ostensus æqualis quadratis abs T & V, erit quadratus ab R æqualis quadratis à singulis K H L G [g] Quoniam verò ex eodem D in ipsos B A producuntur K H. erit K ad H vt B ad A. Similiter quia ex E in eosdem B A fiunt G L. erit G ad L vt B ad A, ac proinde erit K ad H vt G ad L. Quamobrem [h] aggregatum quadratorum à singulis K H L G. siu quadratus ad R. æquatur quadrato summæ extremorum seu quadrato ab M. & quadrato interualli mediorum seu quadrato ab N. Quare M N R constituunt triang. rectang. Rursus idem aggregatum

A 5.	B 12.	C 13.	
D 3.	E 4.	F 5.	
K 36	H 15.	T 39.	
L 20.	G 48.	V 52.	
M 56.	N 33.	R 65.	
P 16.	Q 63.		

f prima, huius. g decima septima 7. h sexta, huius.

K 48. G 24.
A 10. B 8. C 6.
D 5. E 4. F 3.
L 12. H 6.

E F latera circa rectum, ductoque B in C fiat K. cuius semissis numerus G. [a] area scilicet trianguli A B C. similiter ducto E in F fiat L, cuius semissis H. [b] area trianguli D E F. Cùm ergo similia sint triangula, [b] erit A ad D vt B ad E & vt C ad F. Dico itaque esse aream G ad aream H in duplicata ratione lateris B ad latus E. vel lateris C ad latus F. Cum enim plani K L habeant latera proportionalia, [c] erunt plani similes, & erit K ad L in duplicata ratione lateris B ad latus E vel C ad F. Sed quia G est dimidium ipsius K, & H est dimidium ipsius L, est G ad H vt K ad L. Igitur & G ad H est in duplicata ratione laterum B C. ad latera E F. Quod demonstrandum erat.

[a] defin. 3. [b] defin. 4. [c] decima octaua, 8.

SCHOLIVM.

Quia igitur sumpto denominatore rationis cuiuslibet, eius quadratus est denominator rationis duplicatæ illius, sequitur sumpto denominatore rationis laterum, eius quadratum esse denominatorem rationis arearum, vt in proposito paradigmate, quia rationis inter latera denominator est 2. rationis inter areas denominator est 4. quadratus ipsius 2. & sic de alijs.

PROPOSITIO III. *Problema 1.*

A duobus similibus planis numeris, triangulum rectangulum efformare.

A 3. B 6. C 12.
D 9. E 12. F 15.

Sint duo plani similes A C à quibus oporteat formare triangulum rectangulum. [d] Sumatur B medius proportionalis ipsorum A C. Et sit amborum A C. summa F, interuallum D & duplum ipsius B esto E. Patet tres D E F efformatos esse ab ipsis A B C vt traditum est definitione quinta. Dico itaque tres D E F constituere triangulum rectangulum. Quia enim F est summa amborum A C [e] erit quadratus ipsius F æqualis quadruplo plani sub A & C. & quadrato interualli ipsorum A C, qui est quadratus ipsius D, [f] At quadruplum plani sub A & C. æquatur quadruplo quadrati ipsius B. cùm A B C ponantur proportionales, [g] & quadruplum quadrati ex B, est quadratus dupli ipsius B, nimirum ipsius E. Igitur quadratus ipsius F est æqualis quadratis ipsorum D E. [h] atque adeo D E F constituunt triangulum rectangulum. Quod erat propositum.

[d] decima octaua, 8. [e] quinta 2. porism. [f] vigesima, 7. [g] Schol. quarta, 2. [h] defin. 2.

COROLLARIVM.

Summa duorum planorum similium constituit hypotenusam trianguli rectanguli.

Hinc patet quemlibet numerum statui posse hypotenusam trianguli rectanguli, cùm quilibet numerus diuidi possit in duos datam rationem seruantes, atque adeo infinitis modis componi possit ex duobus planis similibus, vnde & erui potest canon ad diuidendum quemlibet quadratum in duos quadratos infinitis modis, vt docebimus ad octauam 2. Diophanti.

PROPOSITIO IV.

Cuiuslibet trianguli rectanguli hypotenusa componitur ex duobus planis similibus.

D 100. E 64. F 36.
A 10. B 8. C 6.
G . . . . . H . . K . . L . . . . . . M

Sit hypotenusa trianguli rectanguli A & latera circa rectum B C. & ipsorum A B C quadrati D E F. ita vt D ipsis E F sit æqualis. Dico A componi ex duobus planis similibus. Vel enim A est par, vel impar. Sit primum par. Ergo & D par est, [i] & pariter par. Igitur non erit ipsorum E F alter par, alter impar, alioquin [k] compositus ex ipsis D esset impar, contra id quod ostensum est. Non erit etiam vterque ipsorum E F impar, [l] nam sic vterque ipsorum excederet pariter parem vnitate, atque adeo compositus ex ipsis D. excederet pariter parem binario, [m] & esset pariter impar tantum, at ostensus est pariter par. Reliquitur ergo vtrumque E F esse parem. Quare & vterque B C. par est. Itaque sumatur ipsi A æqualis G L atque adeo par, & addatur ei L M æqualis alteri laterum circa rectum puta C erit igitur & L M par. [n] Quare totus G M par etiam erit. Secetur ergo bifariam in K & ipsi K L sumatur æqualis H K. ita vt reliquus G H. reliquo L M seu C. sit æqualis, Cùm ergo G L componatur ex duobus G K. K L. [o] erit quadratus totius G L, seu D. æqualis quadruplo plani sub G K. K L. & quadrato interualli G H qui est F. At idem D. est æqualis quadratis E F ex hypothesi, ergo quadrati E F æquantur quadruplo plani sub G K. K L. & quadrato F. Quare ablato vtrimque F. remanet E æqualis quadruplo plani sub G K. K L. Quamobrem planus sub G K K L æquatur quadranti ipsius E, seu quadrato semissis ipsius B [p] & ipse semissis ipsius B est medius proportionalis inter G K. & K L. vnde sequitur ipsos [q] G K. K L. esse planos similes. Quamobrem A æqualis G L. componitur ex duobus planis similibus. Quod erat propositum.

[i] vigesima 1. porism. [k] Schol. vigesima tertia, 9. [l] vigesima prima 1. porism. [m] vndecima, 1. porism. [n] vigesima prima, 9. [o] quinta, 2. porism. [p] vigesima 7. [q] vigesima 8.

D 169. E 144. F 25.
A 13. B 12. C 5.
G.....H....K....L.....M

Iam vero sit A impar, atque ideo & D impar. Igitur ex ipsis E F alterum parem, alterum imparem esse necesse est. Nam siue vterque ponatur par, siue vterque impar, a erit compositus ex ipsis D par, contra hypothesim. Sit ergo E par. F impar. Igitur & B par erit, & C impar. Itaque sumpto G L æquali ipsi A, & ideo impare, addatur ei L M impari C. æqualis. b erit ergo totus G M par. Quare secetur bifariam in K & ipsi K L. sumatur æqualis H K, ita vt G H remaneat æqualis ipsi L M. Tunc, vt prius ostendemus, quadratum ex G L. seu D æquari quadruplo plani sub G K. K L. & quadrato interualli G H qui est F. & tandem quadratum E æquari quadruplo plani sub G K. K L. atque ideo planum ipsum sub G K. K L æquari quadrato semissis ipsius B. Vnde sequitur ipsos G K. K L esse planos similes. Quamobrem A componitur ex duobus planis similibus. Quod erat ostendendum.

a vigesima prima & vigesima secũda 9.
b schol. vigesimæ tertiæ 9.

SCHOLIVM.

Hinc patet qui sint illi plani similes ex quibus componitur hypotenusa trianguli. Nam si hypotenusa addatur & adimatur vtrumlibet laterum circa rectum, semisses summa, & interualli exhibebunt planos illos similes.

Vnde rursus collige si hypotenusa sit numerus par, eam semper bis componi ex duobus planis similibus integris. Nam tunc vt ostensum est, vtrumque latus circa rectum est par, quare vtrumlibet addatur & adimatur hypotenusæ, erunt summæ & interualla numeri pares, & eorum semisses in integris habebuntur. Sic posita hypotenusa 10. si ei addas & adimas 6. fiet summa & interuallum 16. & 4. quorum semisses 8. & 2. sunt plani similes ex quibus 10. constat. Rursus si eidem 10. addas & adimas alterum latus 8. fit summa & interuallum 18. & 2. quorum semisses 9. & 1. sunt alij duo plani similes ex quibus 10. componitur.

Si vero hypotenusa sit impar, cùm vt ostensum est, alterum laterum circa rectum sit par, alterum impar. Componetur hypotenusa semel tantum ex integris duobus planis similibus, qui habentur si ei addatur & adimatur latus illud quod est impar, & summæ & interualli semisses sumantur; sed si hypotenusæ addatur & adimatur latus par, tam summa quàm interuallum impar erit, atque adeo semisses eorum non habebuntur in integris.

PROPOSITIO V. *Probl. 2.*

A duobus quibuscumque inæqualibus numeris triangulum rectangulum formare.

A 2. B 5.
C 4. D 10. E 25.
F 29. G 21. H 20.

Sint duo numeri inæquales A B à quibus oportet formare triangulum rectangulum. Sint ipsorum A B quadrati C E. & productus ex A in B. esto D. Tunc duorum C E summa esto F, & eorundem interuallum G. & sit H duplum ipsius D. Dico F. G. H esse triangulum rectangulum quæsitum. Nam ipsos F G H formari ab ipsis A B vt traditum est definitione sexta manifestum est. Restat probandum eosdem F G H constituere triangulum. Quoniam ergo C E sunt plani similes, & D medius eorum proportionalis, patet ab ipsis C E formatos esse F G H, atque adeo F G H constituere triangulum rectangulum per tertiam huius. Quare constat propositum

SCHOLIVM.

Inæquales numeros esse oportet. Alioquin si æquales essent, quadrati quoque eorum essent æquales, & haberi non posset latus circa rectum quod est interuallum quadratorum. Cæterum patet modum hunc formandi triangulum à duobus quibuscumque numeris non differre ab eo qui traditus est propositione tertia, si loco laterum sumantur ipsa quadrata & ab ipsis concipiatur formari triangulum.

PROPOSITIO VI.

Si fuerint quatuor numeri proportionales, aggregatum quadratorum à singulis, æquatur quadratis summæ extremorum, & interualli mediorum. Itemque quadratis summæ mediorum, & interualli extremorum.

H 8. K 1.
A 2. B 4. C 3. D 6.
G 7. L 4.

Sint A B C D quatuor numeri proportionales, sit videlicet A ad B vt C ad D. & sit extremorum summa H, mediorum interuallum K. Rursus sit mediorum summa G. interuallum extremorum L. Dico quadratorum à singulis A B C D aggregatum æquari tum quadratis ipsorum H. K. tum quadratis G L. Quia enim c quadratus H æqualis est quadratis partium A & D & duplo plani sub A & D seu plani sub B & C. duplum autem plani sub B & C cum quadrato inter-

c quarta 2.

quadratorum à singulis K H. L G. seu quadratus ab R æquatur quadrato summæ mediorum seu quadrato abs Q. & quadrato interualli extremorum seu quadrato abs P. Quamobrem & ipsi P Q R. constituunt triang. rectang. Itaque ex omni parte constat propositum.

SCHOLIVM.

A 6. B 8. C 10.	D 3. E 4. F 5.
K 24. H 18.	L 24. G 32.
M 48. N 14. P —	Q 50. R 50.

Data duo triangula non debent esse similia, alioquin ab illis vnicum tantum efformabitur triangulum. Nam si sit A ad B vt D ad E, a erit planus sub extremis L. æqualis plano sub medijs K. Quamobrem ipsorum K L. internallum P. nullum erit, nec formari poterit triangulum P. Q. R. Sed tantum ex summa ipsorum K L fiet latus M. & ex interuallo ipsorum H G. fiet latus N. vnde constituetur vnicum triangulum M N R. Cæterum Q. æqualis erit ipsi R.

a *decima nona, 7.*

PROPOSITIO XI. *Probl.* 4.

Inuenire tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ad solidum sub basibus sit in ratione quadrati numeri ad quadratum numerum.

H 100.	
R 10. V 12. T 48.	
A 5. B 4. C 3.	
D 41. E 40. F 9.	
G 34. K 30. L 16.	
P 1200. M 48.	
Q 4800. N 432.	

Exponatur triang. rect. A B C. cuius hypotenusa A perpendiculum B. basis C. b Deinde ab ipsis A & B formetur aliud triang. rect. ita vt hypotenusa D sit summa quadratorum, perpendiculum E sit duplum producti multiplicationis & basis F sit interuallum quadratorum, nimirum quadratus ipsius C. Denique ab ipsis A C. formetur etiam tertium triangulum, cuius hypotenusa G. sit summa quadratorum, perpendiculum K duplum producti, & basis L differentia quadratorum, nempe quadratus ipsius B. Dico tria hæc triangula præstare quod requiritur. Ducto enim E in K fiat P. quo ducto in B fiat Q. similiter ducto C in L fiat M, quo ducto in F fiat N. Dico Q solidum sub perpendiculis, ad N solidum sub basibus habere rationem quadrati ad quadratum. Sumatur R duplum ipsius A. & ex B in C fiat V. quo ducto rursus in B fiat T. Quia ergo sumptis tribus numeris B C. & B rursus, c idem fit numerus quouis ordine inter se ducatur, ducto autem B in C & producto V in B fit T. At ducto B in B & producto L in C. fit M. sunt vtique T & M æquales. Quia vero ex B in A bis, seu ex B in R fit E, & ex C in R fit K. consideratis quatuor numeris B. R. C. R. idem fiet numerus quouis ordine inter se ducantur. Sed ducto B in R. vnde fit E, & ducto C in R vnde fit K, & demum ducto E in K producitur P. Igitur si ducatur R in R vnde fit H, & B in C. vnde fit V. ac demum V ducatur in H. fiet idem P. Cùm igitur idem V ductus in H & in B producat ipsos P T seu P M. d erit H ad B sicut P ad M. e Quare qui fit ex mutuo ductu mediorum B P. nempe solidus Q. fit etiam ex ductu extremorum H M. Cùm igitur ex eodem M in ipsos H & F fiant solidi Q N. erit Q ad N. sicut H ad F. Quare cùm H & F sint quadrati, erit Q ad N in ratione quadrati ad quadratum. Quod demonstrandum erat.

b *quinta, huius.*
c *tertia, 1. porism.*
d *decima septima, 7.*
e *decima nona, 7.*

SCHOLIVM.

Notatu dignissimum est iisdem prorsus manentibus triangulis, solidos Q N quadrupliciter variari posse prout latera circa rectum nunc fient bases, nunc perpendicula, & omnibus tamen modis ratio solidi ad solidum erit qua quadrati ad quadratum, quod miraculo simile videtur.

H 100.	H 100.
A 5. B 4. C 3.	A 5. C 3. B 4.
D 41. E 40. F 9.	D 41. E 40. F 9.
G 34. K 30. L 16.	G 34. K 30. L 16.
Q 4800. N 432.	Q 3600. N 576.

Primus casus est, qui in demonstratione exhibetur, quo probatum est esse Q ad N. sicut H ad F.

Secundus est cùm reliquis omnibus inuariatis manentibus B sit basis, & C perpendiculum. Et tunc solidus sub ipsis C E K nempe Q. ad solidum sub B F L. seu ad N est in ratione quadrati H ad quadratum L. quod iisdem prorsus argumentis probatur. Itaque in his duobus casibus solidus ad solidum est vt quadratus H ad quadratum F, vel ad quadratum L, prout solidus N. fit à producto ex quadratis F L in latus ipsius F vel in latus ipsius L.

A 5. B 4. C 3.
D 41. F 9. E 40.
G 34. K 30. L 16.
EQ 1080. N 1920.

Tertius casus est cùm primi & tertij trianguli lateribus in eadem dispositione manentibus, secundi latera transponuntur, & fit E basis F perpendiculum. Et tunc solidus Q ad solidum N. se habet vt quadratus F ad quadratum L. Quod ita probatur. Quia E K producuntur ex eodem duplo ipsius A in ipsos B C. patet esse B ad C vt E ad K. f Igitur ex B in K idem fit numerus qui fit ex C in E. Quare cùm producto ex B in K ducto in F fiat Q. Et producto ex C in E

f *decima nona, 9.*

d ectima ſeptima 7. *ducto in L. fiat N. patet eodem numero ducto in ipſos F & L. fieri ipſos Q. & N. Quare eſt Q ad N vt F ad L. Quod erat propoſitum.*

R 10.		
A 5.	B 4.	C 3.
D 41.	E 40.	F 9.
G 34.	L 16.	K 30.
Q 2560.	N 810.	

b tertia, 1. poriſm.

Quartus denique caſus eſt cùm lateribus 1. & 2. trianguli eodem loco manentibus, mutantur latera tertij, & fit L perpendiculum K baſis. Tuncque ſolidus Q ad ſolidum N. ſe habet vt quadratus ipſius L ad quadratum ipſius F. Quod ſic probatur. Quia ex B in R fit E. ſi conſiderentur quatuor numeri B. R. B. L. b idem fiet numerus quouis ordine inter ſe ducantur. Igitur cùm ducto B in R, & producto E in B, & producto rurſus in L. fiat Q ſolidus, idem ſolidus fiet ducto B in B. & producto, quadrato ſcilicet ipſius B ducto in L ſibi æqualem, & rurſus producto, quadrato ſcilicet ipſius L ducto in R. Quare Q. fit ex R in quadratum ipſius L. Eodem prorſus argumento probatur ſolidum N. fieri ex R in quadratum ipſius F. Proinde patet eſſe Q ad N. vt quadratus ipſius L ad quadratum ipſius F.

Vnde colligas in hoc caſu Q ad N eſſe non ſolum in ratione quadrati ad quadratum, ſed & in ratione quadratoquadrati ad quadratoquadratum, cùm L. F ſint quadrati ac per conſequens quadrati eorum ſint quadratoquadrati quorum latera ipſi B. C.

Supereſt vt moneam licere loco cuiuſlibet ſic inuentorum triangulorum; aliud ſimile ponere, & eadem manebit ſemper quæ prius, ratio ſolidi ad ſolidum, quod vnica demonſtratione omnibus caſibus conueniente demonſtrari poteſt, hac arte. Loco trianguli G L K ſumatur triangulum illi ſimile T. V. X. & latera homologa intelligantur eadem ratione diſpoſita, & ſolidus ſub ipſis B E V eſto T. ſolidus ſub ipſis C F X eſto Z. Dico eſſe T ad Z ſicut Q ad N. Quia enim idem productum ex B in E ductum tum in L tum in V. producit ſolidos Q T. erit Q ad T ſicut L ad V. Similiter quia idem productum ex C in F ductum in ipſos K X producit N. & Z. erit N ad Z ſicut K ad X. ſed eſt L ad V vt K ad X ex hypotheſi ob ſimilitudinem triangulorum. Igitur eſt etiam Q ad T vt N ad Z. & permutando eſt Q ad N. vt T ad Z. Quod demonſtrandum erat.

A 5.	B 4.	C 3.
D 41.	E 40.	F 9.
G 34.	L 16.	K 30.
T 17.	V 8.	X 15.
Q 2560.	N 810.	
Y 1280.	Z 405.	

PROPOSITIO XII. *Probl. 5.*

Inuenire duo triangula rectangula, vt planus ſub perpendiculis, ſuperet planum ſub baſibus numero quadrato, vel cubo, vel quadratoquadrato, vel quadratocubo, vel cubocubo.

D 6.					
A 5.	B 4.	C 3.			
E 13.	F 5.	G 12.	Q 36.	K 20.	R 16.
H 52.	K 20.	L 48.	S 144.	N 80.	T 64.
M 108.	N 80.	P 192.	V 576.	X 320.	Y 256.

c quinta huius. *d prima, huius.*

Exponatur quodlibet triang. rect. A B C. ita vt D duplum perpendiculi C ſit maius baſi B. & ab ipſis [c] formetur triangulum H K L. ita vt H ſit aggregatum quadratorum, baſis K ſit interuallum eorundem & perpendiculum L. ſit duplum producti ex B in D. Deinde ſingula latera H K L. diuidantur per baſim B & [d] fiat aliud triangulum ſimile E F G.

Dico primo haberi duo triangula A B C. E F G. ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus quadrato numero. Etenim ducto C in G fiat Q. & quia ducto B in F fit K ex constructione, auferatur K ex Q. & ſuperſit R. Dico R eſſe quadratum. Quia enim D eſt duplus ad C. productus bis ex B in D nempe L æquatur quadruplo producti ex B in C. Quare diuiſo L per B quotiens G eſt quadruplus ad C. Cùm ergo ex C in G fiat Q. erit Q quadruplus quadrati ipſius C. ſeu æqualis quadrato ipſius D. Proinde cùm K ſit interuallum quo quadratus ex D. nempe Q ſuperat quadratum ex B patet auferendo K ex Q reſiduum R eſſe quadratum ipſius B. Quod erat propoſitum.

Dico ſecundo haberi duo triangula A B C, H K L, ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus numero cubo. Etenim ducto C in L fiat S. & ducto B in K fiat N. quo detracto ex S. ſuperſit T. Dico T eſſe cubum. Quia enim ex eodem C in ipſos G L fiunt Q S. erit Q ad S vt G ad L. Rurſus, quia ex eodem B in ipſos F K, fiunt K N. erit K ad N vt F ad K. Quare cùm ob ſimilitudinem triangulorum ſit F ad K vt G ad L. erit & Q ad S. vt K ad N. Ideo cùm ſit vt totus Q ad totum S. ſic ablatus K ad ablatum N. erit & reliquus R ad reliquum T. in eadem ratione. Sed rationis F ad K ſeu G ad L denominator eſt B ex conſtructione. Igitur & rationis R ad T idem B denominator erit, ac proinde ex B in R fiet T. Igitur cùm ex B in ſuum quadratum R. fiat T. erit T cubus ipſius B. Quod erat propoſitum.

Rurſus ſi B ducatur in triangulum H K L, & fiat aliud ſimile M N P. Dico haberi duo triangula A B C. M N P. ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus numero quadratoquadrato. Etenim ſi C ducatur in P vnde fiat V. & B ducatur in N vnde fiat X quo detracto ex V relinquatur Y. Dico Y eſſe quadratoquadratum. Nam eodem quo prius argumento oſtendemus eſſe

T ad

T ad Y ſicut K ad N vel L ad P. Quare cùm rationis K ad N vel L ad P denominator ſit B ex conſtructione; erit idem B denominator rationis T ad Y ac proinde ex B in ſuum cubum T fiet Y. Quare Y erit quadratoquadratus ipſius B. ſimiliter, ſi B ducatur rurſus in triangulum M N P. fiet aliud ſimile quod cum triangulo A B C exhibebit duo triangula ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus numero quadratocubo. nimirum quadratocubo ipſius B. Et ſi rurſus B ducatur in vltimum triangulum, fiet aliud quod cum ipſo A B C duo exhibebir triangula, ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus cubocubo ipſius B. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum.

PROPOSITIO XIII. *Probl. 6.*

Inuenire duo triangula rectangula vt planus ſub perpendiculis cum plano ſub baſibus, faciat quadratum, uel cubum, vel quadratoquadratum, vel quadratocubum, vel cubocubum.

	D 10.				
A 13.	B 12.	C 5.			
E 20 $\frac{1}{3}$.	F 3 $\frac{2}{3}$.	G 20.	Q 100.	K 44.	R 144.
H 244.	K 44.	L 240.	S 1200.	N 528.	T 1728.
M 2928.	N 528.	P 2880.	V 14400.	X 6336.	Y 20736.

Exponatur triang. rect. A B C. ita vt D duplum baſis C. ſit minus perpendiculo B. [a] Et ab ipſis B D formetur aliud triangulum H K L vt ſupra, cuius omnia latera diuidantur per B & [b] fiat triangulum ſimile E F G. Dico primo duo triangula A B C. E F G huiuſmodi eſſe vt planus ſub perpendiculis cum plano ſub baſibus faciat quadratum. Etenim ducto C in G fiat Q. cui addatur K productus ex B in F ex conſtructione & fiat R. dico R eſſe quadratum. Quia enim D eſt duplus ad C. & ex B in D bis fit L, idem L fiet ex B in quadruplum ipſius C. Quare cùm diuidendo L per B fiat G. erit G quadruplus ipſius C. proinde Q productus ex C in G æquabitur quadruplo quadrati ipſius C, ſeu quadrato ipſius D. cùm ergo K ſit interuallum quo quadratus B ſuperat quadratum ex D nempe ipſum Q. addendo Q. & K ſumma R. erit quadratus ipſius B. Quod erat propoſitum.

[a] *quinta huius.* [b] *prima, huius.*

Dico ſecundo duo triangula A B C. H K L. talia eſſe vt planus ſub perpendiculis cum plano ſub baſibus faciat cubum. Nam ducto C in L fiat S. ductoque B in K fiat N quo addito ad S. fiat T. Dico T eſſe cubum. Etenim quia ex eodem C in G & in L. fiunt Q S. & ex eodem B. in ipſos F K fiunt K N. erit Q ad S. vt G ad L. & erit K ad N. vt F ad K. ſed eſt F ad K. vt G ad L. ob ſimilitudinem triangulorum, ergo eſt & Q ad S vt K ad N. Quare & erunt antecedentes ſimul nempe R ad conſequentes ſimul nempe ad T vt N. ſed B eſt denominator rationis K ad N ex conſtructione, ergo & rationis R ad T. Quamobrem ex B in R fiet T. vnde cùm R ſit quadratus ipſius B vt oſtenſum eſt, erit T cubus eiuſdem B. Quod erat propoſitum.

Rurſus ſi B ducatur in triangulum H K L. & fiat aliud ſimile M N P. Dico tertio duo triangula A B C. M N P. huiuſmodi eſſe vt planus ſub perpendiculis cum plano ſub baſibus faciat quadratoquadratum. Etenim ſi C. ducatur in P & fiat V, & B ducatur in N. & fiat X. quo addito ad V fiat Y. Dico Y eſſe quadratoquadratum. Nam eodem quo prius argumento oſtendemus eſſe T ad Y, ſicut N ad X. Quare cum ex B in N fiat X, neceſſe eſt etiam ex B in T fieri Y. ac proinde cùm T oſtenſus ſit cubus ipſius B, erit N quadratoquadratus eiuſdem B. Similiter ſi B ducatur rurſus in triangulum M N P. fiet aliud ſimile quod cum triangulo A B C. oſtendetur eſſe hujuſmodi vt planus ſub perpendiculis cum plano ſub baſibus faciat quadratocubum ipſius B. Ac demum ſi B ducatur rurſus in vltimum triangulum, fiet aliud, quod cum ipſo A B C, oſtendemus eſſe huiuſmodi, vt planus ſub perpendiculis cum plano ſub baſibus faciat cubocubum ipſius B. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum.

SCHOLIVM.

In hoc & in præcedenti problemate accidit vt inuenta duo triangula ſi per eundem numerum vtraque multiplicentur aut diuidantur, producant alia duo idem præſtantia, quod vnico exemplo ſufficiet probare. Multiplica per 3. triangula 13. 12. 5. *&* 20 $\frac{1}{3}$. 3 $\frac{2}{3}$. 20. *fient alia duo,* 39. 36. 15. *&* 61. 11. 60. *vbi vides planum ſub baſibus* 900. *cum plano ſub perpendiculis* 396. *efficere quadratum* 1296. *à latere* 36. *perpendiculo ſcilicet primi trianguli. Demonſtratio facilis eſt, & ideo eam tibi relinquo indagandam.*

PROPOSITIO XIV. *Probl. 7.*

Inuenire tria triangula rectangula, vt ſolidus ſub hypotenuſis, ad ſolidum ſub perpendiculis ſe habeat vt quadratus ad quadratum.

a duodecima, huius. b decima huius.

D 6.
A 5. B 4. C 3.
E 13. F 5. G 12.
H 65. K 63. L 16.
M 4225. N 576.

Exponatur triang. rectang. quodcumque A. B. C. ita vt D duplum perpendiculi C. ſit maius baſi B.[a] & ab eo formetur aliud E F G, ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus numero quadrato. Tum à duobus hiſce triangulis[b] formetur tertium H K L. ita vt H ſit productus ex A in E At K baſis fiat addito producto ex G in B. ad productum ex F in C. Denique perpendiculum L fiat auferendo productum ex F in B. à producto ex G in C. Dico tria hæc triangula ſatisfacere propoſito, nimirum M ſolidum ſub hypotenuſis ad N ſolidum ſub perpendiculis eſſe in ratione quadrati ad quadratum. Quia enim ex A, in E fit H ex conſtruct. patet ſolidum M factum ex H in H eſſe quadratum ipſius H. Quia vero vt probatum eſt 12. huius ex C in G fit quadratus ipſius D. At L. eſt quadratus ipſius B. ex conſtruct. & per 12. huius. Patet ſolidum N. qui fit ex quadrato in quadratum, eſſe quadratum cuius latus ſcilicet eſt productus ex B in D. Quare cum vterque M & N. ſit quadratus, patet propoſitum.

c decima tertia, huius. d decima huius. e decima tertia, huius.

D 10.
A 13. B 12. C 5.
E 20 1/3. F 3 2/3. G 20.
H 264 1/3. K 221 2/3. L 144.

Aliter expoſito triangulo A B C. ita vt D duplum perpendiculi ſit minus baſi B[c] formetur aliud E F G, ita vt planus ſub perpendiculis cum plano ſub baſibus faciat quadratum. Et ab ipſis duobus[d] efformetur tertium H K L. ita vt hypotenuſa H fiat ex A in E. baſis K ſit, quod reſtat à producto ex B in G detrahendo productum ex C in F. Denique perpendiculum L. ſit ſumma productorum ex B in F & ex C in G.[e] Erit igitur L quadratus ipſius B. Quare cum conſtet etiam per decimam tertiam ex C in G produci quadratum ipſius D. patet ſolidum ſub ipſis C G L. productum ex quadrato in quadratum, eſſe quadratum, cuius ſcilicet latus eſt productus ex B in D. At ſolidus ſub hypotenuſis, vt prius oſtendetur æqualis quadrato ipſius H. Igitur cùm vterque ſolidus ſit quadratus, conſtat abundè propoſitum.

SCHOLIVM.

Quæ hactenus tradita ſunt, ſatis ſuperque ſufficiunt ad abſolutam Diophantæorum problematum enodationem. Cæterum placuit his ſubnectere ſequentia Theoremata non inutilia de triangulis rectangulis, quæ protulit primus Franciſcus Vieta in libris zeteticorum, quamuis ea ſyntheticè minimè demonſtrarit.

PROPOSITIO XV.

In triangulo rectangulo, quotlibet laterum circa rectum, eſt medium proportionale inter aggregatum & interuallum alterius lateris & hypotenuſæ. Et è conuerſo, ſi fuerint tres inæquales numeri, quorum vnus ſit medius proportionalis inter ſummam & interuallum aliorum, conſtituent triangulum rectangulum ipſi tres numeri.

A 3. B 4. C 5.
D 2. G 16. E 8.

Sit triangulum rectangulum A B C. & alterius lateris A & Hypotenuſæ C interuallum ſit D. aggregatum E. Dico reliquum latus B eſſe medium proportionale inter ipſos D E. ſumpto enim G. quadrato ipſius B, patet ex hypotheſi quadratum ex A cum quadrato G æquari quadrato ipſius C. Quare G eſt interuallum quo quadratus ex C. ſuperat quadratum ex A.[f] Quamobrem G fiet ex D in E, ex interuallo ſcilicet in ſummam.[g] Igitur B eſt medius proportionalis inter D & E. Quod demonſtrandum erat.

f tertia, 2. g vigeſima, 7. h vigeſima, 7. i tertia, 2. poriſm.

E conuerſo ponatur B medius proportionalis inter D E interuallum & ſummam ipſorum A C. Dico tres A B C conſtituere triang. rect. Quia enim ſunt proportionales D B E,[h] ex D in E fiet G quadratus ipſius B.[i] Atqui ex interuallo D in ſummam E fit interuallum quadratorum ex A & C. Conſtat ergo G eſſe interuallum quo quadratus ex C ſuperat quadratum ex A. Ac ideo G ſeu quadratus ex B cum quadrato ex A æquatur quadrato ex C. Quamobrem A B C conſtituunt triangulum rectangulum. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XVI.

In triangulo rectangulo quadratus vnius laterum circa rectum, æquatur quadrato interualli inter alterum latus & hypotenuſam, vnà cum duplo producti ex eodem interuallo in idem latus, & è conuerſo.

A 4. B 3. C 5.
G 4. D 2.

Sit triang. rect. A B C. & ſit D interuallum inter hypotenuſam C. & latus B, & ipſius D duplus eſto G. Dico quadratum alterius lateris A æquari quadrato ipſius D, & producto ex G in B. Quia enim B D ſimul æquantur ipſi C.[k] erit quadratus ex C. æqualis quadratis ipſorum B D, & duplo producti ex B in D. hoc eſt quadratis ex B & D, & producto ex G in B. At rurſus ex hypotheſi quadratus ex C æquatur quadratis ipſorum A B. Igitur quadrati ex A & B. æquantur quadratis ex B & D & producto ex G in B. Quare ablato

k quarta, 2.

vtrimque communi quadrato ex B. remanet quadratus ex A æqualis quadrato ex D, & producto ex G in B. Quod demonstrandum erat.

Conuersum eadem facilitate ostendetur. Sit enim quadratus ex A. æqualis quadrato ex D interualli ipsorum B C. & producto ex G in B. Dico A B C constituere triang. rect. Nam vt priùs quadratus ex C æquatur quadratis ex B & D & producto ex G in B. Ergo loco quadrati ex D & producti ex G in B. sumendo quadratum ex A illis æqualem, erit quadratus ex C æqualis quadratis ex A & B. Ac proinde A B C constituent triang. rect. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XVII.

In triangulo rectangulo, si duplum interualli lateris vnius & hypotenusæ ducatur in hypotenusam, fit numerus æqualis quadrato reliqui lateris, vna cum quadrato eiusdem interualli; & è conuerso.

A 4. B 3. C 5.
G 4. D 2.

Sit eadem figura quæ prius, dico productum ex G in C æquari quadratis ipsorum A D.[a] Quia enim quadratus ex A æquatur producto ex G in B & quadrato ex D, si addatur vtrimque quadratus ex D, erunt quadrati ex A & D simul æquales producto ex G in B & duplo quadrati ex D. sed quia G est duplus ad D, productus ex G in D æquatur duplo quadrati ex D. ergo quadrati ex A & D æquantur productis ex G in B & in D,[b] seu producto ex G in C qui componitur ex ipsis B D. Quod erat propositum.

E conuerso ponantur quadrati ex A & D æquales producto ex G in C. dico ipsos A B C constituere triang. rect. [c] Quia enim productus ex G in C. æquatur productis ex G in B & in D. & productus ex G in D æquatur duplo quadrati ex D, constat quadratos ex A & D æquari producto ex G in B & duplo quadrati ex D. Quare auferendo vtrimque communem quadratum ex D. remanet quadratus ex A æqualis producto ex G in B & quadrato ex D. [d] Quamobrem A B C constituunt triang. rect. Quod demonstrandum erat.

a *decima sexta, huius.*
b *prima, 2.*
c *prima, 2*
d *decima sexta, huius.*

PROPOSITIO XVIII.

Si duplum compositi ex vno latere & hypotenusa ducatur in hypotenusam, productus æquatur quadrato eiusdem compositi, & reliqui lateris quadrato. Et è conuerso.

Sit triang. rect. A B C. & sit H summa lateris B & hypotenusæ C. & sit K duplum ipsius H. dico productum ex K in C. æquari quadratis ipsorum A H[e] Nam quadratus ex H æquatur quadratis partium B. C. & producto bis ex B in C. Quare addendo vtrimque quadratum ex A. Quadrati ex A & H æquantur quadratis singulorum A B C & producto bis ex B in C. Quia vero K continet bis vtrumque B C. ducere C in K idem est ac ducere C in seipsum, & in B bis. Ergo productus ex K in C. æquatur duplo quadrati ex C, & producti ex B in C. Proinde loco vnius quadrati ex C. sumendo quadratos illi æquales ex A & B. fiet productus ex K in C. æqualis quadratis singulorum A B C. & producto bis ex B in C. hoc est quadratis ipsorum A. H. Quod erat ostendendum.

A 4. B 3. C 5.
K 16. H 8.

e *quarta, 2.*

E conuerso si ponantur quadrati ex A & H. æquales producto ex K in C. Dico A B C constituere triang. rect. Nam vt prius ostendemus quadratos ex A & H. æquari quadratis singulorum A B C & duplo producti ex B in C. vnde sequitur ex hypothesi productum ex K in C. æquari quadratis singulorum A B C. & producto bis ex B in C. At vt prius productus ex K in C ostendetur æqualis duplo quadrati ex C & producti ex B in C. Igitur & quadrati singulorum A B C, cum duplo producti ex B in C. æquabuntur duplo producti ex B in C & duplo quadrati ex C. Quare auferendo vtrimque duplum producti ex B in C. & quadratum ex C semel, remanent quadrati ex A & B æquales quadrato ex C. Ac proinde A B C constituunt triangulum rectangulum. Quod demonstrandum fuit.

SCHOLIVM.

His subiicere libet aliud non iniucundum, neque inutile theorema, quod ipsi commenti sumus.

PROPOSITIO XIX.

In triangulo rectangulo quadratus summæ laterum æqualis est numero qui fit bis ex aggregato hypotenusæ & baseos, in aggregatum hypotenusæ & perpendiculi; & è conuerso.

D 12.
A 3. B 5. C 4.
E 8. F 9.

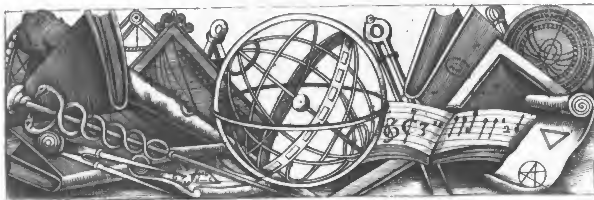
[a] prima, 2. porism.

Esto triangulum rectangulum A B C. cuius hypotenusa B. summa laterum D. aggregatum ipsorum A B sit E, & F aggregatum ipsorum B C. Dico quadratum ipsius D. æquari duplo producti ex E in F. [a] Etenim quadratus ex D. æquatur quadratis singulorum A B C & duplo producti ex quolibet in quemlibet ex alijs. At ex hypothesi quadratus ipsius B æquatur quadratis ipsorum A C. Quare loco quadratorum ex A & C. sumendo quadratum ex B. erit quadratus ex D æqualis duplo quadrati ex B, & duplo producti ex A in C. & ex B in ipsos A C. Rursus autem quia E continet ipsos A B. & F continet ipsos B C. duplum producti ex E in F continet bis quadratum ipsius B, & duplum productorum ex A in C. & ex B in ipsos A C. Igitur duplum producti ex E in F æquatur quadrato ex D. Quod erat demonstrandum.

[b] prima, 2. porism.

Deinde sint tres numeri A B C. quorum summa D. & aggregatum ipsorum A B sit E, & aggregatum ipsorum B C. sit F. & duplum producti ex E in F æquetur quadrato ex D. Dico ipsos A B C. constituere triangulum rectangulum. Nam vt prius [a] quadratus ex D. æquatur quadratis ipsorum A B C. & duplo producti ex quolibet in quemlibet ex alijs. At duplum producti ex E in F æquatur duplo quadrati ex B & duplo producti ex quolibet in quemlibet ex aliis. Quare auferendo vtrimque duplum producti ex quolibet in quemlibet ex alijs, manet duplum quadrati ex B æquale quadratis singulorum A B C. & rursus auferendo vtrimque quadratum ex B, remanet adhuc quadratus ex B. æqualis quadratis ipsorum A C. Ac proinde A B C. constituunt triangulum rectangulum. Quod erat ostendendum.

FINIS.



DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM.

LIBER PRIMVS.

CVM animaduerterem te (obseruandissime mihi Dionysi) studio discendi explicationem quæstionum earum quæ in numeris proponuntur teneri; aggressus sum eius rei viam rationemque fabricari, ex ipsisque fundamentis, quibus tota res nititur, initio petito, naturam ac vim numerorum constituere. Quod negotium vt videatur fortasse difficilius (quippe ignotum adhuc) cùm animi incipientium ad bonam de re dextrè conficienda spem concipiendam nequaquam sint procliues: tamen cùm tua alacritas, tum mea demonstratio efficiet, vt facilè id comprehendas. Celeriter enim addiscunt, quorum ad discendi cupiditatem doctrina accedit.

ΤΗΝ εὕρεσιν τῶν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς προβλημάτων, τιμιώτατέ μοι Διονύσιε, γινώσκων σε σπουδαίως ἔχοντα μαθεῖν, ὀργανῶσαι τὴν μέθοδον ἐπειράθην, ἀρξάμενος ἀφ' ὧν συνέστηκε τὰ πράγματα θεμελίων, ὑποστῆσαι τὴν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς φύσιν τε καὶ δύναμιν. ἴσως μὲν οὖν δοκεῖ τὸ πρᾶγμα δυσχερέστερον, ἐπειδὴ μήπω γνώριμόν ἐστι, δυσέλπιστοι γὰρ εἰς κατόρθωσίν εἰσιν αἱ τῶν ἀρχομένων ψυχαί, ὅμως δ' εὐκατάληπτόν σοι γενήσεται διὰ τὴν σὴν προθυμίαν, καὶ τὴν ἐμὴν ἀπόδειξιν. ταχεῖα γὰρ εἰς μάθησιν ἐπιθυμία προσλαβοῦσα διδαχήν.

In primum Librum Diophanti Commentarij.

QVÆCVNQVE ante primam quæstionem præmisit Diophantus, ea definitionum & principiorum locum obtinent. Sed velut ad altiora festinans, hæc mira breuitate perstrinxit, vt non tam ea explicare voluisse videatur, quàm indicare, tyronésque admonere, vt nonnisi horum cognitione iam probè instructi ad hosce libros euoluendos accedant. Quod sanè non obscuris verbis professus est, definitione decima vndecimáque, cùm ait eum qui hoc negotij suscipit in additione, subductione, & multiplicatione specierum iam exercitatum esse debere, necnon in æquationibus ritè præparandis apprimè versatum. Sed & Xilander hic mutus est, & istarum definitionum obscuritatem minimè dissimulans, vt laborem eas explicandi declinet, lectorem ad suam Algebram amandat. Scholiastes autem Græcus, more suo, multa, sed ea plerunque futilia, vel à scopo Diophanti prorsus aliena nobis obtrudit. Ego media incedens via, quæ obscuriora videntur breuiter enodanda suscepi, nec tamen inutilia, vel trita & passim obuia persequi statui, præsertim cùm omnia quæ his definitionibus continentur, in omnibus quotquot à quocunque authore extant de logistica, libris, reperiantur. Cæterum est quod moneam in Græco sine vlla distinctione hasce definitiones haberi, quas ego distinguendas numeris putaui, vt sic facilius explicari, citarique commodius possint.

DEFINITIO I.

Ἀλλὰ καὶ πρὸς τοῖς δὲ γινώσκοντί σοι πάντας τοὺς ἀριθμοὺς συγκειμένους ἐκ μονάδων πλήθους τινὸς, φανερὸν καθέστηκεν εἰς ἄπειρον ἔχειν τὴν ὕπαρξιν. τυγχανόντων δὴ οὖν ἐν τούτοις, ὧν μὲν τετραγώνων οἵ εἰσιν ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος, ὄντος δὲ ὁ ἀριθμὸς καλεῖται πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ὧν δὲ κύβων οἵ εἰσιν ἐκ τετραγώνων ἐπὶ τὰς αὐτῶν πλευρὰς πολλαπλασιασθέντων, ὧν δὲ δυναμοδυνάμεων οἵ εἰσιν ἐκ τετραγώνων ἐφ' ἑαυτοὺς πολλαπλασιασθέντων, ὧν δὲ δυναμοκύβων οἵ εἰσιν ἐκ τετραγώνων ἐπὶ τοὺς ἀπὸ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς κύβους πολλαπλασιασθέντων, ὧν δὲ κυβοκύβων οἵ εἰσιν ἐκ κύβων ἐφ' ἑαυτοὺς πολλαπλασιασθέντων, ἔκ τε τῆς τούτων ἤτοι συνθέσεως, ἢ ὑπεροχῆς, ἢ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ λόγου τοῦ πρὸς ἀλλήλους ἢ καὶ ἑκάστου ἢ καὶ ἑκάστων πρὸς τὰς ἰδίας πλευρὰς συμβαίνει πλέκεσθαι πλεῖστα προβλήματα ἀριθμητικὰ· λύεται δὲ βαδίζοντός σου τὴν ὑποδειχθησομένην ὁδόν.

Verum etiam præter hæc intelligenti tibi omnes numeros compositos esse è quadam multitudine vnitatum, liquet eos augmentum in infinitum capere. Cùm ergo in his quidam sint quadrati, qui fiunt numero aliquo in se multiplicato, qui numerus latus quadrati dicitur; aliqui cubi qui existunt quadratis in sua multiplicatis latera; alij rursus quadratoquadrati, qui gignuntur quadratis in seipsos ductis; nonnulli quadratocubi, quos quadrati in cubos ab eodem profectos latere ducti procreant; quidam denique cubocubi qui cubis in seipsos ductis nascuntur: vsuuenit, vt ex horum vel compositione, vel quo præstant alij alijs, vel multiplicatione, vel ratione inter se, aut cuiuslibet, quorumlibetve ad sua latera, plurimæ nectantur arithmeticæ quæstiones, quæ soluantur tamen, si ea quam commonstrabimus via incedas.

IN DEFINITIONEM I.

Qvamvis species, vel (vt alij vocant) potestates, quibus velut elementis vtitur logistica in infinitam multitudinem excrescant, nec earum certus sit & determinatus numerus, tamen Diophantus de quinque prioribus tantùm tractationem instituit, quæ sunt Quadratus, cubus, Quadratoquadratus, Quadratocubus & cubocubus, ratus scilicet has sufficere ad implicatissimas quasque quæ hactenus excogitatæ sunt, quæstiones dissoluendas. Harum igitur hic affert definitiones. Et Quadratum quidem cubúmque definit vt Euclides. Reliquas verò tres, per ipsam nominum impositionem. Nam quadratoquadratum vocat, numerum qui fit ex quadrato in quadratum, idest in seipsum. Quadratocubum verò, qui fit ex quadrato in cubum ab eodem profectum latere. Denique cubocubum qui fit ex cubo in cubum, hoc est in seipsum. Vbi aduertendum à recentioribus omnibus quotque ante Diophantum editum logistices rudimenta tradidere, Quadratocubum vocari nunc supersolidum, nunc surde solidum, nunc etiam Primum Relatum. Cubocubum verò, ab iisdem dici Quadratocubum, quia videlicet est quadrati cubus, vel cubi quadratus, quod adnotasse operæ pretium duxi, nequem in authoribus legendis nominum ambiguitas remoretur.

DEFINITIO II.

Καλεῖται οὖν ὁ μὲν τετράγωνος, δύναμις, καὶ ἔστιν αὐτῆς σημεῖον τὸ δ ἐπίσημον ἔχον υ, δ^υ. ὁ δὲ (ἐκ τετραγώνου ἐπὶ τὴν αὐτοῦ πλευρὰν πολλαπλασιασθέντος) κύβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον κ ἐπίσημον ἔχον υ, κ^υ. ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος, δυναμοδύναμις, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον δέλτα δύο, ἐπίσημον υ, δδ^υ, δυναμοδύναμις. ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐπὶ τὸν ἀπὸ τῆς αὐτῆς αὐτοῦ πλευρᾶς κύβον πολλαπλασια-

Appellatvr igitur Quadratus, Dynamis, & est illius nota δ superscriptum habens υ sic δ^υ. Qui autem fit ex quadrato in suum latus cubus est, cuius nota est κ, superscriptum habens υ hoc pacto κ^υ. Qui autem fit ex quadrato in seipsum multiplicato, quadratoquadratus est, cuius nota est geminum δ habens superscriptum υ, hac ratione δδ^υ. Qui fit quadrato in cubum qui ab

eodem latere profectus est, ducto, quadratocubus nominatur, nota eius δx̄ superscriptum habens ῡ sic δx^υ. Qui ex cubo in se ducto nascitur, cubocubus vocatur, & est eius nota geminum x̄ superscriptum habens ῡ, hoc pacto xx^υ. Cui vero nulla harum proprietatum obtigit, sed constat multitudine vnitatum rationis experte, numerus vocatur, nota eius ς̀. Est & aliud signum immutabile definitorum, vnitas, cuius nota μ̄ superscriptum habens ō sic μ^ο.

θέντος, δυναμόκυβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ δx̄. ἐπίσημον ἔχον τὸ υ, δx^υ. ὁ δὲ ἐκ κύβου ἑαυτὸν πολλαπλασιάσαντος, κυβόκυβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον δύο xx̄, ἐπίσημον ἔχοντα υ, xx^υ. ὁ δὲ μηδὲν τούτων τῶν ἰδιωμάτων κτησάμενος, ἔχων δὲ ἐν ἑαυτῷ πλῆθος μονάδων ἄλογος ἀριθμὸς καλεῖται, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ ς̀. ἔστι δὲ καὶ ἕτερον σημεῖον τὸ ἀμετάθετον τῶν ὡρισμένων ἡ μονὰς, καὶ ἔστιν αὐτῆς σημεῖον τὸ μ̄, ἐπίσημον ἔχον τὸ ο, μ^ο.

IN DEFINITIONEM II.

HÆc ad verbum exprimenda esse arbitratus sum potiùs quàm cum Xilandro nescio quid aliud comminisci. Quamuis enim in reliqua versione nostra notis ab eodem Xilandro excogitatis libenter vsus sim, quas tradam infrà. Hic tamen ab ipso Diophanto longiùs recedere nolui, quòd hac definitione notas explicet quibus passim libris istis vtitur ad species omnes compendio designandas, & qui has ignoret ne quidem Græca Diophanti legere possit. Porrò quadratum Dynamin vocat, quæ vox potestatem sonat, quia videlicet quadratus est veluti potestas cuiuslibet lineæ, & passim ab Euclide, per id quod potest linea, quadratus illius designatur. Itali, Hispaníque eadem ferè de causa Censum vocant, quasi dicas redditum, prouentúmque, quòd à latere seu radice, tanquam à feraci solo quadratus oriatur. Inde factum vt Gallorum nonnulli & Germanorum corrupto vocabulo zenzum appellarint. Numerum autem indeterminatum & ignotum, qui & aliarum omnium potestatum latus esse intelligitur, Numerum simpliciter Diophantus appellat. Alij passim Radicem, vel latus, vel rem dixerunt, Itali patrio vocabulo Cosam. Cæterùm nos in versione nostra his notis N. Q. C. QQ. QC. CC. designabimus Numerum, Quadratum, Cubum, Quadratoquadratum, Quadratocubum, Cubocubum. Nam quod ad vnitates certas & determinatas spectat, eis notam aliquam adscribere superuacaneum duxi, quòd hæ seipsis absque vlla ambiguitate sese satis indicent. Ecquis enim cùm audit numerum 6. non statim cogitat sex vnitates? Quid ergo necesse est sex vnitates dicere, cùm sufficiat dicere, sex? Demum legendum in Græco censeo, πλῆθος μονάδων ἄλογον, flagitante sententia, potius quàm ἄλογος ἀριθμὸς καλεῖται, vt habetur in codice manu exarato, & per multitudinem vnitatum rationis expertem, intelligo numerum indefinitum & indeterminatum, seu potius ignotum, quémque statim opponit ὡρισμίῳ seu vnitatibus certis & determinatis.

DEFINITIO III.

ENimvero sicut partes numeris cognomines, similem ipsis numeris denominationem sortiuntur (etenim à ternario triens, à quaternario quadrans dicitur) ita nunc quoque denominatis numeris partes cognomines, ipsis numeris similem habent denominationem, nam à numero pars numerica dicitur; à quadrato, quadratica; à cubo cubica: à quadratoquadrato, quadratoquadratica; à quadratocubo, quadratocubica; à cubocubo, cubocubica. Habebit autem quælibet pars à sibi cognomine numero notam, & literam superscriptam quæ speciem à specie distinguat.

ΩΣΠΕΡ δὲ τῶν ἀριθμῶν τὰ ὁμώνυμα μόρια παρονύμως καλεῖται τοῖς ἀριθμοῖς, τῶν μὲν γ̄ τὸ τρίτον, τοῦ δὲ δ̄ τὸ τέταρτον. οὕτως καὶ τῶν νῦν ἐπονομασθέντων ἀριθμῶν τὰ ὁμώνυμα μόρια κληθήσεται παρωνύμως τοῖς ἀριθμοῖς. τοῦ μὲν ἀριθμοῦ τὸ ἀριθμοστὸν, τῆς δὲ δυνάμεως τὸ δυναμοστὸν, τοῦ δὲ κύβου τὸ κυβοστὸν, τῆς δυναμοδυνάμεως τὸ δυναμοδυναμοστὸν, τοῦ δὲ δυναμοκύβου τὸ δx^{χ}. τοῦ δὲ κυβοκύβου τὸ κυβοκυβοστόν. ἕξει δὲ ἕκαστον αὐτῶν ἐπὶ τοῦ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ σημεῖον γράμμην ἔχον διαστέλλουσαν τὸ εἶδος.

IN DEFINITIONEM III.

QVAM malè acceperint hanc definitionem Græcus Scholiastes, & Xilander, si vacat, videre poteris. Manifestum tamen est nil aliud velle Diophantum, quàm vt fractionibus Algebricis notæ specierum à quibus sumunt denominationem, adscribantur, docens ipsas fractiones non minus à qualibet specie denominari, quàm numerum quemlibet vnitatum integrum. Hoc autem huiusmodi similitudine explicat. Quemadmodum, inquit, fractio quælibet absoluta ab aliquo numero sumit denominationem, velut triens à ternario, à quaternario quadrans, & sic de alijs; ita & quælibet fractio Algebrica à specie cuius nota ei affixa est, denominationem mutuatur, verbi gratia $\frac{1}{2}$ N. dicetur semissis vnius Numeri, $\frac{1}{3}$ Q. dicetur triens vnius Quadrati, $\frac{3}{4}$ C. dicetur dodrans vnius Cubi, & sic de alijs, vt superuacaneum sit in re manifesta diutius immorari. Porrò Xilandri coniecturam secutus, duobus in locis loco παρομοίων, reposui παρονύμως.

DEFINITIO IV.

ΕΚΘΕΜΕΝΟΣ οὖν σοι τὴν ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν ἐπωνυμίαν, ἐπὶ τοὺς πολλαπλασιασμοὺς αὐτῶν μεταβλήσομαι. ἔσονται δέ σοι καταφανεῖς διὰ τὸ προδεδηλῶσθαι σχεδὸν ἀπὸ τῆς ὀνομασίας.

Ἀριθμὸς μὲν οὖν ἐπὶ ς̃ πολλαπλασιασθεὶς, ποιεῖ δύναμιν. ἐπὶ δὲ δύναμιν, κύβον. ἐπὶ δὲ κύβον, δυναμοδύναμιν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, δυναμόκυβον. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, κυβόκυβον. δύναμις δὲ ἐπὶ μὲν δύναμιν [ποιεῖ δυναμοδύναμιν.] ἐπὶ δὲ κύβον, δυναμόκυβον. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, κυβόκυβον. κύβος δὲ ἐπὶ κύβον, κυβόκυβον.

PROINDE cùm tibi singulas numerorum denominationes exposuerim, ad eorum multiplicationes me confero, quæ tibi facilè patebunt, cùm per ipsam nominum impositionem, ferè sint iam ante declaratæ.

Ergo numerus in numerum multiplicatus, quadratum producit; in quadratum, cubum, in cubum, quadratoquadratum; in quadratoquadratum, quadratocubum; in quadratocubum, cubocubum. Quadratus verò in quadratum, gignit quadratoquadratum; in cubum, quadratocubum; in quadratoquadratum, cubocubum. Cubus autem in cubum ductus, cubocubum producit.

IN DEFINITIONEM IV.

HIC specierum multiplicationes explicat, quarum aliquæ quidem ex definitione prima, & ipsa nominum impositione manifestæ sunt, reliquas verò demonstrare facile est, tali expedito theoremate.

Quadratus, Cubus, Quadratoquadratus, Quadratocubus, & Cubocubus vnà cum communi eorum latere sunt ab vnitate continuè proportionales.

Sit vnitas A, quodlibet latus B. cuius quadratus C. cubus D. quadratoquadratus E. quadratocubus F. & cubocubus G. Dico A B C D E F G, esse continuè proportionales.

Definit. 1. A 1. B 2. C 4. D 8. E 16. F 32. G 64.

Quia enim [1] ex B in B, fit C. erit ex
Definit. 1. definitione multiplicationis A ad B, vt B ad C. similiter quia [2] ex B. in C, fit D. erit eadem de causa
Definit. 1. A ad B, vt C ad D. Quare ipsi A B C D. sunt continuè proportionales. Rursus [3] quia ex C in seipsum fit E, erit ex definitione multiplicationis A ad C, sicut C ad E. Quare cùm inter A & C. cadat vnus
8. octaui. medius proportionalis B, [4] cadit etiam vnus in eadem ratione inter C & E, sed in ratione A ad B, vel B ad C, ostensus est C ad D. Igitur D est ille medius, ac proinde est C ad D, vt D ad E. Rursus [5]
Definit. 1. quia ex C. in D producitur F, erit A ad C, vt D ad F. Quare rursus cùm inter A C cadat medius
8. octaui. proportionalis B, [6] cadit & vnus medius in eadem ratione inter D & F. Vnde cùm in illa ratione
Definit. 1. ostensus sit esse D ad E, erit E ille medius, & idcirco erit D ad E, vt E ad F. Denique [7] quia ex D in seipsum fit G, erit A ad D, vt D ad G. vnde sicut inter A & D cadunt duo medij proportio-
8. octaui. nales B C, [8] sic & inter D G cadent duo in eadem ratione. Sed in eadem ratione ostensi sunt esse D ad E, & E ad F. Igitur E F sunt illi medij, ac proinde est E ad F, vt F ad G. & omnes A B C D E F G. sunt continuè proportionales. Quod demonstrandum erat. Hinc porro specierum multiplicatio demonstratur.

A 1. B 2. C 4. D 8. E 16. F 32. G 64.

Primo enim ex Numero B in seipsum fieri quadratum C, itémque ex Numero B in quadratum C. fieri cubum D, patet ex definitione prima. Secundò ex Numero B. in cubum D, fieri quadratoqua-

dratum E probatur. Quia enim per præcedens theorema ipsi A B C D E sunt continuè proportionales, erit A ad B, vt D ad E. Quare qui sub extremis A E continetur, æquatur ei qui sub mediis B D. sed ex vnitate A in E fit ipsemet E. ergo idem E fiet ex B in D. quod erat propositum. Tertio dico ex Numero B in suum quadratoquadratum E fieri quadratocubum F, quia enim est A ad B vt E ad F, numerus qui fit ex A in F, nempe ipse F æquatur ei qui fit ex B in E. Quòd erat propositum. Quartò dico ex Numero B in suum quadratocubum F, fieri cubocubum G. Nam vt prius cùm sit A ad B. vt F ad G. fiet idem G ex A in G, vel ex B in F. Quod erat intentum. Quintò ex quadrato C in seipsum, fieri quadratoquadratum E, patet ex definitione prima, sicut & ex eodem quadrato C in cubum D fieri quadratocubum E. Sextò ex quadrato C in quadratoquadratum E fieri cubocubum G sic probatur. Quia ob continuam proportionalitatem, vt A ad C, sic est E ad G, idem G fiet ex A in G, vel ex C in E. Quod erat propositum. Denique ex cubo D in seipsum, fieri cubocubum G. patet ex definitione prima. Quamobrem ex omni parte constat propositum. 19. septimi.

DEFINITIO V.

OMNIS numerus in partem sibi cognominem multiplicatus, vnitatem producit.

ΠΑΣ ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ ὁμώνυμον αὐτῷ μόριον πολλαπλασιασθεὶς, μονάδα ποιεῖ.

IN DEFINITIONEM V.

HIC præclarè nugatur Scholiastes, cùm putat in hac definitione loqui Diophantum de fractionibus absolutis, & nulla speciei alicuius nota affectis, quasi docere velit ex $\frac{1}{3}$ in 3. vel ex $\frac{1}{4}$ in 4. fieri vnitatem, quod quid ad logisticam conferat, non video, sed sanè vulgò Arithmeticorum notum est, atque ipsis lippis & tonsoribus, vt geometrica demonstratione, opus non fuerit ad id confirmandum. Cæterùm non id voluit Diophantus, sed potius fractiones Algebricas illas, in quibus vnitates per aliquam speciem diuisæ intelliguntur, ductas in speciem à qua denominantur, producere vnitates absolutas, vt si $\frac{1}{2N}$ ducatur in 4. N. fient 2. vnitates absolutæ, & si $\frac{2}{3Q}$ ducantur in 6. Q. fient 4. vnitates absolutæ, & si $\frac{1}{5C}$ ducantur in 10. C. fient 2. vnitates. Et hanc esse Diophanti mentem ex definitione octaua manifestè colligitur. Cùm enim ibi multiplicationes huiusmodi fractionum tradat, non docet quid producatur si fractio ducatur in speciem à qua denominatur, quia scilicet id ista definitione iam comprehenderat.

DEFINITIO VI.

ENIMVERÒ cùm vnitas immutabilis sit, semperque maneat species quælibet in eam multiplicata, eandem generat speciem.

ΤΗΣ οὖν μονάδος ἀμεταθέτου οὔσης, καὶ ἑστώσης ἀεὶ τὸ πολλαπλασιαζόμενον εἶδος ἐπ' αὐτὴν αὐτὸ τὸ εἶδος ἔσται.

IN DEFINITIONEM VI.

NON melius accepit hanc definitionem Scholiastes, quàm præcedentem & sequentes duas, quod semel atque iterum monuisse sufficiat. Existimauit enim in istis quatuor definitionibus Diophantum loqui de numeris & fractionibus absolutis, quod à scopo illius prorsus alienum est. Hîc itaque docet Diophantus, vnitates ductas in speciem quamlibet, ipsammet speciem producere, vt si 2. ducantur in 3. N. fient 6. N. Et si 4. ducantur in 5. Q. fient 20. Q. & sic de aliis. Causam autem assignare videtur, quòd vnitates absolutæ, vnitatis ipsius naturam sapiant. Quemadmodum ergo vnitas in quemlibet numerum ducta, producit ipsum eundem numerum, sic & vnitates in quamlibet speciem multiplicatæ, eandem speciem gignunt.

DEFINITIO VII.

AT partes denominatæ si inter se multiplicentur, partes producunt ipsis numeris cognomines. Verbi gratia pars numerica in partem numericam ducta, quadraticam gignit; in quadraticam,

ΤΑ δὲ ὁμώνυμα μόρια ἐφ' ἑαυτὰ πολλαπλασιαζόμενα, ποιήσει ὁμώνυμα μόρια τοῖς ἀριθμοῖς. οἷον τὸ μὲν ἀριθμοστὸν ἐπὶ τὸ ἀριθμοστὸν, δυναμοστὸν ποιεῖ. ἐπὶ δὲ δυναμοστὸν, κυβοστόν. ἐπὶ δὲ κυβοστὸν, δυναμοδυναμοστόν.

ἐπὶ δὲ δυναμοδυναμοστὸν, δυναμοκυβοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμοκυβοστὸν, κυβοκυβοστὸν, καὶ τοῦτο ὁμωνύμως συμβλήσεται. δυναμοστὸν δὲ ἐπὶ μὲν ἀριθμοστὸν, κ^{υ} ποιεῖ. ἐπὶ δὲ δυναμοστὸν, δδ^{υ}. ἐπὶ δὲ κυβοστὸν, δκ^{υ}. ἐπὶ δὲ δδ^{υ}, κκ^{υ}. τὸ δὲ κυβοστὸν, ἐπὶ μὲν ἀριθμοστὸν, ποιεῖ δδ^{υ}. ἐπὶ δὲ δ^{υ}, δκ^{υ}. ἐπὶ δὲ κ^{υ}, κκ^{υ}. τὸ δὲ δυναμοδυναμοστὸν, ἐπὶ μὲν ἀριθμοστὸν, δκ^{υ} ποιεῖ. ἐπὶ δὲ δυναμοστὸν, κκ^{υ}. τὸ δὲ δυναμοκυβοστὸν, ἐπὶ ἀριθμοστὸν, κυβοκυβοστόν.

cubicam ; in cubicam, quadratoquadraticam ; in hanc, quadratocubicam ; in hanc cubocubicam ; idque communicata denominatione continget. Pars verò quadratica, in partem numericam, partem cubicam facit ; in quadraticam, quadratoquadraticam ; in cubicam, quadratocubicam ; in quadratoquadraticam, cubocubicam. Pars autem cubica in numericam, partem facit, quadratoquadraticam ; in quadraticam, quadratocubicam ; in cubicam, cubocubicam. Sed pars quadratoquadratica in numericam, partem facit quadratocubicam ; & in quadraticam, cubocubicam. Denique pars quadratocubica in numericam, partem gignit cubocubicam.

IN DEFINITIONEM VII.

HÆC definitio à quarta pendet. Quemadmodum enim ibi numerorum integrorum à speciebus denominatorum multiplicationes docuit, ita & hîc fractionum ab iisdem speciebus denominatarum multiplicationes tradit, quarum eadem est prorsus ratio. Nam sicut verbi gratia 2. N. in 3. N. faciunt 6. Q. ita $\frac{1}{2}$ N. in $\frac{1}{3}$ N. facit $\frac{1}{6}$ Q. & sicut 3. N. in 4. Q. faciunt 12. C. sic $\frac{1}{3}$ N. in $\frac{1}{5}$ Q. faciunt $\frac{1}{15}$ C. & sic de aliis. Itaque quæ demonstrata sunt ad definitionem quartam, hîc etiam locum habent.

DEFINITIO VIII.

ΠΑΛΙΝ δὲ τὸ μὲν ἀριθμοστὸν ἐπὶ μὲν δύναμιν, ἀριθμὸν ποιεῖ. ἐπὶ δὲ κύβον, δύναμιν, ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, κύβον. ἐπὶ δυναμόκυβον, δυναμοδύναμιν ; ἐπὶ κυβόκυβον, δυναμόκυβον. δυναμοστὸν δὲ ἐπὶ μὲν ἀριθμὸν, ἀριθμοστόν. ἐπὶ δὲ κύβον, ἀριθμόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν δύναμιν. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, κύβον. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, δυναμοδύναμιν. κυβοστὸν δὲ ἐπὶ μὲν ἀριθμὸν, δυναμοστόν. ἐπὶ δὲ δύναμιν, ἀριθμοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, ἀριθμόν. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, δύναμιν. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, κύβον. δυναμοδυναμοστὸν δὲ ἐπὶ μὲν ς^{ον}, κυβοστόν. ἐπὶ δὲ δύναμιν, δυναμοστόν. ἐπὶ δὲ κύβον, ἀριθμοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, ἀριθμόν. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, δύναμιν. δυναμοκυβοστὸν δὲ ἐπὶ μὲν ς^{ον} δυναμοδυναμοστόν. ἐπὶ δύναμιν, κυβοστόν. ἐπὶ δὲ κύβον, δυναμοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, ἀριθμοστόν. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, ἀριθμόν. τὸ δὲ κυβοκυβοστὸν ἐπὶ μὲν ἀριθμόν, δυναμοκυβοστόν. ἐπὶ δὲ δύναμιν, δυναμοδυναμοστόν. ἐπὶ δὲ κύβον, κυβοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, δυναμοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, ἀριθμοστόν.

RVRSVS fractio numerica in quadratum ducta, numerum gignit ; in cubum, quadratum ; in quadratoquadratum, cubum ; in quadratocubum, quadratoquadratum ; in cubocubum, quadratocubum. Fractio verò quadratica in numerum ducta, Fractionem numericam producit ; in cubum, numerum ; in quadratoquadratum, quadratum ; in quadratocubum, cubum ; in cubocubum, quadratoquadratum. Fractio cubica ducta in numerum, fractionem quadraticam gignit ; in quadratum, fractionem numericam ; in quadratoquadratum, numerum ; in quadratocubum, quadratum ; in cubocubum, cubum. Fractio quadratoquadratica in numerum ducta, producit fractionem cubicam ; in quadratum, fractionem quadraticam ; in cubum, fractionem numericam ; in quadratocubum, numerum ; in cubocubum, quadratum. Fractio quadratocubica in numerum ducta, fractionem facit quadratoquadraticam ; in quadratum, fractionem cubicam ; in cubum, fractionem quadraticam ; in quadratoquadratum, fractionem numericam ; in cubocubum, numerum. Fractio cubocubica in numerum ducta, fractionem gignit

quadratocubicam; in quadratum, fractionem quadratoquadraticam; in cubum, fractionem cubicam; in quadratoquadratum, fractionem quadraticam; in quadratocubum, fractionem numericam.

IN DEFINITIONEM VIII.

TANGIT hîc aliud genus fractionum, quæ fiunt cùm numerus à specie inferiori denominatus diuisus intelligitur, per numerum ab altiori specie denominatum, vt si vnitates per Numeros diuidantur, fit fractio Numerica, qualis est $\frac{1}{3N}$. Et si vnitates per quadratos diuidantur, fit fractio quadratica, vt $\frac{1}{4Q}$, & sic de aliis. Differunt ergo re fractiones istæ ab iis de quibus actum est superiore definitione, quamuis vtrasque iisdem nominibus appellet Diophantus. Nam in illis speciei denominatio afficit Numeratorem, in istis denominatorem, verbi gratia si dicas $\frac{2}{3}$ N. intelligis 2. N. diuidi per 3. At si dicas $\frac{2}{3N}$ intelligis 2. diuidi per 3. N. vtramque tamen fractionem Diophantus ἀριθμοστὸν vocat, similiter $\frac{1}{4}$ Q. & $\frac{1}{4Q}$ vocat δυναμοστὸν communi nomine, & sic de aliis. Ratio verò multiplicandi fractiones istas, tota pendet à ratione diuidendi species inter se. Porrò diuisio multiplicationi contraria est, quamobrem, vt monet Diophantus definitione decima, cognitis specierum multiplicationibus, cognoscuntur & diuisiones: sicut enim verbi gratia Numerus in Numerum ductus producit Quadratum, ita si Quadratus per Numerum diuidatur, orietur Numerus; & sicut ex Quadrato in Cubum fit Quadratocubus, ita si Quadratocubus per Cubum diuidatur, orietur Quadratus, & rursus si Quadratocubus per quadratum diuidatur, orietur Cubus, & sic de alijs. Hinc patet si fractio numerica $\frac{2}{3N}$ ducatur in 2. Q. fieri numerum, nam fit seruata vtraque denominatione $\frac{4Q}{3N}$ quia verò diuidendo Quadratum per numerum, oritur numerus, hoc idem est atque $\frac{4}{3}$ N. Simili argumento rationem reddes omnium quæ hac definitione complectitur Diophantus.

DEFINITIO IX.

MINVS per minus multiplicatum, producit plus. At minus per plus multiplicatum, producit minus. Et defectus nota est litera ⋔ decurtata, & deorsum vergens, sic ↑.

ΛΕΙΨΙΣ ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα, ποιεῖ ὕπαρξιν. λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν, ποιεῖ λεῖψιν, καὶ τῆς λείψεως σημεῖον ⋔ ἐλλιπὲς κάτω νεῦον ↑.

IN DEFINITIONEM IX.

ΥΠΑΡΞΙΝ & λεῖψιν, abundantiam & defectum vertere poteramus. Placuit tamen à recentioribus omnibus vsitatis vocabulis dicere Plus & Minus. Et Diophantus quidem vt significet Plus nulla vtitur nota, sed conjunctione tantùm copulatiua. Nos verò in versione nostra, eos qui ante nos Latinè scripserunt, imitati; Plus hoc signo denotabimus +. Minus verò isto –. Ceterùm si cui mirum videatur quod Minus per Minus multiplicatum, efficiat, Plus, & huius rei demonstrationem requirat, legat Petrum Nonium parte 2. suæ Algebræ, cap. 4.

DEFINITIO X.

DECLARATIS ergo multiplicationibus, manifestæ sunt etiam partitiones propositarum specierum. Æquum itaque est eum qui hoc negotij suscipit, in additione, subductione, & multiplicatione quæ speciebus accidunt, exercitatum esse, nimirum qua ratione species quæ adsunt, quæque desunt non eiusdem multitudinis, alijs adiicias speciebus quæ vel adsunt, vel itidem adsunt atque desunt. Et quomodo à speciebus quæ adsunt, & aliis quæ desunt, auferas alias quæ vel adsint, vel itidem adsint atque desint.

ΚΑΙ τῶν πολλαπλασιασμῶν σοι σαφηνισθέντων, φανεροί εἰσιν οἱ μερισμοὶ τῶν προκειμένων εἰδῶν. καλῶς οὖν ἔχει ἐναρχόμενον τῆς πραγματείας, συνθέσει, καὶ ἀφαιρέσει, καὶ πολλαπλασιασμοῖς τοῖς περὶ τὰ εἴδη γεγυμνάσθαι. καὶ πῶς εἴδη ὑπάρχοντα, καὶ λείποντα, μὴ ὁμοπληθῆ προσθήσεις ἑτέροις εἴδεσιν ἤτοι καὶ αὐτοῖς ὑπάρχουσιν, ἢ καὶ ὁμοίως ὑπάρχουσι καὶ λείπουσι. καὶ πῶς ἀπὸ ὑπαρχόντων εἰδῶν καὶ ἑτέρων λειπόντων ἀφαιρήσεις ἕτερα ἤτοι ὑπάρχοντα, ἢ καὶ ὁμοίως ὑπάρχοντα καὶ λείποντα.

IN DEFINITIONEM X.

ADDITIONEM, ſubductionem, multiplicationem, & diuiſionem ſpecierum, cùm diuerſimodè per Plus & Minus copulantur, non perſequitur Diophantus, ſed ſupponit in his jam exercitatum eum qui libros iſtos aggrediatur. Nec ego in re facili diutius immorabor, vide, ſi libet, authores omnes qui logiſticam ſcriptis mandarunt, vt Nicolaum Tartaleam, Petrum Nonium, Chriſtophorum Clauium, alióſque paſſim.

DEFINITIO XI.

ΜΕΤΑ δὲ ταῦτα ἐὰν ἀπὸ προβλήματός τινος γένηται ὕπαρξις εἴδεσι τοῖς αὐτοῖς μὴ ὁμοπληθῆ δὲ ἀπὸ ἑκατέρων τῶν μερῶν, δεήσει ἀφαιρεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον γένηται. ἐὰν δέ πως ἐν ὁποτέρῳ ἐνυπάρχῃ, ἢ ἐν ἀμφοτέροις ἐνελλείψῃ τινὰ εἴδη, δεήσει προσθεῖναι τὰ λείποντα εἴδη ἐν ἀμφοτέροις τοῖς μέρεσιν, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν τὰ εἴδη ἐνυπάρχοντα γένηται. καὶ πάλιν ἀφελεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν ἓν εἶδος καταλειφθῇ. πεφιλοτεχνήσθω δὲ τοῦτο ἐν ταῖς ὑποστάσεσι τῶν προτάσεων, ἐὰν ἐνδέχηται, ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον καταλειφθῇ. ὕστερον δέ σοι δείξομεν καὶ πῶς δύο εἰδῶν ἴσων ἑνὶ καταλειφθέντων τὸ τοιοῦτον λύεται. νῦν δ᾽ ἐπὶ τὰς προτάσεις χωρήσωμεν ὁδὸν πλείστην ἔχοντες τὴν ἐπ᾽ αὐτοῖς εἴδεσι συνηθροισμένην ὕλην. πλείστων δ᾽ ὄντων τῶν ἀριθμῶν, καὶ μεγίστων τῷ ὄγκῳ, διὰ τοῦτο βραδέως βεβαιουμένων ὑπὸ τῶν παραλαμβανόντων αὐτά, καὶ ὄντων ἐν αὐτοῖς δυσμνημονεύτων, ἐδοκίμασα τὰ ἐν αὐτοῖς ἐπιδεχόμενα διαιρέσεις, καὶ μάλιστα τὰ ἐν ἀρχῇ ἔχοντα στοιχειωδῶς, ἀπὸ ἁπλουστέρων ἐπὶ σκολιώτερα διελεῖν, ὡς προσῆκεν. οὕτω γὰρ εὐόδευτα γενήσεται τοῖς ἀρχομένοις, καὶ ἡ ἀγωγὴ αὐτῶν μνημονευθήσεται, τῆς πραγματείας αὐτῶν ἐν τρισκαίδεκα βιβλίοις γεγενημένης.

DEINDE ſi in aliqua quæſtione tractanda eædem ſpecies adſint ex vtraque parte non æquali multitudine, auferenda ſunt ſimilia à ſimilibus, donec vna ſpecies vni ſpeciei æqualis remaneat. Quod ſi in vtraque parte, vel in altervtra deſint quædam ſpecies, quædam adſint, quæ deſunt vtrinque addenda ſunt, dum ſpecies eædem vtrinque inueniantur; rurſumque vtrimque auferenda ſimilia à ſimilibus, tantiſper dum ab vtraque parte vna ſpecies relinquatur. Atque hoc accuratè in ipſis quæſtionum poſitionibus, quoad detur, conabere efficere, vſque dum vna ſpecies vni ſpeciei æqualis deprehendatur. Poſterius autem tibi commonſtrabimus quomodo quæſtio explicetur, etiam cùm duæ ſpecies vni æquales relinquuntur. Nunc verò ad ipſas quæſtiones accedemus, cùm nobis via abundè pateat, ob materiam ab ipſis ſpeciebus collectam. Cùm autem plurimi ſint numeri, & mole ingentes, atque ideo tardè comprehendantur ab iis qui huic ſtudio incumbunt, nec valent memoria; ſtatui quæ ex iis ita decerpi poſſunt, ita vt maximè in tractationis principio elementorum partes ſuſtineant, primo loco proponere, & à ſimplicioribus ad perplexiora progredi. Sic enim incipientibus ea fient penetratu faciliora, & in memoria eorum hærebit deductio, pertractatione eorum libris tredecim incluſa.

IN DEFINITIONEM XI.

ÆQVATIO, eſt vnicum medium quo vtitur Logiſtica ad quæuis ſoluenda problemata, tali artificio ignotam quantitatem, notæ alicui comparando, vt tandem inter eas æqualitatem deprehendat, & ſic in agnitionem ignotæ perueniat. Vt autem docet hîc Diophantus, non quælibet æquatio ſtatim apta eſt ſoluendæ propoſitæ quæſtioni, ſed magna interdum indiget præparatione quò fiat ſimpliciſſima, ita vt ſi fieri poteſt vna tantum ſpecies vni ſpeciei, vel duæ, vni æquales reperiantur. Totum verò negotium præparationis æquationum in eo conſiſtit, vt defectus communiter addantur, & ſimilia à ſimilibus auferantur, & ſi vtraque æquationis pars altioris gradus ſpecies

species contineat, fiat hypobibasmus, seu descensus quidam, vel depressio characterum, vt vocat Xilander, omnia diuidendo per infimæ speciei denominationem. Quæ omnia vt vnico exemplo confirmem, sint 2. C. + 3. N. æquales 9. N.—4. Q. Quia ergo deficiunt ex altera parte 4. Q. addantur vtrimque 4 Q. fient 2 C. + 3. N. + 4 Q. æquales 9. N. quia verò similes species, nempe Numeri vtrimque reperiuntur, auferantur vtrimque 3. N. remanent igitur 2. C. + 4. Q. æquales 6. N. Denique quia species altioris gradus ex vtraque parte reperiuntur, quæ omnes depressionem pati possunt, diuidatur vtraque pars per infimam speciem quæ hîc est 1. N. Fient ergo 2. Q. + 4. N. æquales 6. vnitatibus. Et tunc demum æquatio censebitur ritè præparata. Præterea Parabolismum addit Franciscus Vieta in libello aureo cui titulus. Isagoge in artem Analyticen, cuius præsertim vsus est in æquationibus compositis, qualis est illa quam exhibuimus, quique fit diuidendo singulas æquationis partes per vnitates altioris speciei, vt in dato exemplo diuidendo eas per numerum Quadratorum, qui est 2. fiunt 1 Q. + 2 N. æquales 3. sed hac methodo non vtitur Diophantus, qui æquationes compositas resoluit absque huiusmodi reductione numeri altioris speciei ad vnitatem, vt suo loco docebimus. Porrò hæc omnia tribus tantum nituntur principijs, nimirum.

Si ab æqualibus æqualia auferantur, quæ remanent sunt æqualia.

Si æqualibus æqualia addantur, tota sunt æqualia.

Si æqualia per eundem numerum diuidantur, fiunt æquales quotientes.

Hæc breuiter cum Diophanto attigisse sufficiat, qui plura desiderat, legat Vietam libro citato, vbi breuiter, sed accuratè more suo ista persequitur.

Cæterùm æquatione ritè præparata, quomodo ea resoluenda sit, vt ignota quantitas innotescat, non tradit Diophantus, & cùm hîc polliceatur se daturum regulas quomodo explicetur quæstio, cùm duæ species, vni æquales reperiuntur, in libris eius qui extant huiusmodi regulæ non continentur, ita vt videatur regulas omnes Algebræ quas vocat, supposuisse, vt pote notas (nam iis passim vtitur in his libris) vel alio opere edito qui ad nos minimè peruenit, eas tradidisse. Equidem regulis simplicibus tantum (cùm scilicet vna species vni speciei æquatur) in tribus prioribus libris vtitur: in sequentibus verò ad compositas etiam nonnunquam deuoluitur. Simplices vnica regula comprehenduntur quæ talis est.

Facto hypobibasmo si opus sit, ita vt vnitates alicui speciei æquales remaneant, diuidantur vnitates per numerum à specie denominatum, orietur valor illius speciei.

Vt si 3. N. æquentur 12. vbi nullo est opus hypobibasmo, diuide 12. per 3. fit 4. valor vnius numeri. At si 2. æquentur 10. N. Facto hypobibasmo 2. N. æquantur 10. vnde facta diuisione, prodit 5. valor vnius numeri. Quod si 2.C. æquentur 18. N. facto hypobibasmo, 2. Q. æquantur 18. vnde diuidendo 18. per 2. fit 9. valor vnius quadrati, & extracta radice fit 3. valor Numeri. Et sic de aliis. Huius regulæ fundamentum totum est Regula aurea proportionum, seu trium, in qua tertius terminus est vnitas, vnde sola diuisione opus est. Nam verbi gratia in vltimo exemplo, dico per regulam trium, si 2. Q. æquantur 18. cui numero æquatur 1. Q? vnde patet diuiso 18. per 2. quotientem 9. esse valorem Quadrati. De compositis regulis agemus ad propositionem 33. libri huius, vbi earum fundamentum tangit Diophantus. Nam piget diutius immorari in re facili, & vulgo etiam Logistarum notissima.

QVÆSTIO I.

PROPOSITVM numerum in duos numeros partiri, quorum datum sit interuallum. Esto datus numerus 100. interuallum verò 40. oportet inuenire numeros. Statuatur minor 1. N. Maior ergo erit 1. N. & 40. vnitates. Igitur vterque simul erit 2. N. + 40. Dabantur autem esse 100. Proinde vnitates 100. æquales sunt 2. N. + 40. Aufero similia a similibus, nimirum aufero 40. vnitates, & à 100. & à 2. N. + 40. relinquuntur 2. N. æquales vnitatibus 60. Ergo alter numerorum est 30. Ad positiones. Erit minor quidem vnitatum 30. maior verò vnitatum 70. & demonstratio est manifesta.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ. ἔστω γὰρ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ ρ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ μονάδες τεσσαράκοντα, δεήσει εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμοῦ ἑνός, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ἀριθμοῦ ἑνὸς μονάδων μ̄. συναμφότεροι ἄρα γίνονται ἀριθμοὶ δύο, μονάδες μ̄. δίδονται δὲ μονάδες ρ̄. μονάδες ἄρα ρ̄. ἴσαι εἰσὶν ἀριθμοῖς δυσὶ μονάσι μ̄, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια ἀφαιρῶ ἀπὸ τῶν ρ̄ μονάδας μ̄, καὶ ἀπὸ τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ τῶν μ̄ μονάδων ὁμοίως μονάδας μ̄. λοιποὶ ἀριθμοὶ δύο ἴσοι μονάσιν ξ̄. ἑκάτερος ἄρα γίνεται ἀριθμὸς μονάδων λ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μονάδων τριάκοντα. ὁ δὲ μείζων μονάδων ο̄. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM I.

OPERATIO Diophanti facilis est, & nihil continet quod lectorem morari debeat. Verba autem illa ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, quæ longa periphrasi vertit Xilander, & aliquando etiam perperam, vt suo loco monebimus, ego passim interpretatus sum, Ad Positiones: vel etiam retento Græco vocabulo. Ad Hypostases. Semper enim inuento valore numeri, propositionem his verbis absoluit Diophantus, quia videlicet vt propositæ quæstionis habeatur perfecta solutio, oportet valorem numeri ad positiones applicare, vt hoc loco, Cùm inuenerimus valorem Numeri esse 30. quia Minor pars propositi numeri posita erat 1. N. erit ea 30. Maior verò quæ posita erat 1. N. + 40. erit vtique 70. & sic numerus 100. diuisus est in duas partes 30. & 70. quarum interuallum 40. vt requirebatur. Poterant etiam positiones aliter institui hac arte. Ponatur maior pars 1. N. erit ergo minor 1. N. −40. harum aggregatum est 2 N.−40. quod æquari debet numero 100. Quare addendo vtrimque 40. fiunt 2. N. æquales 140. vnde fit 1 N. 70. Ad hypostases. Erit maior pars 70. Minor 30. vt priùs. Ex vtraque autem operatione elicitur huiusmodi Canon.

Dato numero diuidendo, adde vel adime datum interuallum, semissis summæ majorem partem; semissis residui, minorem exhibebit.

Qui Canon à nobis syntheticè demonstratus est proposit. 23. lib. 1. porismatum Aliter etiam rursus poterant institui positiones. Statuatur interuallum quæsitarum partium 2. N. Maior verò pars esto 50. + 1 N. minor 50 − 1 N. sic enim vtraque simul conficit 100. & interuallum ipsarum est 2. N. quod æquatur numero 40. Quare fit 1. N. 20. Ad positiones. Maior pars quæ posita erat 50 + 1 N erit vtique 70. Minor verò quæ posita erat 50 − 1 N. erit 30. & hinc rursus elicietur alius Canon.

Semissi dati numeri diuidendi, adde vel adime semissem dati interualli, summa & residuum quæsitas exhibebunt partes.

Porro ex vtroque Canone manifestè colligitur, si solutio in integris contingere debeat, necesse esse vt Numerus diuidendus, & datum interuallum, sint simul pares numeri, vel simul impares, nam si alter sit par, alter impar; tam eorum summa, quam quod restat minorem de maiori subtrahendo, erit impar numerus. Quare nec summæ nec residui semissis in integris haberi poterit. Quod tangere voluit Scholiastes. Denique moneo eodem artificio datum quemlibet numerum diuidi in quotlibet partes, quarum interualla data sint. Verbi gratia. Numerus 100. diuidendus sit in tres partes, ita vt mediæ suprà minimam excessus sit 20. maximæ supra mediam excessus sit 24. Ponatur minima 1 N. erit ergo media 1 N + 20. maxima verò 1. N. + 44. Harum summa est 3 N. + 64. æqualis 100. Quare auferendo vtrimque 64. remanent 3 N. æquales 36. & fit 1 N. 12. Ad positiones. Erit minima pars 12. Media 32. Maxima 56. Hinc quoque si placet eliciemus hunc Canonem.

Aufer à numero diuidendo summam interuallorum cuiuslibet partis supra minimam, residuum partire in numerum multitudinis partium, orietur minima pars.

Vnde constat, vt quæstio sit possibilis, summam interuallorum cuiuslibet partis suprà minimam, minorem esse debere numero diuidendo. Cæterùm duobus alijs modis institui possunt positiones, pro vt media vel maxima pars statuetur 1 N. & hinc rursus formari alij Canones, quæ omnia industriæ tuæ relinquo.

QVÆSTIO II.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι. ἐπιτετάχθω δὴ ὁ ξ. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τριπλασίονι. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμοῦ ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ἀριθμῶν τριῶν καὶ ἔστιν ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος τριπλασίων. δεῖ λοιπὸν τοὺς δύο ἴσους εἶναι μονάσι ξ. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες, ἀριθμοί εἰσι τέσσαρες. ἀριθμοὶ ἄρα τέσσαρες ἴσοι μονάσιν ξ. ὁ ἀριθμὸς ἄρα μονάδων ιε. ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσται μονάδων ιε. ὁ δὲ μείζων μο με.

PROPOSITVM numerum in duos partiri in ratione data. Constitutum sit numerum 60. partiri in duos numeros in ratione tripla. Statuatur minor 1. N. igitur maior erit 3. N. & est maior minoris triplus. Superest vt ambo simul æquentur vnitatibus 60. sed ambo compositi sunt 4 N. Proinde 4 N. æquales sunt vnitatibus 60. est ergo 1. N. vnitatum 15. Quamobrem minor est 15. maior autem 45.

IN QVAESTIONEM II.

ALITER etiam institui possunt positiones. Statuatur maior 1. N. Ergo minor $\frac{1}{3}$ N. horum summa $1\frac{1}{3}$ N. æqualis est 60. & fit 1. N. 45. Tantus ergo est major, minor verò 15. vt prius. Ex vtraque operatione formatur hic Canon.

Sume duos numeros in data ratione, & per illorum summam diuide datum numerum. Quotiens ductus sigillatim in sumptos numeros, exhibebit quæsitas dati numeri partes.

Minimos numeros sumendos esse ait Xilander. Sed necesse non est, nisi facilitatis gratia, quia minores numeri commodius tractantur.

Potest & hæc quæstio extendi ad diuisionem dati numeri in quotlibet partes, datas rationes seruantes, eritque eadem prorsus operatio, & idem Canon, vt superuacaneum sit id exemplis illustrare.

QVÆSTIO III.

PROPOSITVM numerum in duos partiri in data ratione, & data differentia. Constitutum sit numerum 80. in duos partiri, ita vt maior minoris triplus sit, & adhuc 4. vnitates superaddat. Statuatur minor 1 N. erit igitur maior 3 N. + 4. & sic maior minoris triplus est, & adhuc quatuor vnitates superaddit. Restat vt ambo simul æquentur vnitatibus 80. sed ambo simul iuncti faciunt 4 N. +4. Igitur 4 N. +4. æquales sunt vnitatibus 80. Aufero similia à similibus. Relinquuntur ergo vnitates 76. æquales 4. N. & fit 1 N. 19. Ad positiones. Erit igitur minor numerus 19. Maior autem 61. ad triplum minoris adiectis 4. quæ de 80. subduxeram, vt triplorum numerorum inuenirem quantitatem. Postea verò eadem 4. adiicio maiori, vtriusque quantitate cognita.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ καὶ ὑπεροχῇ τοῖς δοθεῖσιν. ἐπιτετάχθω τὸν π̄ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ἵνα ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος τριπλασίων ᾖ, καὶ ἔτι μονάσι τέτταρσιν ὑπερέχῃ. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμοῦ ἑνός. ὁ μείζων ἄρα ἀριθμοὶ τρεῖς καὶ μονάδες τέσσαρες. καὶ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ὢν τριπλασίων, ἔτι καὶ μονάσι τέτταρσιν ὑπερέχει. λοιπὸν τοὺς δύο θέλω ἴσους εἶναι μονάσιν π̄. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες, ἀριθμοί εἰσι τέσσαρες καὶ μονάδες δ̄, ἀριθμοὶ ἄρα τέσσαρες καὶ μονάδες δ̄, ἴσοι μονάσι π̄, καὶ ἀφαιρῶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιπαὶ ἄρα μονάδες ος̄ ἴσαι ἀριθμοῖς τέσσαρσι, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιθ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἄρα ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς μο ιθ̄. ὁ δὲ μείζων μο ξᾱ. προστιθεμένων τῶν δ̄ μο, ὧν ἀφεῖλον ἀπὸ τῶν π̄ μο. ἀφεῖλον γὰρ ὥστε εὑρεῖν πόσων μονάδων ἔσται ἕκαστος ἀριθμός. ὕστερον δὲ τῷ μείζονι ἀριθμῷ προστίθημι τὰς δ̄ μο. μετὰ τὸ γνῶναι πόσων ἕκαστος.

IN QVAESTIONEM III.

IN Græco, vbi scriptum erat ἐν λόγῳ καὶ ὑπεροχῇ τῆς δοθείσης reposui, τοῖς δοθεῖσιν, flagitante sententia. Cæterum hîc etiam aliter institui potest operatio, si ponatur Maior 1 N. vnde auferendo 4. remanet 1 N. −4. triplum minoris, Minor ergo est $\frac{1}{3}$ N. $-1\frac{1}{3}$ vtriusque summa fit $1\frac{1}{3}$ N $-1\frac{1}{3}$ æqualis 80. & defectum vtrimque adiiciendo $1\frac{1}{3}$ N. æquatur 81. $\frac{1}{3}$ Quare fit 1 N. 61. maior numerus. Minor verò 19. vt prius.

Verùm ex operatione Diophanti formabitur iste Canon.

Sume duos numeros in data ratione, & per illorum summam diuide datum numerum dato interuallo multatum; quotientem si ducas in minorem sumptorum, fiet minor quæsitorum.

QVÆSTIO IV.

INVENIRE duos numeros qui & datam rationem, & datum seruent interuallum. Mandatum sit maiorem minoris esse quincuplum, interuallum autem ipsorum esse vnitates 20. statuatur minor 1 N. Maior ergo erit 5 N. Superest 5 N. excedere 1 N. vnitatibus 20. At horum interuallum est 4 N. hoc igitur æquale est vnitatibus 20. & fit 1 N. 5.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ δοθέντι, καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ὅπως δοθήσεται. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι πενταπλασίονα, τὴν δὲ ὑπεροχὴν αὐτοῖς ποιεῖν μονάδας κ̄. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμοῦ ἑνός, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ἀριθμῶν ε̄. λοιπὸν θέλω ἀριθμοὺς ε̄ ὑπερέχειν ἀριθμοῦ ἑνὸς μονάδας κ̄. ἀλλ' ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἐστιν ἀριθμοὶ δ̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν κ̄. [καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε̄] ἔσται ὁ

ἐλάσσων ἀριθμὸς μο ε̄. ὁ δὲ μείζων μονάδων κε̄. καὶ μένει ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ὢν πενταπλασίων, ἡ δὲ ὑπεροχὴ γίνεται μονάδων κ̄.

Eritque minor numerus vnitatum 5. Maior autem vnitatum 25. ita maiore minoris quincuplo existente, interuallum est 20.

IN QVAESTIONEM IV.

QVADRVPLICITER institui potest operatio. Primò vt habetur apud Diophantum.
Secundò sic. Ponatur Maior 1 N, ergo minor $\frac{1}{5}$ N. Horum interuallum $\frac{4}{5}$ N. æquatur 20. & fit 1 N. 25. maior numerus. Ergo minor 5. vt prius. Ex vtraque autem harum operationum iste Canon elicitur.

Sume duos numeros in ratione data, & per horum interuallum diuide datum interuallum, quotiens ductus in sumptos numeros, quæsitos exhibebit.

Tertiò sic operabere. Esto minor 1 N. ergo maior 1 N. + 20. qui cùm sit minoris quincuplus, erunt 5 N. æquales 1 N. + 20. & tandem 4 N. æquantur 20. vel 1 N. æquatur $\frac{1}{5}$ N. + 4. & tandem $\frac{4}{5}$ N. æquantur 4. & vtroque modo fit 1. N. 5. minor numerus. vnde maior est 25. vt prius.

Quartò, esto maior 1 N. ergo minor 1 N. − 20. qui cum sit quinta pars maioris, fiet $\frac{1}{5}$ N. æqualis 1 N. − 20. vel 1 N. æqualis 5. N. − 100. & vtraque æquatione resoluta, fit 1 N. 25. maior numerus, vnde minor est 5. vt prius. Hinc etiam alius Canon elici posset. Quod tibi considerandum relinquo.

QVÆSTIO V.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἑκατέρων τῶν διῃρημένων τὰ δοθέντα μὴ τὰ αὐτὰ μέρη συντεθέντα ποιῇ τὸν δοθέντα ἀριθμόν. δεῖ δὴ τὸν διδόμενον δίδοσθαι ὥστε εἶναι ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν γινομένων δύο ἀριθμῶν ἐὰν τοῦ ἐξ ἀρχῆς ἐπιταχθέντος ληφθῇ τὰ δοθέντα μὴ τὰ αὐτὰ μέρη. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ̄ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ τρίτον, καὶ τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον ἐπὶ τὸ αὐτὸ συντεθέντα ποιῇ μο λ̄. τάσσω τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον ἀριθμοῦ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἔσται ϛϛ ε̄. τὸ ἄρα τοῦ πρώτου τρίτον ἔσται μονάδων λ̄ λείψει ἀριθμοῦ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἔσται μονάδων ϟ. λείψει ϛϛ τριῶν. λοιπὸν θέλω τοὺς δύο συντεθέντας ποιεῖν μονάδας ρ̄, ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσιν ἀριθμοὺς δύο. καὶ μονάδας ϟ. ταῦτα ἴσα μονάσι ρ̄. καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιπὸν ἄρα μονάδες δέκα ἴσαι ἀριθμοῖς δυσίν. ὁ ϛ ἄρα ἔσται μονάδων ε̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον ἀριθμοῦ ἑνός, ἔσται μονάδων ε̄. αὐτὸς ἄρα μονάδων κε̄. τὸ δὲ τοῦ πρώτου τρίτον μονάδων λ̄ λείψει ἀριθμοῦ ἑνὸς ἔσται μονάδων κε̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται μονάδων οε̄. καὶ μένει τὸ τοῦ πρώτου τρίτον, καὶ τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον μονάδες λ̄. ὥσπερ κοινῇ συντεθέντα ποιοῦσι τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν.

PROPOSITVM numerum partiri in duos numeros, vt horum vtriusque, non tamen eædem, datæ partes si coniungantur, datum conficiant numerum. Oportet autem talem hunc dari qui sit in medio duorum numerorum qui fiunt, si numeri ab initio propositi præscriptæ partes accipiantur. Imperatum sit partiri 100. in duos numeros, vt primi tertia pars, & secundi quinta pars si coniungantur, conficiant 30. Statuam secundi quintam partem 1 N. ipse igitur erit vnitatum 30 − 3 N. atque adeo ipse primus fiet vnitatum 90 − 3 N. Reliquum est vtrumque simul conficere vnitates 100. At ambo iuncti conficiunt 2 N. + 90. Hæc igitur æqualia sunt vnitatibus 100. Aufero similia à similibus. Restant igitur vnitates 10. æquales 2 N. ergo fit 1 N. 5. Ad positiones. Statueram secundi quintam partem 1 N. erit igitur hæc vnitates 5. atque ideo ipse secundus 25. At primi triens erat 30 − 1 N. est igitur 25. atque ipse primus 75. Et primi quidem tertia, secundi verò quinta pars simul additæ conficiunt numerum 30. prout imperatum erat.

IN QVAESTIONEM V.

HIC duas veluti conditiones apponit Diophantus. Prima eſt non ſumendas eſſe eaſdem partes vtriuſque ſegmenti. Quod neceſſarium eſt, non vt quæſtio ſit poſſibilis, ſed vt ſit alicuius momenti. Nam ſi eædem partes vtriuſque ſegmenti petantur, hoc idem erit atque diuidendi numeri partem eandem ſumere. Vt ſi poſtuletur duo ſegmenta de 100. fieri, vt vtriuſque quinta pars numerum certum conficiat, patet non alium eſſe poſſe numerum illum quam 20. qui eſt quinta pars ipſius 100. quia ſcilicet idem eſt ſumere quintam partem totius numeri, atque ſumere quintam partem ſingulorum ſegmentorum illius. Itaque in huiuſmodi caſu, datus numerus quem debent conficere præſcriptæ partes quæſitorum ſegmentorum, ſemper idem erit, nimirum eadem pars totius diuidendi numeri vt dictum eſt. At ſegmenta ipſa duo quilibet numeri in quos ſecabitur diuidendus numerus, & ſic infinitas ſolutiones recipiet quæſtio; & abſque vllo negotio ſecando propoſitum numerum in duos quoslibet, ſatisfactum erit propoſito. Secunda conditio prorſus neceſſaria, eſt, Numerum quem conficere debent datæ partes quæſitorum ſegmentorum debere eſſe in medio partium earundem propoſiti numeri. Quod ne ſola experientia cum Xilandro cognoſcamus, hoc argumento probabimus. Sit A. propoſitus numerus ſecandus in duos, vt vnius pars ab B. denominata, & alterius pars à C denominata, ſi coniungantur, fiat D. ſitque B. maior quàm C. & ipſius A. partes eædem ſint E. F. dico D. neceſſariò cadere in E. & F. ſeu eſſe minorem quidem ipſo E. maiorem verò ipſo F. Quia enim vt dictum eſt ſuprà, ſi vtriuſque ſegmenti ex A. ſumeretur eadem pars B. eſſet partium ſumma æqualis ipſi E. patet ſi vnius ſegmenti ſumatur pars B. alterius verò pars minor, puta C ſummam partium nimirum D. fore minorem ipſo E. Rurſus ſi vtriuſque ſegmenti ſumatur eadem pars C, erit ſumma partium æqualis F. Igitur ſi vnius quidem ſegmenti ſumatur pars C, altérius verò maior pars, puta B. erit vtique ſumma partium D. maior quàm F. Quare conſtat propoſitum. In Græco autem vbi legebatur, ἑαυτοῦ δὲ ἐξ ἀρχῆς ἐπιταχθέντος ληφθῇ τὰ δοθέντα μὴ τὰ μέρη, legendum cenſui, ἐὰν τοῦ ἐξ ἀρχῆς &c. μὴ τὰ αὐτὰ μέρη.

E $33\frac{1}{3}$ F 20.
A 100.
B $\frac{1}{3}$ C $\frac{1}{5}$
D 30.

Porro quadruplex inſtitui poteſt operatio, vt benè monet Xilander.

Prima eſt quæ habetur in textu Diophanti, ponendo $\frac{1}{5}$ ſecundi ſegmenti 1. N.

Secunda fiet ſi ponatur triens primi ſegmenti 1 N. tunc enim erit ipſum primum ſegmentum 3 N. at ſecundi quintans erit 30 − 1 N. atque adeo ipſe ſecundus fiet 150 − 5 N. vnde vtrumque ſegmentum faciet 150 − 2 N. æqualia 100. Additòque vtrimque defectu, & auferendo ſimilia à ſimilibus 2. N. æquantur 50. & fit 1 N. 25. primi triens. Reliqua patent.

Tertio, Ponatur primum ſegmentum 1 N. erit ſecundum 100 − 1 N. primi triens erit $\frac{1}{3}$ N. ſecundi quintans 20 − $\frac{1}{5}$ N. quorum ſumma 20 + $\frac{2}{15}$ N. æquatur 30. & tandem $\frac{2}{15}$ N. æquantur 10. ſitque 1 N. 75. primum ſegmentum, ſecundum 25.

Quarto ponatur ſecundum ſegmentum 1 N. erit primum 100 − 1. N. ſecundi quintans fiet $\frac{1}{5}$ N. Primi verò triens $33\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ N. quorum ſumma $33\frac{1}{3} - \frac{2}{15}$ N. æquatur 30. & tandem $\frac{2}{15}$ N. æquatur $3\frac{1}{3}$ & fit 1. N. 25. ſecundum ſegmentum, primum autem eſt 75. vt prius. Et ex duabus operationibus vltimis quidquid dicat Xilander, Canon fiet non adeo perplexus.

Propoſiti numeri ſume partes ſimiles poſtulatis partibus, minorem aufer à dato numero quem conficere debent quæſita ſegmentorum partes, à maiori aufer datum numerum, reſidua ſigillatim diuide per interuallum fractionum exprimentium partes poſtulatas, orientur quæſita ſegmenta.

Quomodo autem ſolui poſſit quæſtio ſi Propoſitus numerus in plures ſecandus proponatur, ita vt ſegmentorum poſtulatæ partes datum conficiant numerum, non quilibet de vulgo logiſta doceat. Cùm enim huiuſmodi quæſtionum genus infinitas, imo infinities infinitas ſæpe recipiat ſolutiones, totum artificium in ſegmentorum determinatione conſiſtit, quod tradere non pigebit, ſi prius tyrones monuero ne operam ludant in re fortè captum illorum adhuc ſuperante, ſed huius problematis omiſſa tractatione ad vlteriora progrediantur, donec in Logiſtica exercitatiores ardua quæque facilè comprehendant.

Sit igitur propoſitus numerus 100. diuidendus in quatuor numeros, ita vt primi $\frac{1}{2}$ ſecundi $\frac{1}{3}$, tertij $\frac{1}{4}$, quarti $\frac{1}{5}$, hæc omnia ſimul efficiant 27. Oportet autem præſcriptum numerum (puta hîc 27.) cadere inter propoſiti ad diuidendum numeri maximam & minimam partium ſimilium illis quæ poſtulantur; hoc eſt quia maxima pars eſt $\frac{1}{2}$ minima $\frac{1}{5}$ ſumentes $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{5}$ de 100. nempe 50. & 20. Oportuit 27. maiorem fuiſſe quàm 20. minorem quàm 50. cuius rei ratio eadem eſt quæ ſupra in conditionis explicatione allata eſt. Itaque ponatur primum ſegmentum 1 N. igitur reliqua ſimul erunt 100. − 1 N. & cùm primi ſegmenti $\frac{1}{2}$ ſit $\frac{1}{2}$ N. erunt $\frac{1}{3}$ ſecundi, $\frac{1}{4}$ tertij, & $\frac{1}{5}$ quarti ſimul 27 − $\frac{1}{2}$ N. Itaque iam oportet diuidere 100 − 1 N. in tres numeros, ita vt primi $\frac{1}{3}$ ſecundi $\frac{1}{4}$ tertij $\frac{1}{5}$ conficiant 27. − $\frac{1}{2}$ N. Quare ob appoſitam conditionem oportet 27 − $\frac{1}{2}$ N. cadere inter $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{5}$ de 100 − 1 N. hoc eſt oportet

27 − ½ N. esse minus quàm 33. ⅓ − ⅓ N. & maius quam 20 − ⅕ N. & quidē 27 − ½ N. esse minus quàm 33. ⅓ − ⅓ N. luce clarius est. Curandum ergo tantùm vt sit maius quàm 20 − ⅕ N. Hoc autem si ponatur addendo vtrimque ½ N. opportebit 27. esse maius quàm 20 + 3/10 N. & ablatis vtrimque 20. oportebit 7. maius esse quàm 3/10 N. Quare cùm diuidendo 7. per 3/10 fiat quotiens 23 ⅓. Determinatum ergo est de primo segmento, nam statui potest quilibet numerus infrà 23 ⅓ Ponatur ergo 10. erunt itaque reliqua simul 90. & cùm auferendo 5. semissem ipsius 10. de 27. supersint 22. iam diuidendus erit 90. in tres numeros, ita vt primi ⅓ secundi ¼ tertij ⅕ conficiant 22. statuatur primus seu secundum segmentum ipsius 100. 1 N. erunt duo reliqui 90 − 1 N. & cùm primi ⅓ sit ⅓ N. patet ¼ secundi & ⅕ tertij conficere 22 − ⅓ N. Hoc autem vt possibile sit, oportet 22 − ⅓ N. cadere inter ¼ & ⅕ de 90 − 1 N. hoc est oportet 22 − ⅓ N. esse minus quàm 22 ½ − ¼ N. & maius quam 18 − ⅕ N. & primum quidem manifestum est secundum. Autem sic curabimus. Quia 22 − ⅓ N. est maior quàm 18 − ⅕ N. addito vtrimque ⅓ N. manebit 22 maior quàm 18 + 2/15 N. & ablatis vtrinque 18. manent 4. maiora quàm 2/15 N. Quare cùm diuidendo 4. per 2/15 fiat quotiens 30. patet valorem numeri minorem esse debere quàm 30. Itaque posito primo segmento 10. determinatum est etiam de secundo, nam debet esse infrà 30. Ponatur ergo quilibet numerus infrà 30. puta 24. Cùm ergo auferendo 10. & 24. de 100. supersint *66*. erit hæc summa tertij & quarti. Cùm verò semissis primi sit 5. & triens secundi 8. sublatis his de 27. remanet 14. pro quadrante tertij & quintante quarti. Diuidatur ergo per propositionem Diophanti numerus *66*. in duos, vt vnius quadrans cum alterius quintante conficiat 14. inuenies alterum 16. alterum 50. Quamobrem soluta est quæstio, & sunt numeri 100. quatuor segmenta 10. 24. 16. 50. quæ satisfaciunt postulatis. Manifestum autem est quæstionem infinities infinitas recipere solutiones. Nam vt probatum est, potest primum segmentum poni quilibet numerus infrà 23. ⅓ hi autem ob fractiones infiniti sunt. Deinde sumpto vno ex infinitis illis numeris puta 10. primo segmento manente 10. potest secundum segmentum infinities variari, cùm vt ostensum est poni possit quilibet numerus infrà 30. sed ista sufficiant.

QVÆSTIO VI.

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ τοῦ πρώτου μέρος δοθὲν τοῦ ἑτέρου μέρους δοθέντος ὑπερέχει δοθέντι ἀριθμῷ. δεῖ δὴ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἐλάσσονα εἶναι τοῦ γινομένου ἀριθμοῦ, ἐὰν τοῦ ἐξ ἀρχῆς ἐπιταχθέντος ληφθῇ τὸ δοθὲν μέρος ἐν ᾧ ἐστιν ἡ ὑπεροχή. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ̄ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ τοῦ πρώτου τέταρτον τοῦ τοῦ δευτέρου ἕκτου ὑπερέχει μ° κ̄. τάσσω τὸ τοῦ δευτέρου ἕκτον ἀριθμοῦ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἔσται ἀριθμῶν ϛ. τὸ ἄρα τοῦ πρώτου τέταρτον ἔσται ἀριθμοῦ ἑνός, καὶ μ° κ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται ἀριθμῶν τεσσάρων καὶ μονάδων π̄. λοιπὸν θέλω τοὺς δύο συντεθέντας ποιεῖν μονάδας ρ̄. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσιν ἀριθμοὺς δέκα, μονάδας π̄. ταῦτα ἴσα μονάσι ρ̄. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιπὸν ἀριθμοὶ δέκα ἴσοι μονάσι κ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° β̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸ τοῦ δευτέρου ἕκτον ἀριθμοῦ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἔσται μονάδων δώδεκα. τὸ δὲ τοῦ πρώτου τέταρτον, ἀριθμοῦ ἑνὸς καὶ μονάδων κ̄, ἔσται μονάδων κβ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται μ° πη̄. καὶ μένει τὸ τοῦ πρώτου τέταρτον τοῦ τοῦ δευτέρου ἕκτου ὑπερέχον μονάδας κ̄. οἵτινες κοινῇ συντεθέντες ποιοῦσι τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν.

Propositvm numerum partiri in duos numeros, vt prioris data pars, posterioris datam partem superet dato numero. Hunc autem minorem esse oportet, eo qui fit si propositi ab initio numeri pars illa capiatur, quæ alteram excedit. Constitutum sit ergo partiri 100. in duos numeros, vt prioris quadrans, posterioris sextantem 20. vnitatibus superet. Pono sextantem posterioris 1. N. ipse ergo erit 6. N. Quadrans autem prioris erit 1. N. + 20. Ipse itaque 4. N. + 80. Cæterùm volo duorum summam esse 100. sed vtriusque summa est 10. N. + 80. hæc igitur æquantur vnitatibus 100. Aufero similia à similibus, relinquuntur 10. N. æquales 20. & fit 1. N. vnitatum 2. Ad hypostases. Statueram sextantem posterioris 1. N. Ipse ergo erit 12. At prioris quadrans fuit 1. N. + 20. erit igitur 22. & ipse prior 88. manetque hoc, huius quadrantem sextante illius majorem esse 20. vnitatibus. Ipsi autem coniuncti numeri, propositum restituunt numerum.

IN QVAESTIONEM VI.

CONDITIONIS appositæ ratio in promptu est. Impossibile est enim vt pars aliqua minoris numeri, sit æqualis vel maior eadem parte maioris numeri. Quare cùm diuidendus est 100. in duos hujusmodi numeros, vt prioris quadrans superet sextantem posterioris numero 20. Impossibile est 20. non esse minorem quadrante de 100. Cùm 20. sit minor quadrante vnius segmenti de 100.

Cæterum vt bene monet Xilander sex diuersis operationibus solui poterat quæstio.

Prima est quæ habetur in textu Diophanti, ponendo scilicet sextantem posterioris segmenti 1 N.

Secunda huic respondens est. Si ponatur prioris quadrans 1 N. ipse prior 4 N. vnde fit sextans posterioris 1 N. − 20. ipse posterior 6 N. − 120. qui priori additus summam facit 10 N. − 120. æqualem 100. vnde fit 1. N. 22. prioris quadrans, suntque ipsi numeri vt prius 88. & 12.

Tertia operatio est. Pono primum 1 N. ergo $\frac{1}{4}$ N. − 20. est sextans secundi, ipse secundus 1 $\frac{1}{2}$ N. − 120. qui primo additus facit 2 $\frac{1}{2}$ N. − 120. æqualia 100. & fit 1 N. 88. primus scilicet.

Quarta huic respondens est. Pono secundum 1 N. ergo $\frac{1}{6}$ N. + 20. est quadrans primi. ipse igitur primus est $\frac{2}{3}$ + N. 80, qui secundo additus facit 1 $\frac{2}{3}$ N. + 80. æqualia 100. & fit 1 N. 12. secundus numerus.

Quinta operatio est. Pono primum 1 N. ergo secundus est 100 − 1 N. Primi quadrans $\frac{1}{4}$ N. secundi sextans 16 $\frac{2}{3}$ − $\frac{1}{6}$ N. cui addendo 20. fiunt 36 $\frac{2}{3}$ − $\frac{1}{6}$ N. æqualia $\frac{1}{4}$ N. & tandem $\frac{5}{12}$ N. æquantur 36 $\frac{2}{3}$ vnde fit 1 N. 88. vt prius.

Sexta huic respondens est. Pono secundum 1 N. ergo primus est 100. − 1 N. secundi sextans est $\frac{1}{6}$ N. primi quadrans 25 − $\frac{1}{4}$ N. Quare $\frac{1}{6}$ N. + 20. æquantur 25 − $\frac{1}{4}$ N. & tandem 5. æquantur $\frac{5}{12}$ N. vnde fit 1 N. 12. vt suprà.

Ex duabus autem vltimis elicietur huiusmodi Canon.

Propositi numeri sume partes similes postulatis, & minoris adijce datum interuallum, aufer idem interuallum à maiore, summam & residuum partire seorsim per aggregatum fractionum exprimentium partes postulatas, orientur quæsiti numeri.

QVÆSTIO VII.

AB eodem numero auferre duos datos numeros, vt residui eam seruent quæ dabitur rationem. Iubeamur ab eodem numero auferre 100. & 20. vt maius residuum, minoris sit triplum. Statuatur quæsitus numerus 1 N. ab eo si auferam 100. residuum est 1 N. − 100. & si ab eodem auferam 20. relinquitur 1 N. − 20. Oportet autem residuum maius minoris esse triplum; Ter igitur minus residuum æquatur maiori. Atqui ter minus residuum, fit 3 N. − 300. Hoc ergo æquatur 1 N. − 20. Defectus communis vtrinque addatur, fiunt 3 N. æquales 1 N. + 280. Auferantur à similibus similia; relinquuntur 2 N. æquales vnitatibus 280. & fit 1 N. vnitatum 140. Ad positiones. Numerum quæsitum statueram 1 N. Erit igitur vnitatum 140. & si ab eo abstulero 100. supersunt 40. si autem abstulero 20. restant 120. Et maius residuum minoris est triplum.

ΑΠΟ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν δύο δοθέντας ἀριθμούς, καὶ ποιεῖν τοὺς λοιποὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν τὸν ρ̄, καὶ τὸν κ̄. καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια. τετάχθω ὁ ζητούμενος, ἀριθμοῦ ἑνός. κἂν μὲν ἀπὸ τούτου ἀφέλω τὸν ρ̄ λοιπὸς, ἀριθμὸς εἷς, λείψει μονάδων ρ̄ κἂν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀφέλω τὸν κ̄. λοιπὸς, ἀριθμὸς εἷς λείψει μονάδων κ̄. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι τριπλάσια. τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. τρὶς δὲ ἄρα τὰ ἐλάσσονα γίνεται ἀριθμοὶ γ̄. λείψει μ° τ̄ ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ λείψει μονάδων κ̄. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις. γίνονται ἀριθμοὶ γ̄ ἴσοι ςῷ ἑνὶ καὶ μονάσι σπ̄. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιποὶ ςςοὶ δύο ἴσοι μονάσι σπ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων ρμ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν ςοῦ ἑνός. ἔσται ἄρα μ° ρμ̄. κἂν μὲν ἀπὸ τούτου ἀφέλω τὸν ρ̄ λοιπαὶ μονάδες μ̄. ἐὰν δὲ τὸν κ̄ λοιπαὶ μονάδες ρκ̄. καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια.

IN QVAESTIONEM VII.

OPERATIO Diophanti facilis est, & ex ea elicitur huiusmodi Canon.

Ducito maiorem datorum numerorum in denominatorem rationis postulatæ, à producto aufer minorem. Residuum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, orietur quæsitus numerus.

Aliter etiam cum Francisco Vieta institui poterat operatio. Ponatur 1 N. defectus quo 100. deficit à quæsito numero. Erit ergo quæsitus numerus 1 N. + 100. Quia verò defectus quo 20. deficit ab eodem quæsito numero, triplus est defectus quo 100. ab eodem deficit, erit ipsius 20. defectus 3 N. adeo quæsitus numerus rursus æquabitur 3 N. + 20. Quamobrem æquales sunt 1 N. + 100. & 3 N. + 20. vnde fit 1 N. 40. & quæsitus numerus est 140. vt prius. Hinc etiam elicietur alius Canon, nimirum.

Datorum numerorum interuallum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, orietur defectus maioris numeri à quæsito numero, quo ei addito, fiet quæsitus numerus.

QVÆSTIO VIII.

DVOBVS datis numeris eundem adiicere numerum, vt compositi ad inuicem datam habeant rationem. Oportet autem datam rationem minorem esse ea quam habet maior datorum numerorum ad minorem. Iubeamur ad 100. & ad 20. eundem numerum adiicere, vt maius compositum, minoris fit triplum. Ponatur addendus vtrique numero 1 N. is si ad 100. addatur, fiet 1 N. + 100. si verò ad 20. adiiciatur, fiet 1 N. + 20. & oportet compositum maius minoris esse triplum. Ter igitur minus compositum æquabitur maiori. Ter autem minus compositum, fit 3 N. + 60. Hoc ergo æquale est 1 N. + 100. Auferantur similia à similibus, supersunt 2 N. æquales vnitatibus 40. & fit 1 N. vnitatum 20. Ad positiones. Statueram adiiciendum vtrique numero 1 N. erit ergo vnitatum 20. & si ad 100. addatur fiunt vnitates 120. At si ad 20. adiiciatur, fiunt vnitates 40. & est maius compositum minoris triplum.

ΔΥΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τοὺς γινομένους πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον· δεῖ δὴ τὸν διδόμενον λόγον ἐλάττονα εἶναι τοῦ λόγου ὃν ἔχει ὁ μείζων τῶν δοθέντων πρὸς τὸν ἐλάττονα. ἐπιτετάχθω δὴ τῷ ρ̄ καὶ τῷ κ̄ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια. τετάχθω ὁ προστιθέμενος ἑκατέρῳ ἀριθμῷ ς^ο^ ἑνός. κἂν μὲν τῷ ρ̄ προστεθῇ, ἔσται ἀριθμοῦ ἑνὸς, μονάδων ρ̄, ἐὰν δὲ τῷ κ̄, γίνεται ἀριθμοῦ ἑνὸς, μ^ο^ κ̄. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι τριπλάσια. τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἔσται τοῖς μείζοσι. τρὶς δὲ τὰ ἐλάττονα γίνεται ἀριθμοὶ τρεῖς μονάδες ξ̄. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσι ρ̄. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιποὶ ἀριθμοὶ δύο ἴσοι μονάσι μ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ο^ κ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν προστιθέμενον ἑκατέρῳ ἀριθμῷ ς^ο^ ἑνὸς, ἔσται μονάδων κ̄. κἂν μὲν τῷ ρ̄ προστεθῇ, γίνονται μονάδες ρκ̄. ἐὰν δὲ τῷ κ̄, γίνονται μονάδες μ̄. καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια.

IN QVAESTIONEM VIII.

CONDITIO apposita nil aliud dicit, quàm quod ostendimus propositione prima libri primi porismatum. Reliqua omnia sunt dilucida, & ex operatione Diophanti formabitur iste Canon.

Aufer à maiore datorum numerorum, productum ex minore in denominatorem rationis postulatæ, residuum diuide per eundem denominatorem vnitate multatum, orietur quæsitus numerus.

QVÆSTIO IX.

A DATIS duobus numeris auferre eundem numerum, vt residui ad inuicem datam habeant rationem. Opor-

ΑΠΟ δοθέντων δύο ἀριθμῶν ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τοὺς λοιποὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον. δεῖ δὴ τὸν

tet autem datam rationem maiorem esse ea quam habet maior datorum numerorum ad minorem. Imperatum sit à 20. & à 100. auferri eundem numerum, vt maius residuum minoris sit sescuplum. Statuatur numerus ab vtroque numero auferendus 1 N. Et si quidem à 100. auferatur, reliquæ sunt vnitates 100 — 1 N. si autem à 20. detrahatur, restant vnitates 20 — 1 N. Et oportet residuum maius, minoris esse sescuplum. Sexies igitur minus residuum æquatur maiori. Sexies autem minus residuum fit 120 — 6 N. hoc æquale est 100 — 1 N. Adiiciatur communis defectus, & auferantur similia à similibus, relinquuntur 5 N. æquales vnitatibus 20. & fit 1 N. vnitatum 4. Ad Positiones. Statueram auferendum ab vtroque numero 1 N. erit is vnitatum 4. Qui quidem si à 100. auferatur, supersunt vnitates 96. si autem à 20. detrahatur, relinquuntur vnitates 16. Et est residuum maius minoris sescuplum.

τὸν δεδομένον λόγον, μείζονα εἶναι τοῦ λόγου ὃν ἔχει ὁ μείζων τῶν δοθέντων πρὸς τὸν ἐλάττονα. ἐπιτετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ κ̄ καὶ τοῦ ρ̄ ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων ἑξαπλάσια. τετάχθω ὁ ἀφαιρούμενος ἀφ' ἑκατέρου ἀριθμοῦ, ἀριθμὸς εἷς, κἂν μὲν ἀπὸ τοῦ ρ̄ ἀφαιρεθῇ, λοιπαὶ μονάδες ρ̄ λείψει ς ἑνός. ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ κ̄. λοιπαὶ μονάδες κ̄. λείψει ς ἑνός. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι ἑξαπλάσια. ἑξάκις ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσιν. ἑξάκις δὲ τὰ ἐλάσσονα ποιεῖ μο ρκ̄ λείψει ςς ς̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν ρ̄ λείψει ς ἑνός. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, λοιποὶ ἀριθμοὶ ε̄ ἴσοι μονάσιν κ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων δ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν ἀφαιρούμενον ἀφ' ἑκατέρου ἀριθμοῦ, ἀριθμὸν ἕνα, ἔσται μονάδων δ̄. κἂν μὲν ἀπὸ τοῦ ρ̄ ἀφαιρεθῇ λοιπαὶ μονάδες ϙς̄. ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ κ̄. λοιπαὶ μονάδες ις̄. καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων ἑξαπλάσια.

IN QVAESTIONEM IX.

CONDITIONIS hîc appositæ est eadem ratio, quæ suprà. Canon sic formabitur.

Ducito denominatorem rationis in minorem datorum numerorum, à producto aufer maiorem, residuum diuide per ipsum denominatorem vnitate multatum, orietur quæsitus numerus.

Aliter cum Francisco Vieta licebit operari. Ponamus 1 N. excessum ipsius 20 suprà quæsitum numerum, erit ergo 6 N. excessus ipsius 100. supra eundem. Quare quæsitus numerus erit tam 20 — 1 N. quàm 100 — 6. N. Hæc igitur æquantur inter se. Et fit 1 N. 16. excessus ipsius 20. supra quæsitum numerum, quo ablato remanet 4. quæsitus numerus. Et hinc etiam elicietur alius Canon.

Datorum numerorum interuallum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, orietur excessus minoris numeri suprà quæsitum numerum, quo ablato remanet quæsitus numerus.

QVÆSTIO X.

DVOBVS datis numeris, eundem numerum minori quidem ex ipsis addere, detrahere autem à maiori, vt compositum ad residuum datam habeat rationem. Imperatum sit ipsi quidem 20. addere, at verò à 100. auferre eundem numerum, vt compositum residui sit quadruplum. Ponatur addendus & adimendus vtrique numero 1 N. & si ad 20. addatur, fiet 1 N. + 20. si verò à 100. detrahatur, fiet 100 — 1 N. & oportet maius minoris esse quadruplum. Quater igitur minus æquabitur maiori. Sed quatèr minus fit vnitates 400. — 4 N. hoc ergo

ΔΥΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς τῷ μὲν ἐλάσσονι αὐτῶν προσθεῖναι, ἀπὸ δὲ τοῦ μείζονος ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὸν γενόμενον πρὸς τὸν λοιπὸν λόγον ἔχειν δεδομένον. ἐπιτετάχθω τῷ μὲν κ̄ προσθεῖναι, ἀπὸ δὲ τοῦ ρ̄ ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τετραπλάσια. τετάχθω ὁ προστιθέμενος καὶ ἀφαιρούμενος ἑκατέρῳ ἀριθμῷ ς ἑνὸς, κἂν μὲν τῷ κ̄ προστεθῇ, γίνεται ς ἑνὸς μο κ̄. ἐὰν δὲ τοῦ ρ̄ ἀφαιρεθῇ, γίνεται μο ρ̄ λείψει ς ἑνός. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων εἶναι τετραπλάσια. τετράκις ἄρα τὰ ἐλάττονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. τετράκις δὲ τὰ ἐλάσσονα γί-

νεται μονάδες υ̅ λείψει ἀριθμῶν δ̅. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσιν κ̅. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, λοιποὶ ἀριθμοὶ ε̅. ἴσοι μονάσι τπ̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων ος̅. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν προστιθέμενον καὶ ἀφαιρούμενον ἀφ' ἑκατέρου ἀριθμοῦ, ς^ν ἕνα. ἔσται μο. ος̅. κἂν μὲν τῷ κ̅. μο ος̅ προστεθῶσι. γίνονται μο ϟς̅, ἐὰν δὲ τοῦ ρ̅ ἀφαιρεθῶσι, λείπονται μονάδες κδ̅, καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων ὄντα τετραπλάσια.

æquatur 1 N. + 20. Communis addatur defectus, & auferantur à similibus similia, superſunt 5 N. æquales vnitatibus 380. & fit 1 N. 76. Ad poſitiones. Statueram addendum & adimendum vtrique numero 1 N. is ergo erit 76. & ſi ad 20. addantur 76. fiunt 96. ſi verò à 100. auferantur, ſuperſunt 24. & patet maius minoris eſſe quadruplum.

IN QVAESTIONEM X.

ADVERTE hîc triplicem caſum dari poſſe. Vel enim datis duobus numeris idem tertius quæſitus maiori eſt adimendus, & addendus minori. Vel contrà eſt addendus maiori, & adimendus minori. Et ex prima conſideratione, rurſus duplex caſus oritur. Vel enim poſcimus rationem collecti ad reſiduum, vel reſidui ad collectum, ita vt collectum nunc ſit maius extremum proportionis, nunc verò minus.

Primus caſus eſt is, in quem incidit operatio Diophanti, cùm petat auferri eundem numerum à maiori 100. & addi minori 20. vt ſumma reſidui ſit quadrupla. In quo caſu nil refert quæ proportio poſtuletur, ſiue nimirum maior proportione datorum numerorum, ſiue minor; etenim numerus minor 20. quantumlibet augeri poteſt, & maior 100. quantumlibet minui, vnde quæcumque proportio poſtuletur, poterit ſumma eſſe maius extremum, & reſiduum minus extremum. Sed in hoc caſu hic formabitur Canon.

Ducito denominatorem rationis poſtulatæ in maiorem datorum numerorum, à producto aufer minorem; & reſiduum partire per ipſum denominatorem vnitate auctum, orietur quæſitus numerus.

Aliter etiam poſitiones fieri poterant. Exceſſus numeri 100. ſuprà quæſitum, eſto 1. N. erit ergo quæſitus 100 − 1 N. & quia ſupradictus exceſſus ponitur ſubquadruplus compoſiti ex numero 20. & ex quæſito numero, erit compoſitum illud 4 N. Quare auferendo 20. remanet 4 N. − 20 quæſitus numerus. Proinde 100 − 1 N. æquantur 4 N. − 20. & fit 1 N. 24. exceſſus ipſius 100. ſuprà quæſitum numerum, quare detracto 24. de 100. relinquitur quæſitus 76. Hinc rurſus fiet hic Canon.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate auctum, orietur exceſſus maioris datorum numerorum, ſuprà quæſitum; eoque detracto remanebit quæſitus numerus.

Secundus caſus eſt, cùm quæſitus numerus addendus quidem eſt, vt prius minori datorum, & à maiore detrahendus, ſed reſiduum ſit maius extremum proportionis poſtulatæ. Tunc autem oportet rationem poſtulatam minorem eſſe ratione datorum numerorum. Quod ſic oſtenditur. Sint A. B. dati numeri A. maior, & B. minor: & ſit G. quæſitus numerus qui additus ad B. faciat D. detractus ab A. relinquat C. ita vt C. ſit maior quàm D. dico rationem A. ad B. maiorem eſſe ratione C. ad D. Nam ratio A. ad D. maioris inæqualitatis, maior eſt ratione B. ad D. minoris inæqualitatis, cùm maiorem habeat denominatorem. Igitur & [1] permutando ratio A. ad B. maior eſt ratione C. ad D. Quod erat propoſitum.

A 100.	B 20.
C 96.	D 24.
G 4.	

27. Quinti.

Hic etiam licet duplicem operationem inſtituere, & duplicem Canonem formare, nimirum.

Ducito denominatorem rationis poſtulatæ in minorem datorum numerorum, productum aufer à maiore, & reſiduum diuide per ipſum denominatorem vnitate auctum, orietur quæſitus numerus. vel.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate auctum, orietur ſumma quæſiti numeri & minoris datorum, vnde ſi auferatur minor datorum, remanet quæſitus.

Tertius caſus eſt cùm quæſitus numerus addendus eſt maiori datorum, & à minore detrahendus, vbi neceſſe eſt ſummam maiorem eſſe reſiduo, & oportet poſtulatam rationem, maiorem eſſe ratione datorum numerorum. Quod ſimili prorſus argumento oſtendetur, illius quo ſupra contrarium oſtenſum eſt. Sed & duplex inſtituetur operatio, & duplex Canon formabitur, nimirum.

Ducito denominatorem rationis poſtulatæ in minorem datorum numerorum, à producto aufer maiorem, & reſiduum diuide per denominatorem ipſum vnitate auctum, orietur quæſitus numerus. vel.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate auctum, quotiens erit exceſſus minoris datorum numerorum ſuprà quæſitum, quo detracto relinquetur quæſitus.

QVÆSTIO XI.

DVos datos numeros, alterum quidem addere, alterum verò detrahere ab eodem numero, vt geniti ad inuicem datam habeant rationem. Constitutum sit ipsum quidem 20. addere, sed ipsum 100. auferre ab eodem numero, vt maior genitorum, minoris triplus sit. Esto quæsitus 1 N. & si huic adiiciamus vnitates 20. fit 1 N. + 20. si autem ab eodem auferantur vnitates 100. superest 1 N. − 100. & oportet maiorem minoris esse triplum. Ter igitur minor æquatur maiori. Sed minor ter fit 3 N. − 300. Igitur 3 N. − 300. æquantur 1 N. + 20. Communis addatur defectus, & similia à similibus auferantur, supersunt vnitates 320. æquales 2 N. & fit 1 N. 160. Ad positiones. Est maior vnitatum 180. minor 60. & patet maiorem minoris esse triplum.

ΔΥΟ δοθέντας ἀριθμοὺς, ὃν μὲν προσθεῖναι, τὸν δὲ ἕτερον ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ποιεῖν τοὺς γινομένους πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον. ἐπιτετάχθω τὸν μὲν κ̄ προσθεῖναι, τὸν δὲ ρ̄ ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια. ἔστω ὁ ζητούμενος ϛ^ο ἑνός. κἂν μὲν τούτῳ προσθῶμεν μ^ο κ̄. γίνεται ϛ^ο ἑνὸς μ^ο κ̄. ἐὰν δὲ ἀπὸ τούτου ἀφαιρεθῇ μ^ο ρ̄. λοιπὸς, ἀριθμὸς εἷς λείψει μ^ο ρ̄. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι τριπλάσια, τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι, ἀλλὰ τρὶς τὰ ἐλάττονα γίνεται ϛ^οι τρεῖς λείψει μ^ο τ̄. ἀριθμοὶ ἄρα τρεῖς λείψει μ^ο τ̄. ἴσα ἐστὶ ϛ^ῷ ἑνὶ μ^ο κ̄. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, μονάδες τκ̄ ἄρα ἴσαι εἰσὶν ἀριθμοῖς δυσὶν, καὶ γίνεται ὁ ϛ^ο μ^ο ρξ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἄρα ὁ μὲν μείζων μ^ο ρπ̄. ὁ δὲ ἐλάττων ξ. καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια.

IN QVAESTIONEM XI.

OPERATIO Diophanti facilis est, vnde Canon vniuersalis elicitur, quamuis eum Xilander ad proportionem multiplicem malè restringat.

Multiplica detrahendum per denominatorem rationis, producto adiice addendum, summam diuide per denominatorem ipsum vnitate multatum, orietur quæsitus numerus.

Aliter etiam licet operari. Ponatur defectus ipsius 100. à quæsito numero 1 N. ergo ipse quæsitus numerus est 1 N. + 100. At 3 N. erit summa quæsiti numeri & ipsius 20. Quare ablato 20. remanet quæsitus 3 N. − 20. Proinde 1 N. + 100. æquantur 3 N. − 20. & fit 1 N. 60. defectus ipsius 10. à quæsito, quare quæsitus est 160. vt prius. Hinc etiam elicietur alius Canon.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, quotiens erit defectus detrahendi numeri à quæsito, quo restituto fiet quæsitus.

QVÆSTIO XII.

PROPOSITVM numerum diuidere bis in duos numeros, ita vt vnus è prima diuisione ad vnum è secunda diuisione datam habeat rationem. At reliquus ex secunda diuisione ad reliquum è prima rationem item habeat datam. Iniunctum sit nobis numerum 100. diuidere bis in duos numeros, ita vt maior è prima diuisione, minoris è secunda diuisione sit duplus; maior verò è secunda diuisione minoris è prima diuisione sit triplus. Ponatur minor è secunda diuisione 1 N. Maior igitur è prima diuisione erit 2 N. Minor itaque è prima diui-

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς δὶς. ὅπως ὁ εἷς ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὁ δὲ λοιπὸς τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως πρὸς τὸν λοιπὸν τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ̄. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς δὶς, ὅπως ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐκ τῆς δευτέρας. διαιρέσεως ᾖ διπλασίων. ὁ δὲ μείζων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως, τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως, ᾖ τριπλασίων. τετάχθω ὁ ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ϛ^ο ἑνός. ὁ ἄρα μείζων τῶν ἐκ τῆς πρώτης

διαιρέσεως ἔσται ςς̃ δύο. ὁ ἐλάττων ἄρα τοῦ ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως, μονάδων ρ̄. λεῖψει ἀριθμῶν δύο. καὶ ἐπεί ἐστιν αὐτοῦ τριπλασίων ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως, ἔσται μονάδων τ̄. λεῖψει ἀριθμῶν ς̄. λοιπὸν ἄρα καὶ τοὺς τῆς δευτέρας διαιρέσεως συντεθέντας ποιεῖν μο ρ̄. ἀλλὰ συντεθέντες ποιοῦσι μονάδας τ̄. λεῖψει ἀριθμῶν ε̄. ταῦτα ἴσα μονάσι ρ̄. καὶ γίνεται ὁ ς μονάδων μ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν μείζονα τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως ςς̃ δύο. ἔσται μονάδων π̄. τὸν δὲ ἐλάσσονα τῆς αὐτῆς διαιρέσεως μονάδων ρ̄. λεῖψει ςς̃ δύο. ἔσται μο κ̄. τὸν δὲ μείζονα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως μο τ̄. λεῖψει ςς̃ ς̄. ἔσται μο ξ̄. τὸν δὲ ἐλάσσονα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ς ἑνός. ἔσται μο μ̄. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

sione erit vnitatum 100 — 2 N. & quia huius triplus est maior è secunda diuisione, erit vtique 300 — 6 N. Superest igitur vt ambo secundæ diuisionis coniuncti efficiant 100. At coniuncti faciunt 300 — 5 N. Hoc ergo æquatur 100. & fit 1 N. vnitatum 40. Ad positiones. Posueram maiorem è prima diuisione 2 N. erit ergo vnitatum 80. Minorem verò eiusdem diuisionis statueram 100 — 2 N. erit igitur 20. At posueram maiorem è secunda diuisione 300 — 6 N. erit ergo 60. Minor denique è secunda diuisione qui positus fuerat 1 N. erit 40. & euidens est demonstratio.

IN QVAESTIONEM XII.

BENE' monet Xilander quadruplicem institui posse operationem, eò quod quælibet pars cuiuslibet diuisionis poni potest 1 N. Sed ego præterea ex ipsa Diophanti operatione aio formari posse huiusmodi Canonem.

Ducito sigillatim denominatorem rationis vtriusque vnitate multatum, in datum numerum, producta diuide seorsim per numerum qui fit ex mutua denominatorum multiplicatione vnitate multatum, orientur minores partes vtriusque diuisionis. Item.

Ducito sigillatim denominatorem rationis vtriusque vnitate auctum, in datum numerum producta diuide seorsim per eundem qui suprà numerum, orientur partes maiores.

Cæterùm in similibus quæstionibus, si pars vna prioris diuisionis sit maior vna parte posterioris, necessariò altera posterioris pars est maior altera prioris, quin etiam & eodem interuallo maior est, vt constat ex prop. quarta libri primi porism. Quo fundamento qui niti velit, aliter etiam operationem instituet hac arte. Sit minor pars primæ diuisionis 1 N. Ergo maior secendæ erit 3 N. & cùm harum partium interuallum sit 2 N. oportet & reliquas eodem distare interuallo, sed quia reliqua primæ diuisionis est dupla reliquæ secundæ, illarum interuallum æquale est ipsi minori parti secundæ diuisionis, quare hæc pars est 2 N. quæ maiori nimirum 3 N. addita efficit 5 N. æquales 100. vnde fit 1 N. 20. minor pars primæ diuisionis, &c.

QVÆSTIO XIII.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς τρίς, ὅπως ὁ εἷς τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὁ δὲ λοιπὸς τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως, πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως, λόγον, ἔχῃ δεδομένον, καὶ ἔτι ὁ λοιπὸς τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως πρὸς τὸν λοιπὸν τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὰ ρ̄. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς τρίς, ὅπως ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς πρώτης τοῦ ἐλάττονος τῶν ἐκ τῆς δευτέρας ᾖ τριπλασίων. ὁ δὲ μείζων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως τοῦ ἐλάττονος τῶν ἐκ τῆς τρίτης ᾖ διπλασίων. καὶ ἔτι ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐκ τῆς πρώτης ᾖ

PROPOSITVM numerum diuidere ter in duos numeros, vt vnus è prima diuisione ad vnum è secunda, datam habeat rationem. Reliquus autem è secunda diuisione, ad vnum è tertia datam habeat rationem. Et rursus reliquus è tertia diuisione ad reliquum è prima datam etiam habeat rationem. Iniunctum sit numerum 100. diuidere ter in duos numeros, vt maior è prima diuisione, minoris è secunda sit triplus; at maior è secunda diuisione, minoris è tertia sit duplus; & adhuc maior è tertia diuisione, minoris è prima sit quadruplus. Ponatur minor è tertia diuisione 1 N. Maior

igitur è secunda diuisione erit 2 N. Et quia totus numerus qui diuiditur est 100. erit minor è secunda diuisione 100 — 2 N. Et quoniam huius triplus est maior è prima diuisione, erit is 300 — 6 N. Igitur minor ex eadem diuisione erit 6 N. — 200. Et quia illius quadruplus est maior è tertia diuisione, erit is 24 N. — 800. Superest vt tertiæ diuisionis vtraque pars simul efficiat 100. sed vtraque simul est 25 N. — 800. Hoc igitur æquatur 100. Et fit 1 N. vnitatum 36. Ad positiones. Erit minor è tertia diuisione 36. maior autem 64. At minor è prima diuisione 16. maior 84. Denique minor è secunda diuisione erit 28. maior 72. Et manifestum est hos satisfacere proposito.

τετραπλασίων. τετάχθω ὁ ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως ς^{ος} ἑνός. ὁ ἄρα μείζων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ἔσται ςς δύο. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ διαίρεσίς ἐστι μο. ρ̄. ὁ ἄρα ἐλάττων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ἔσται μο. ρ̄. λεῖψει ςς δύο. καὶ ἐπεί ἐστιν αὐτοῦ τριπλασίων ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως, ἔσται μο τ̄. λεῖψει ςς ϛ̄. ὁ ἄρα ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως ἔσται ςς ϛ̄. λεῖψει μο σ̄. καὶ ἐπεί ἐστι αὐτοῦ τετραπλασίων μείζων τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως, ἔσται ςς κδ̄. λεῖψει μο ω̄. λοιπόν ἐστι τὴν τρίτην διαίρεσιν συντεθεῖσαν ποιεῖν μονάδας ρ̄. ἀλλὰ συντεθεῖσα ποιεῖ ςς^{οὺς} κε̄. λεῖψει μο. ω̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν ρ̄. καὶ γίνεται ὁ ς^{ος} μο. λϛ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως μο. λϛ̄. ὁ δὲ μείζων ξδ̄. ὁ ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως ιϛ̄. ὁ δὲ μείζων πδ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως κη̄. ὁ δὲ μείζων οβ̄. καὶ δῆλον ὅτι ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XIII.

SEXTVPLICITER institui posse operationem benè monet Xilander. Ego verò & Canonem fabricor satis ingeniosum.

Sume tres denominatores eo quo proponuntur ordine, & ducito quemlibet vnitate multatum in eum qui ab ipso tertius est, productum vnitate auctum ducito in datum numerum, & productum diuide per solidum sub denominatoribus contentum vnitate auctum, habebis minores partes singularum diuisionum.

vel.

Ducito quemlibet denominatorem vnitate multatum in eum qui ab ipso tertius est, productum vnitate auctum ducito in reliquum denominatorem, & productum ducito in datum numerum, productumque diuide per solidum de quo suprà, habebis maiores partes singularum diuisionum.

Propositis autem tribus numeris, tertius à quolibet dicitur ille qui tertius ab eo numeratur, si cùm perueneris ad vltimum, recurras ad primum. Vt hisce propositis 3. 2. 4. Tertius ab ipso 3. est 4. At tertius ab ipso 2. est 3. denique tertius ab ipso 4. est 2.

QVÆSTIO XIV.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione ad eorumdem summam datam habeat rationem. Oportet autem multitudinem vnitatum quæ statuetur pro altero numerorum maiorem esse denominatore rationis datæ. Mandatum sit productum ex multiplicatione, ad summam habere rationem triplam. Ponatur alter numerorum 1. N. alter (vt addita conditio præcipit) maior quàm 3. nempè 12. & est productus eorum multiplicatione 12 N. summa verò illorum 1 N. + 12. superest vt 12 N. sint tripli ad 1 N. + 12. Ter igitur minor æquabitur maiori, & fit 1 N. vnitatum 4. Erit ergo alter illorum 4. alter verò

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρὸς τὸν ἐκ τῆς συνθέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. δεῖ δὴ τὸ ὑποτιθέμενον πλῆθος τῶν μονάδων ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν μεῖζον εἶναι τοῦ ὁμωνύμου τῷ δεδομένῳ λόγου. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρὸς τὸν ἐκ τῆς συνθέσεως λόγον ἔχειν τριπλασίονα. τετάχθω ὁ μὲν εἷς αὐτῶν ἀριθμοῦ ἑνός. ὁ δὲ ἕτερος, κατὰ τὸν προσδιορισμὸν πλειόνων μονάδων γ̄. ἔστω μονάδες ιβ̄. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπ' αὐτῶν ςς^{οὶ} ιβ̄. ἡ δὲ σύνθεσις αὐτῶν ἀριθμοῦ ἑνὸς μονάδων ιβ̄. λοιπόν ἐστιν ἀριθμοὺς ιβ̄. τριπλασίονας εἶναι ἀριθμοῦ ἑνὸς μονάδων ιβ̄. τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων δ̄. ἔσται ὁ μὲν

αὐτῶν μο δ. ὁ δὲ μο ιβ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

duodecim & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM XIV.

CONDITIO apposita sic demonstrari potest. Sint duo Numeri A B. B C. quorum mutuo ductu fiat G. & sit G ad totum A C. in ratione cuius denominator D, ita vt ex D in A C. fiat G. dico D minorem esse quolibet ipsorum A B. B C. Quia enim idem G fit ex A B. in B C. & ex D in A C.[1] erit A B ad A C. vt D ad B C. sed A B. est minor quàm A C. pars quàm totum, ergo & D est minor quàm B C. & eodem argumento probabitur idem D minor quàm A B. igitur patet propositum.

G 18.
[1] 19. septimi. A..... B C
D 2.

Porrò aduerte Canonem à Xilandro traditum nimis particularem esse, cùm iubeat sumere pro altero quæsitorum numerorum, ipsum denominatorem rationis vnitate auctum. Nos itaque ex ipsa Diophanti operatione elicimus hunc legitimum Canonem

Statue pro altero quæsitorum, quemlibet numerum maiorem denominatore rationis, eumque ducito in ipsum denominatorem, productum diuide per interuallum sumpti numeri & eiusdem denominatoris, orietur alter quæsitorum.

Sed & operatio Diophanti, & hic Canon eatenus locum habent; quatenus productum est maius extremum proportionis. Nam si summa debet esse maior producto, sic erit proponenda quæstio.

Inueniantur duo numeri quorum summa ad productum eorum multiplicatione datam habeat rationem.

Mandatum sit summæ ad productum rationem esse triplam. Ponatur numerorum alter 1 N. alter quilibet numerus puta 2. erit ergo summa 2. + 1. N. productum 2 N. Quare cùm illa sit huius tripla, 6 N. æquabuntur 2 + 1 N. & fert 1 N. $\frac{2}{5}$ sunt igitur quæsiti numeri 2. & $\frac{2}{5}$ & satisfaciunt postulatis.

Conditio hîc non apponitur, quia potest alter quæsitorum esse maior denominatore rationis, dum is tantus sit, vt eo ducto in denominatorem rationis, productus superet vnitatem. Et hinc formatur Canon huiusmodi.

Sume quemlibet numerum pro altero quæsitorum, eumque ducito in denominatorem rationis, & per productum vnitate multatum diuide sumptum numerum, orietur alter quæsitorum.

Cæterum ipsam quæstionem decimamquartam soluit infinitè Diophantus quæstione 41. lib. 4.

QVÆSTIO XV.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἑκάτερος παρ' ἑκατέρου λαβὼν τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν, λόγον ἔχῃ δεδομένον, πρὸς τὸν ὑπολειφθέντα. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον παρὰ τοῦ δευτέρου λαβόντα μονάδας λ̄. γίνεσθαι αὐτοῦ διπλασίονα, τὸν δὲ δεύτερον παρὰ τοῦ πρώτου λαβόντα μονάδας ν̄. γίνεσθαι αὐτοῦ τριπλασίονα. τετάχθω ὁ δεύτερος ςοῦ ἑνὸς καὶ ὧν δίδωσι μονάδων λ̄. ὁ ἄρα πρῶτος ςῶν δύο λείψει μο λ̄. ἵνα λαβὼν παρὰ τοῦ δευτέρου τὰς λ̄. μο. γένηται διπλασίων αὐτοῦ. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν δεύτερον παρὰ τοῦ πρώτου λαβόντα μο ν̄ γίνεσθαι αὐτοῦ τριπλασίονα. ἀλλὰ δοὺς μὲν ὁ πρῶτος μονάδας ν̄. λοιποὺς ἔχει ςοὺς δύο λείψει μο π̄. λαβὼν δὲ αὖ ὁ δεύτερος τὰς ν̄ μο γίνεται ςοῦ ἑνὸς μο π̄. λοιπόν ἐστι ς ἕνα μο π̄. τριπλασίονα εἶναι ςῶν δύο λείψει μο π̄. τρεῖς ἄρα τὰ ἐλάττονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. καὶ γίνεται ὁ ςος μο ξδ̄. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μονάδων ϟη̄. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων ϟδ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros, vt vterque ab altero imperatum numerum accipiens, ad residuum datam habeat rationem. Postuletur itaque vt prior acceptis à posteriore 30. vnitatibus, sit residui duplus. Posterior autem acceptis à priore vnitatibus 50. sit triplus ad residuum. Ponatur posterior 1 N. & præterea 30. vnitatum quas dat priori; erit ergo prior 2 N. − 30. vt acceptis 30. vnitatibus à posteriore, fit residui duplus. Restat vt posterior acceptis à priore 50. vnitatibus, sit triplus ad residuum. Prior autem si det 50. vnitates, relinquitur 2 N. − 80. At posterior acceptis 50. fit 1 N + 80. superest vt 1 N. + 80. sit triplus ad 2 N. − 80. Ter igitur minor æquatur maiori. & fit 1 N. vnitatum 64. Erit ergo prior 98. posterior 94. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM XV.

HIc formo huiusmodi Canonem.

Summam duorum numerorum inuicem præstandorum, ducito sigillatim in vtrumque denominatorem vnitate auctum, producta diuide per planum sub denominatoribus vnitate multatum, orientur defectus præstandorum numerorum à veris.

Vt in exemplo Diophanti summa ipsorum 30. & 50. est 80. qua sigillatim ducta in 3. & in 4. fiunt 240. & 320. quæ si diuidas per 5. productum ex 2. in 3. vnitate multatum, fiunt 48. & 64. defectus ipsorum 50. & 30. à quæsitis. Quare addendo 48. ad 50. & 64. ad 30. fiunt quæsiti numeri 98. & 94.

QVÆSTIO XVI.

INVENIRE tres numeros vt bini simul sumpti faciant imperatos numeros. Oportet autem vt summæ trium imperatorum semissis maior sit quolibet ipsorum. Imperetur itaque primum & secundum simul additos efficere 20. secundum & tertium conficere 30. At tertium cum primo facere 40. Ponatur summa trium 1 N. & quoniam primus & secundus efficiunt 20. si ab 1 N. auferam 20. habebo tertium, nempe 1 N. — 20. Ob hæc eadem erit primus 1 N. — 30. At secundus 1 N. — 40. Reliquum est vt tres simul additi æquentur 1 N. Atqui tres simul additi faciunt 3. N. — 90. hoc ergo æquatur 1 N. & fit 1 N. vnitatum 45. Ad positiones. Erit primus quidem 15. secundus vero 5. Tertius 25. & euidens est demonstratio.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τοὺς ἐπιταχθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τῶν ἐπιταττομένων τριῶν τὸ ἥμισυ μεῖζον εἶναι ἑκάστου αὐτῶν. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον μετὰ τοῦ δευτέρου συντεθέντας ποιεῖν μο κ. τὸν δὲ δεύτερον μετὰ τοῦ τρίτου ποιεῖν λ. τὸν δὲ τρίτον μετὰ τοῦ πρώτου ποιεῖν μο μ. τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ς ἑνός. καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος, καὶ ὁ δεύτερος ποιοῦσι μο κ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ ς ἑνὸς ἀφέλω μο κ. ἕξω τὸν τρίτον ς ἑνὸς λεῖψει μο κ. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἔσται ς ἑνὸς λεῖψει μο λ. ὁ δὲ δεύτερος ς ἑνὸς λεῖψει μο μ. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς συντεθέντας ἀριθμοὺς γίνεσθαι ἴσους ς ἑνί. ἀλλ' οἱ τρεῖς συντεθέντες, ποιοῦσιν ςς τρεῖς λεῖψει μο ϙ. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο με. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο ιε. ὁ δὲ δεύτερος μο ε. ὁ δὲ τρίτος μο κε. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

IN QVAESTIONEM XVI.

CONDITIONIS appositæ ratio est, quia cùm tres numeri bini & bini sumuntur, aggregatum summarum quas bini & bini conficiunt, continet bis summam trium numerorum, quod euidens est, quia quilibet trium numerorum bis sumitur. Oportet autem summam trium numerorum maiorem esse summa duorum ex illis. Hinc etiam euidens fit causa Canonis à Xilandro traditi, qui tamen & ab operatione Diophanti elicitur.

Aggregati summarum quas bini & bini conficiunt tres numeri, cape dimidium; hinc aufer sigillatim dictas summas, restabunt quæsiti numeri.

Eodem ferè artificio soluetur quæstio si quærantur quotlibet numeri multitudine impari, dentúrque summæ primi cum secundo, secundi cum tertio, tertij cum quarto, quarti cum quinto: & sic deinceps. Ac demum vltimi cum primo. Verbi gratia. Quærantur quinque numeri vt primus cum secundo faciat 8. secundus cum tertio faciat 9. tertius cum quarto faciat 10. quartus cum quinto faciat 14. denique quintus cum primo faciat 11. Pone summam quinque numerorum 1 N. Cùm ergo primus & secundus sint 8. & tertius & quartus 10. erit quintus 1 N. — 18. Rursus quia secundus & tertius sunt 9. quartus & quintus 14. erit primus, 1 N. — 23. Rursus quia tertius & quartus sunt 10. quintus & primus 11. erit secundus 1 N. — 21. Item quia quartus & quintus sunt 14. primus & secundus 8. erit tertius 1 N. — 22. Denique quia quintus & primus sunt 11. at secundus & tertius 9. erit quartus 1 N. — 20. Horum summa 5 N. — 104. æqualis est 1 N. & fit 1 N. 26. summa quinque numerorum, vnde si auferas sigillatim summam quatuor quorumlibet, nempe ipsos 23. 21. 22. 20. 18. remanent quæsiti numeri 3. 5. 4. 6. 8. Quod si artificium supra allati Canonis libeat imitari. Sume aggregatum summarum datarum 8. 9. 10. 14. 11. nempe 52. huius semissis 26. est summa quinque quæ-

ſitorum numerorum, vnde vt prius ſi auferas quatuor quoſque remanebit quintus. Præterea in tractatu noſtro de iucundis quæſtionibus quæ per numeros abſoluuntur, alium tradidimus Canonem, hoc vtique non deteriorem, quem, ſi vacat, videre poteris in praxi vigeſima ſecunda.

Verùm ſi multitudo quæſitorum numerorum fuerit par, qui eodem modo bini ſumantur, & vltimus iungatur primo, nec operatio ſimilis nec traditus Canon locum habebunt vt euidens eſt, cuius rei ratio eſt, quia in hoc caſu quæſtio non vnam recipit ſolutionem, ſed infinitas dum modo poſſibilis proponatur, vt ſi quærantur ſex numeri, ita vt primus cum ſecundo faciat 13. ſecundus cum tertio faciat 15. tertius cum quarto faciat 19. quartus cum quinto faciat 11. quintus cum ſexto faciat 10. Poterunt eſſe quæſiti numeri 8. 5. 10. 9. 2. 8. Itemque hi 7. 6. 9. 10. 1. 9. imò & quemcumque ſumas pro primo qui cadat inter 6. & 13. ſatisfacies quæſtioni. Itaque huiuſmodi quæſtiones hac arte reſoluo. Ponatur in dato exemplo primus 1 N. ergo ſecundus eſt 13 − 1 N. vnde tertius fit 2 + 1 N. Quare quartus erit 17 − 1 N. igitur quintus fiet 1 N. − 6. Ac denique ſextus 16 − 1 N. Reſtat vt & ſextus cum primo faciat 16. Quare cùm 16 − 1 N. & 1 N. verè conficiant 16. nulla reſtat ad æquationem via; ita vt vna ſpecies, alteri ſpeciei æqualis reperiatur. Quamobrem cùm inuenti numeri in terminis Algebricis omnes propoſiti partes impleant, manifeſtum eſt quæſtionem infinitè ſolutam eſſe, hoc eſt quemlibet numerum ſumi poſſe pro valore Numeri, modo poſſit poſitionibus ritè applicari. Etenim non quolibet numero pro valore Numeri ſumpto, aptè reſolui poterunt hypoſtaſes, quod accidit quia in aliis reperiuntur vnitates cum defectu Numerorum, in aliis Numeri cum defectu vnitatum. Quare determinandum de valore Numeri, & præſcribendi ſunt termini inter quos cadere debeat. Hoc autem ſic præſtabitur. Sume hypoſtaſim illam in qua eſt minimus vnitatum numerus cum maximo defectu Numerorum, itemque illam in qua eſt minimus Numerorum numerus cum maximo defectu vnitatum, ſunt hæ 13 − 1 N. & 1 N. − 6. Diuide ergo vtrobique vnitates per multitudinem Numerorum, fient 13. & 6. quæſiti termini. Igitur neceſſe eſt valorem Numeri maiorem eſſe quàm 6. minorem quàm 13. Quicunque autem ponatur inter 6. & 13. ſatisfiet poſtulatis. Modus iſte præſcribendi terminos inter quos cadere debet valor numeri, in quæſtionibus quæ infinitè ſoluuntur, à nemine ante nos (quod ſciam) traditus eſt, cùm ſit facilis, & ad ardua problemata ſoluenda neceſſarius vt iam monui in libello iucundarum quæſtionum quæ per numeros abſoluuntur. & fuſius docebo ad quadrageſimam primam quarti.

QVÆSTIO XVII.

ΕΥΡΕΙΝ τέσαρας ἀριθμοὺς ὅπως συν τρεῖς συντιθέμενοι ποιῶσι τοὺς ἐπιταχθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τῶν τεσσάρων τὸ τρίτον μεῖζον εἶναι ἑκάστου αὐτῶν. ἐπιτετάχθω δὴ τοὺς μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου τρεῖς κατὰ τὸ ἑξῆς συντεθέντας ποιεῖν μονάδας κ. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τρεῖς ποιεῖν μονάδας κβ. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ τρίτου τρεῖς ποιεῖν μονάδας κδ. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ τετάρτου τρεῖς ποιεῖν μονάδας κζ. τετάχθωσαν οἱ τέσσαρες ςου ἑνός, καὶ ἐὰν ἄρα ἀπὸ ςου ἑνὸς ἀφέλω τοὺς πρώτους τρεῖς, τουτέστι μονάδας κ. λοιπὸν ἕξω τὸν τέταρτον ςου ἑνός, λείψει μο κ. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὁ μὲν πρῶτος γίνεται, ςου ἑνὸς λείψει μο κβ. ὁ δὲ δεύτερος ςου ἑνὸς λείψει μο κδ. ὁ δὲ τρίτος ςου ἑνὸς λείψει μο κζ. λοιπόν ἐστι τοὺς τέσσαρας συντεθέντας ἀριθμοὺς ἴσους γίνεσθαι ἀριθμῷ ἑνί. ἀλλ' οἱ τέσσαρες συντεθέντες ποιοῦσιν ἀριθμοὺς τέσσαρας λείψει μο ϟγ. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνί, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο. λα. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο θ. δεύτερος μο ζ. ὁ δὲ τρίτος μο. δ. ὁ δὲ τέταρτος μο. ια. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE quatuor numeros, vt terni iuncti faciant poſtulatos numeros. Oportet autem eorum qui poſtulantur numerorum ſummæ trientem maiorem eſſe quolibet ipſorum. Statutum ſit primum & duos deinceps ſimul iunctos facere 20. ſecundum & duos deinceps facere 22. tertium & duos deinceps facere 24. Denique quartum & duos deinceps facere 27. Ponatur quatuor numerorum ſumma 1 N. Igitur ſi ab 1 N. abſtulero tres primos, nempe 20. reliquum habebo quartum, nimirum 1 N − 20. eadem de cauſa primus erit 1 N. − 22. ſecundus 1 N − 24. tertius 1 N. − 27. Supereſt vt quatuor ſimul additi ſint æquales 1 N. ſed quatuor ſimul additi efficiunt 4 N. − 93. Hoc ergo æquatur 1 N. & fit 1 N. vnitatum 31. Ad poſitiones. Erit primus quidem 9. ſecundus verò 7. tertius 4. quartus 11. & hi ſatisfaciunt quæſtioni.

IN QVAESTIONEM XVII.

CONDITIO hîc apponitur eadem de causa, qua factum est vt præcedenti apponeretur, quia videlicet cùm quatuor numeri, terni sumuntur, quoties fieri potest diuersis modis, omnes sumuntur ter. Hinc autem patet, quæstionem huiusmodi proponi posse de quotlibet numeris qui sumantur omnes, vno minus, quoties fieri potest diuersis modis, & erit eadem operationis ratio; sed & Canon vniuersalissimus formabitur.

Aggregatum summarum datarum diuidatur per numerum multitudinis numerorum vnitate multatum. Quotiens erit summa numerorum quæsitorum, à qua si auferantur sigillatim data summa, fient quæsiti numeri.

QVÆSTIO XVIII.

INVENIRE tres numeros vt bini iuncti superent reliquum imperato numero. Iniunctum sit primum & secundum superare tertium vnitatibus 20. secundum & tertium superare primum vnitatibus 30. Tertium verò & primùm superare secundum vnitatibus 40. Ponatur summa trium 2 N. & quoniam primus & secundus superant tertium vnitatibus 20. Adiecto vtrimque communi tertio; trium summa erit bis tertius, & interuallum 20. Si igitur à summa trium, hoc est à 2 N. abstulero 20. habebo bis tertium, scilicet 2 N. — 20. simplex ergo tertius est 1 N. — 10. Ob hæc eadem erit & primus 1 N. — 15. secundus verò 1 N. — 20. superest vt tres simul æquentur 2 N. sed tres simul efficiunt 3 N. — 45. Hoc ergo æquatur 2 N. & fit 1 N. 45. Ad positiones. Erit primus 30. secundus 25. tertius 35. & hi satisfaciunt quæstioni.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι τοῦ λοιποῦ ὑπερέχωσι τῷ ἐπιταχθέντι ἀριθμῷ. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον καὶ τὸν δεύτερον τοῦ τρίτου ὑπερέχειν μονάδας κ̄. τὸν δὲ δεύτερον καὶ τὸν τρίτον τοῦ πρώτου ὑπερέχειν μονάδας λ̄. τὸν δὲ τρίτον καὶ τὸν πρῶτον τοῦ δευτέρου ὑπερέχειν μονάδας μ̄. τετάχθωσαν οἱ τρεῖς, ςς οἱ β̄. καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ὑπερέχουσι μονάδας κ̄. κοινοῦ προστεθέντος τοῦ τρίτου, οἱ τρεῖς, δίς ἐστι ὁ τρίτος καὶ ἡ ὑπεροχὴ μονάδες κ̄. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τελῶν, τουτέστιν ἀριθμῶν, δύο ἀφέλω μονάδας κ̄. ἕξω δὶς τὸν τρίτον, ἀριθμῶν δύο λεῖψει μο κ̄. ἅπαξ ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ςς ἑνὸς λεῖψει μο ῑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἔσται ςς ἑνὸς, λεῖψει μο ιε̄. ὁ δεύτερος ςς ἑνὸς λεῖψει μο κ̄. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς εἶναι ἴσους ἀριθμοῖς δυσίν. ἀλλ᾽ οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσιν ςς οὺς τρεῖς λεῖψει μο με̄. ταῦτα ἴσα ςς οῖς δυσὶ, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο με̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μονάδες λ̄. ὁ δὲ δεύτερος μο κε̄. ὁ δὲ τρίτος μο λε̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XVIII.

ADIECTO *vtrimque communi tertio*, &c. Res à Scholiaste obscuratur potius quàm illustretur. Quod autem ait Diophantus tale est. Sint tres numeri A B C. ita vt ambo A B. simul superent tertium C. interuallo D. infert Diophantus. Ergo tres A B C. simul continent bis ipsum C. & semel ipsum D. quia enim A B. simul æquantur ipsis C D. simul, si vtrimque addatur ipse C. erunt tres A B C. simul, æquales ipsi D. & duplo ipsius C. Quod erat propositum. Cæterùm ex operatione Diophanti elicitur huiusmodi Canon.

A 3. B 4. C 5.
D 2.

A semisse aggregati excessuum aufer sigillatim semissem cuiuslibet excessus, residua erunt quæsiti numeri. vel quod idem est.

Ab aggregato excessuum aufer sigillatim ipsos excessus, residuorum semisses erunt quæsiti numeri.

Hinc autem manifestè colligitur Aggregatum ipsum excessuum æquale esse summæ quæsitorum numerorum. Quod tamen etiam aliter demonstrabitur hac arte. Sint tres numeri A B C. ita vt ambo A B. superent C. excessu D. Ambo B C. superent A excessu E. denique ambo A C. superent B. excessu F. dico summam ipsorum A B C. æquari summæ ipsorum D E F. Quoniam enim per mox demonstrata tres A B C. continent bis ipsum C. & semel ipsum D. itemque tres A B C. continent bis ipsum A & semel ipsum E. ac denique tres A B C. continent bis ipsum B & semel ipsum F. Patet summam ipsorum A B C. ter, continere bis

A 30. B 25. C 35.
D 20. E 30. F 40.

ipsos A B C. & semel ipsos D E F. Quare si vtrimque auferantur ipsi A B C. bis, remanent iidem A B C. semel, æquales ipsis D E F. semel. Quod erat ostendendum.

QVÆSTIO XIX.

Ἄλλως.

ΕΠΕΙ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ὑπερέχουσι μονάδας κ̄. ἔστω ὁ τρίτος ςοῦ ἑνός. συναμφότερος ἄρα ὅτε πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος ἔσται ςοῦ ἑνὸς μο κ̄. πάλιν ἐπεὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος τοῦ πρώτου ὑπερέχουσι μονάδας λ̄. τάσσω τὸν δεύτερον τοσούτων μονάδων ὅσων ἐστὶ ὁ ἥμισυς τῶν τε κ̄, καὶ λ̄. τουτέστι μονάδων κε̄. καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερός ἐστιν ςοῦ ἑνὸς μο κ̄. ὧν ὁ δεύτερός ἐστι μονάδων κε̄. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ἀριθμοῦ ἑνὸς λείψει μο ε̄. λοιπὸν δὲ καὶ τὸν τρίτον μετὰ τοῦ πρώτου, τοῦ δευτέρου ὑπερέχειν μονάδας μ̄. ἀλλὰ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου ἐστὶν ἀριθμοὶ δύο λείψει μονάδων ε̄. ἴσοι ἄρα εἰσὶν μονάσιν ξε̄. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις· ἀριθμοὶ ἄρα δύο ἴσοι μονάσιν ο̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο λε̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν πρῶτον ςοῦ ἑνὸς λείψει μο ε̄. ἔσται μο λ̄. τὸν δὲ δεύτερον μονάδων κε̄. τὸν δὲ τρίτον ςοῦ ἑνός, ἔσται μο λε̄.

Aliter.

QVANDOQVIDEM primus & secundus superant tertium vnitatibus 20. esto tertius 1 N. Igitur primus & secundus iuncti erunt 1 N. + 20. Rursus quoniam secundus & tertius superant primum vnitatibus 30. Pono secundum tot vnitatum, quantus est semissis numerorum 20. & 30. nimirum vnitatum 25. Et quia primus & secundus iuncti sunt 1 N. + 20. quorum secundus est vnitatum 25. reliquus erit primus 1 N. — 5. Superest vt tertius & primus iuncti secundo superaddant vnitates 40. sed primus cum tertio est 2 N — 5. hoc ergo æquatur vnitatibus 65. Communis addatur defectus. Igitur 2 N. æquantur 70. & fit 1 N. 35. Ad positiones. Statueram primum 1 N — 5. erit ergo 30. secundum autem posueram 25. At tertium 1 N. Quamobrem erit 35.

IN QVAESTIONEM XIX.

HIC Diophantus vsurpat huiusmodi Theorema.

Datis tribus numeris, ita vt duo quilibet simul reliquo sint maiores, summa duorum excessuum quibus bini reliquum superant, dupla est vnius ex tribus datis numeris, illius scilicet ad quem reliquorum excessus non est relatus.

Quod sic demonstratur. Sint tres dati A B C. & iidem excessus qui prius D E F. dico summam excessuum D E. esse duplum ipsius B. & sic de aliis. Quia enim ambo A B. æquantur ambobus C D. itémque ambo B C. æquantur ambobus A E. erunt ipsi A C. semel & B. bis æquales ipsis A C D E. Quare auferendo vtrimque ipsos A C. remanet B bis æqualis ipsis D E. Quod erat propositum. Eodem argumento ostendemus summam duorum E F. esse duplam ipsius C. & summam amborum D F esse duplam ipsius A. Igitur ex omni parte constat propositum. Hinc autem elicitur huiusmodi Canon.

A 30. B 25. C 35.
D 30. E 30. F 40.

Summa duorum quorumlibet excessuum cape semissem, habebis quæsitos numeros.

Cæterùm placet in artis specimen ex supradicto Theoremate aliud etiam non iniucundum adducere, nimirum.

Datis tribus numeris, ita vt duo quilibet simul reliquo sint maiores, duorum excessuum differentia dupla est differentia duorum datorum numerorum, inter quos vicissim facta est excessuum comparatio.

A 30. B 25. C 35.
D 20. E 30. F 40.
G 10. K 5.

Sint dati qui prius A B C. & iidem excessus D E F. & duorum D E. differentia sit G. cuius semissis K. dico K esse differentiam ipsorum A C. Quia enim vt ostensum est amborum D E summa dupla est ipsius B [1] sunt D B E. arithmeticè proportionales. Quare duorum D B. idem est interuallum, quod duorum B E. Cum ergo extremorum differentia componatur ex differentiis extremorum & medij, patet G duplum esse differentiæ D ad B vel B. ad E. Quamobrem K est differentia D & B. Itaque quoniam ambo A B. æquantur ambobus C D. ex hypothesi [2] erit in arithmetica medietate A ad C. vt D ad B. Quare cùm ostensum sit K esse differentiam ipsorum D B. erit idem K differentia ipsorum A C. Quod erat ostendendum. Eodem modo ostendemus semissem differentiæ ipsorum E F. esse differentiam ipsorum A B. itemque semissem differentiæ ipsorum D F. esse differentiam ipsorum B C. Igitur ex omni parte constat propositum.

[1] 5. 1. porif.
[2] 4. 1. porif.

Quod si lubeat theorematis huius opem implorare, licebit rursus alia operatione ab vtraque Diophanti longè diuersa problema istud absoluere. Ponatur A 1 N. Cùm ergo E sit minor quàm F numero 10. erit A minor quàm B, semisse ipsius 10. Quare B erit 1 N. − 5. Rursus quia E maior est quàm D. numero 10. erit & C maior quàm A semisse ipsius 10. Erit igitur C. 1 N + 5. Iam ergo cùm tres quæsiti numeri sint 1 N. 1 N − 5. 1 N. + 5. triplici via licet ad æquationem peruenire. Nam primi & secundi summa 2 N − 5. æquatur summæ tertij & interualli D. nimirum 1 N. + 25. Rursus secundi & tertij summa nimirum 2 N. æquatur summæ primi & interualli E, nimirum 1 N + 30. Denique primi & tertij summa 2 N. + 5. æquatur summæ secundi & interualli F. nimirum 1 N. + 35 & has tres æquationes si resoluas sigillatim, fiet semper 1 N. 30. primus scilicet numerus. Posset etiam poni 1 N. pro secundo, vel pro tertio, & vtroque modo triplici via ad æquationem perueniri, vt manifestum est.

QVÆSTIO XX.

INVENIRE quatuor numeros, vt terni iuncti reliquum superent numero imperato. Oportet autem semisse summæ quatuor interuallorum minorem esse quemlibet ipsorum. Postuletur itaque vt primus & duo deinceps coniuncti quarto superaddant vnitates 20. secundus & duo deinceps primo superaddant vnitates 30. tertius & duo deinceps similiter secundo superaddant vnitates 40. & adhuc quartus & duo deinceps coniuncti tertio superaddant vnitates 50. Ponatur quatuor numerorum summa 2 N. & quandoquidem primus & duo deinceps quarto superaddunt vnitates 20. & quo tres primi superant quartum, eo quatuor simul superant duplum quarti, sunt autem quatuor simul 2 N. igitur 2 N. superant duplum quarti vnitatibus 20. Quamobrem duplum quarti est 2 N. − 20. Ergo ipse quartus est 1 N. − 10. eadem de causa, erit & primus 1 N. − 15. secundus 1 N. − 20. & tertius 1 N. − 25. superest vt quatuor simul æquales sint 2 N. sed quatuor simul faciunt 4 N. − 70. Hoc ergo æquatur 2 N. & fit 1 N. 35. Ad positiones. Erit primus 20. secundus 15. tertius 10. quartus 25. & quæstioni satisfaciunt.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως οἱ τρεῖς λαμβανόμενοι τοῦ λοιποῦ ὑπερέχωσιν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν. δεῖ δὴ τὸν ἐκ τῆς ὑπεροχῆς τῶν τεσσάρων τοῦ ἡμίσου ἐλάττονα εἶναι ἕκαστον αὐτῶν. ἐπιτετάχθω δὴ τοὺς μὲν ἀπὸ πρώτου τρεῖς κατὰ τὸ ἑξῆς συντεθέντας τοῦ τετάρτου ὑπερέχειν μονάδας $\bar{\kappa}$. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τρεῖς τοῦ πρώτου ὑπερέχειν μονάδας $\bar{\lambda}$. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ τρίτου τρεῖς ὁμοίως τοῦ δευτέρου ὑπερέχειν μονάδας $\bar{\mu}$. καὶ ἔτι τοὺς ἀπὸ τετάρτου τρεῖς κατὰ τὸ ἑξῆς συντεθέντας τοῦ τρίτου ὑπερέχειν μονάδας $\bar{\nu}$. τετάχθωσαν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ δύο, καὶ ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τοῦ πρώτου τρεῖς τοῦ τετάρτου ὑπερέχουσι μονάδας $\bar{\kappa}$. ὃν δὲ ὑπερέχουσιν οἱ πρῶτοι τρεῖς τοῦ τετάρτου, τούτῳ ὑπερέχουσιν καὶ οἱ τέσσαρες τοῦ τετάρτου δίς, καὶ εἰσὶν οἱ τέσσαρες ςς^{οὶ} $\bar{\beta}$. ἀριθμοὶ ἄρα δύο, δὶς τοῦ τετάρτου ὑπερέχουσι μονάδας $\bar{\kappa}$. ὁ ἄρα διπλασίων τοῦ τετάρτου ἔσται ςς^{οὶ} $\bar{\beta}$ λείψει μ^{ο} $\bar{\kappa}$. αὐτὸς ἄρα ἔσται ς^{οῦ} ἑνὸς λείψει μ^{ο} $\bar{\iota}$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἔσται ς^{οῦ} ἑνὸς λείψει μονάδων $\bar{\iota\epsilon}$. ὁ δὲ δεύτερος ς^{οῦ} ἑνὸς λείψει μ^{ο} $\bar{\kappa}$. καὶ ἔτι ὁ τρίτος ς^{οῦ} ἑνὸς λείψει μ^{ο} $\bar{\kappa\epsilon}$. λοιπόν ἐστι τοὺς τέσσαρας ἴσους εἶναι ἀριθμοῖς δυσίν. ἀλλ' οἱ τέσσαρές εἰσιν ςς^{οὶ} $\bar{\delta}$ λείψει μ^{ο} $\bar{o}$. ταῦτα ἴσα ςς^{οῖς} $\bar{\beta}$. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^{ο} $\bar{\lambda\epsilon}$. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ^{ο} $\bar{\kappa}$. ὁ δὲ δεύτερος μ^{ο} $\bar{\iota\epsilon}$. ὁ δὲ τρίτος μ^{ο} $\bar{\iota}$. ὁ δὲ τέταρτος μ^{ο} $\bar{\kappa\epsilon}$. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XX.

CONDITIONIS adiectæ ratio est, quia vt mox ostendetur, excessuum summa dupla est summæ ipsorum quatuor numerorum. Quare semissis summæ excessuum qui æqualis est summæ numerorum debet esse maior tribus quibuslibet, ac proinde multò magis, maior est excessu trium super reliquum. Quod autem summa excessuum, sit dupla summæ numerorum, sic ostendo. Sint quatuor numeri A B C D. & excessus trium quorumlibet super reliquum sint E F G H. Dico summam ipsorum E F G H duplum esse summæ ipsorum A B C D. Quia enim A B C. simul excedunt D numero E. erunt A B C. simul æquales ipsis D E. & addendo vtrimque ipsum D. erit summa ipsorum A B C D. æqualis ipsi

A 20. B 15. C 10. D. 25.
E 20. F 30. G. 40. H 50.

D bis, & ipsi E semel. Eodem modo ostendemus summam eorumdem A B C D æquari ipsi A bis & F semel, itemque ipsi B bis & G semel, ac denique ipsi C bis & H semel. Ergo sumendo quater ipsos A B C D. erit quadruplum hoc æquale ipsis A B C D bis, & ipsis E F G H semel. Quare auferendo vtrimque ipsos A B C D bis, remanent adhuc A B C D bis, remanent adhuc A B C D bis æquales ipsis E F G H semel. Quod erat propositum.

Ceterùm patet demonstrationis medium congruenti modo applicari posse cuilibet Numerorum multitudini propositæ, vnde fiet regula generalis.

Si fuerint quotlibet numeri, quorum omnium vno dempto super reliquum excessus dentur, erit excessuum summa summæ numerorum multiplex secundum numerum multitudinis numerorum binario multatum.

Ita si fuerint quinque numeri, erit excessuum summa summæ numerorum tripla, & si fuerint sex numeri, erit excessuum summa, numerorum summæ quadrupla, & sic in infinitum. Atque ex his & ex ipsa Diophanti operatione elicietur Canon generalis ad huiusmodi quæstiones soluendas proposita qualibet multitudine numerorum.

Summam excessuum diuide per numerum multitudinis numerorum binario multatum, à quotiente aufer sigillatim ipsos excessus, residuorum semisses erunt quæsiti numeri.

QVÆSTIO XXI.

Ἄλλως.

ΕΠΕΙ οἱ ἀπὸ τοῦ πρώτου τρεῖς τοῦ τετάρτου ὑπερέχουσι μο κ. τετάχθω ὁ τέταρτος ςˢ ἑνός, οἱ τρεῖς ἄρα ἔσονται ςˢ ἑνὸς μο κ. πάλιν ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τρεῖς τοῦ πρώτου ὑπερέχουσι μο λ. τετάχθω συναμφότερος ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος μο τοσούτων, ὅσων ἐστὶν ὁ ἥμισυς τῶν δύο ὑπεροχῶν. λέγω δὴ τῶν κ. καὶ τῶν λ. τουτέστι μο κε. καὶ ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τοῦ πρώτου τρεῖς εἰσὶν ςˢ ἑνὸς μο κ. ὧν ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος μο κε. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ςˢ ἑνὸς λείψει μο ε. καὶ ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τρεῖς ὑπερέχουσι τοῦ πρώτου μο λ. οἱ δὲ ἀπὸ τοῦ τρίτου τρεῖς ὑπερέχουσι τοῦ δευτέρου μο μ. συναμφότερος ἄρα ὁ τρίτος καὶ ὁ τέταρτος ἔσται μο λε. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται μο λε. λείψει ςˢ ἑνός. ἔστι δὲ καὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος μο κε. ὧν ὁ τρίτος μο λε λείψει ςˢ ἑνός, λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ςˢ ἑνὸς λείψει μο ι. λοιπόν ἐστι τοὺς ἀπὸ τετάρτου τρεῖς τοῦ τρίτου ὑπερέχειν μο ν. ἀλλ' οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσι ἀριθμοὺς τρεῖς λείψει μο ιε. ὁ δὲ τρίτος μο λε. λείψει ςˢ ἑνός. δεῖ δὴ καὶ ςˢˢ τρεῖς λείψει μο ιε. ὑπερέχειν μονάδας λε λείψει ςˢ ἑνός, μο ν. ὥστε μονάδες πε λείψει ςˢ ἑνὸς ἴσαι εἰσὶν ςˢˢ τρισὶ λείψει μο ιε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο κε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν πρῶτον ςˢ ἑνὸς λείψει μο ε. ἔσται μο κ. ὁ δὲ δεύτερος ὁμοίως μο ιε. ὁ δὲ τρίτος μο ι, ὁ δὲ τέταρτος μο κε.

Aliter.

QVONIAM tres à primo superant quartum vnitatibus 20. Ponatur quartus 1 N. Tres ergo reliqui erunt 1 N. + 20. Rursus quia tres à secundo superant primum vnitatibus 30. Ponantur secundus & tertius simul tot vnitatum, quot continet semissis duorum interuallorum, duorum scilicet 20. & 30. hoc est vnitatum 25. Et quoniam tres à primo sunt 1 N. + 20. quorum secundus & tertius sunt 25. relinquitur primus 1 N. — 5. Et quia tres à secundo superant primum vnitatibus 30. At tres à tertio superant secundum vnitatibus 40. erunt vtique tertius & quartus simul 35. Igitur relinquitur pro tertio 35 — 1 N. Sunt autem secundus & & tertius simul 25. quorum tertius est 35 — 1 N. relinquitur ergo secundus 1 N. — 10. Superest vt tres à quarto superent tertium vnitatibus 50. sed tres illi simul sunt 3 N. — 15. Tertius autem est 35. — 1 N. Oportet itaque 3 N. — 15. superare 35 — 1 N. æquantur 3 N. — 15. & fit 1 N. vnitatum 25. Ad positiones. Statueram primum 1 N. — 5. erit ergo 20. secundus verò similiter 15. tertius 10. quartus 25.

IN QVAESTIONEM XXI.

HIC supponit Diophantus, hoc theorema.

Datis quatuor numeris, ita vt tres quilibet reliquo sint maiores, summa duorum excessuum, quibus tres reliquum superant, dupla est summa duorum ad quos excessuum relatio facta non est.

A 20. B 15. C. 10. D. 25.
E 20. F 30. G. 40. H 50.

Sint numeri & excessus qui suprà. Dico summam excessuum E F. duplam esse summæ ipsorum B C. & sic de aliis. Etenim quia tres A B C æquantur duobus D E itemque tres B C D. æquantur duobus A F. erunt A D. semel & B C. bis æquales ipsis A D E F. Quare auferendo vtrimque ipsos A D. remanent B C. bis æquales ipsis E F. Quod erat propositum.

Hinc etiam patet hoc Theorema ad quotlibet numeros congruenter extendi, semper enim eodem modo ostendetur summam duorum excessuum duplam esse summæ omnium ad quos non est facta excessuum relatio. Ita si fuerint quinque numeri duorum excessuum summa erit dupla summæ trium numerorũ ad quos non fiet excessuum relatio, & sic in infinitum. Sed & eadem ratione ad quotlibet numeros extendemus Theorema quod attulimus ad quæstionẽ decimam nonam, & illud sic proponemus.

Datis quotlibet numeris, ita vt omnes simul vno dempto sint semper reliquo maiores; duorum excessuum differentia dupla est differentiæ duorum numerum, inter quos vicissim facta est excessuum comparatio.

Sint quatuor numeri A B C D. & excessus trium quorumlibet super reliquum sint E F G H. & ipsorum E F. interuallum K cuius semissis L. Dico L. esse interuallum ipsorum A D. Nam sumpta M summa reliquorum B C. inter quos non fit excessuum relatio, erit per iam ostensa, summa duorum E F. dupla ipsius M. [1] Quare E M F. erunt in arithmetica medietate. Atque adeo cùm extremorum E F differentia sit K, eius semissis L. erit differentia ipsorum E M. *quinta 2. porism.*

M 25.
A 20. B 25. C 10. D 25.
E 20. F 30. G 40. H 50.
K 10. L 5.

Itaque quia tres A B C. seu duo A M. æquantur duobus D E ex hypothesi, [2] erunt in arithmetica medietate A ad D. vt E ad M. Quare & ipsorum A D. interuallum erit L. Quod demonstrandum erat. Eademque est ratio si plures fuerunt numeri, vt patet. Quamobrem ex omni parte constat propositum. Licebit ergo & huius theorematis auxilio alia operatione, eaque sane multiplici soluere huiusmodi quæstiones, vt docuimus ad decimam nonam. Sed de his hactenus. *quarta 2. porism.*

QVÆSTIO XXII.

PROPOSITVM numerum in tres numeros partiri, vt vteruis extremorum adsumpto medio ad reliquum extremum datam habeat rationem. Statutum sit numerum 100. diuidere in tres numeros, vt primus & secundus tertij triplum constituant. At secundus & tertius quadruplum primi. Ponatur tertius 1 N. & quia primus & secundus faciunt triplum tertij, erunt vtique ambo 3 N. Tres ergo numeri simul erunt 4 N. æquales sane numero 100. & fit 1 N. 25. Ad positiones. Posueram tertium 1 N. erit ergo 25. Statueram autem primum & secundum simul 3 N. erunt ergo 75. Rursus quia secundus & tertius constituunt quadruplum primi. Ponatur primus 1 N. erunt igitur secundus & tertius 4 N. Tres ergo simul sunt 5 N. sed & vnitates 100. fit igitur 1 N. 20. est ergo primus 20. tertius verò 25. Residuum igitur est secundus, nimirum 55. & satisfaciunt quæstioni.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἑκάτερος τῶν ἄκρων προσλαβὼν τὸν μέσον πρὸς τὸν λοιπὸν τῶν ἄκρων λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ̄. διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ᾖ τριπλασίων. ὁ δὲ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος τοῦ πρώτου ᾖ τετραπλασίων. τετάχθω ὁ τρίτος ςº ἑνὸς, καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ἐστὶ τριπλασίων τετάχθωσαν οἱ δύο, ἀριθμοὶ τρεῖς. οἱ τρεῖς ἄρα εἰσὶν ςςοὶ δ̄. οὗτοι ἴσοι μονάσιν ρ̄ καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μº κε̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν τρίτον ςº ἑνός. ἔσται μº κε̄. τὸν δὲ πρῶτον καὶ δεύτερον. ςς̄ τριῶν, ἔσονται μº οε̄. πάλιν ἐπεὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος τοῦ πρώτου εἰσὶ τετραπλασίονες. τετάχθω ὁ πρῶτος ςº ἑνὸς, ἔσται ἄρα ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος ςς̄ τεσσάρων. οἱ τρεῖς ἄρα εἰσὶν ςςοὶ ε̄. ἀλλὰ καὶ μº ρ̄. καὶ γίνεται ὁ ςº μº κ̄. ἔσται ἄρα ὁ πρῶτος μº κ̄. ὁ δὲ τρίτος μº κε̄. λοιπὸς ἄρα ὁ β̄ ἔσται μº νε̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXII.

EX operatione Diophanti eliciemus huiusmodi Canonem.

Datum numerum diuide sigillatim per denominatorem vtriusque rationis postulata vnitate auctum orientur extremi quæsitorum.

Porrò quamuis operatio Diophanti per duas positiones sit elegans, potest tamen solui quæstio

per vnicam tantum positionem, etiam sine auxilio regulæ quantitatis, quicquid dicat Xilander. Quod ita fiet. Ponatur primus 1 N. ergo secundus & tertius simul erunt 4 N. & trium summa 5 N. quæ si diuidatur in duas partes, quarum altera alterius sit tripla, habebimus hinc tertium, inde summam primi & secundi. Diuidemus autem 5 N. in duas partes seruantes proportionem triplam per Canonem secundæ huius, eruntque $1\frac{1}{4}$ N & $3\frac{3}{4}$ N. est ergo primus 1 N. tertius $1\frac{1}{4}$ N. & siue à summa secundi & tertij quæ est 4 N. auferatur tertius, siue à summa primi & secundi quæ est $3\frac{3}{4}$ N. auferatur primus, remanet secundus $2\frac{3}{4}$ N. Omnes autem simul faciunt 5. N. Igitur 5 N. æquantur 100. & fit 1 N. 20. Ad hypostases, erit primus 20. secundus 55. tertius 25. & constat.

QVÆSTIO XXIII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ μέγιστος τοῦ μέσου ὑπερέχῃ τῷ τοῦ ἐλαχίστου δοθέντι μέρει. ὁ δὲ μέσος τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχῃ τῷ τοῦ μεγίστου δοθέντι μέρει. ὁ δὲ ἐλάχιστος δοθέντι ἀριθμῷ τοῦ τοῦ μέσου δοθέντος μέρους. δεῖ δὴ τὸν μέσον τοῦ ἐλαχίστου, τοσούτῳ μέρει τοῦ μεγίστου ὑπερέχειν, ὥστε τὸν ὁμώνυμον τοῦ τοιούτου μέρους ἐπὶ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου πρὸς τὸν ἐλάχιστον πολλαπλασιαζόμενον, ποιεῖν ἐν αὐτῷ πλῆθος ἀριθμῶν πλεῖον, ἢ ἐν τῷ μέσῳ. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μέγιστον τοῦ μέσου ὑπερέχειν τῷ τοῦ ἐλαχίστου τρίτῳ, τὸν δὲ μέσον τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχειν τῷ τοῦ μεγίστου τρίτῳ, τὸν δὲ ἐλάχιστον ὑπερέχειν μονάδας ῑ τοῦ τοῦ μέσου τρίτου μέρους. τετάχθω δὴ ὁ ἐλάσσων ςου ἑνὸς, καὶ ὧν ὑπερέχει τοῦ μέσου τρίτου μονάδων ῑ. ὁ ἄρα μέσος ἔσται ἀριθμῶν τριῶν, ἵνα ἔχῃ ὁ ἐλάχιστος τὸ τρίτον τοῦ μέσου καὶ μονάδας ῑ. ἢ καὶ οὕτως. τετάχθω ὁ μέσος ἀριθμοὶ τρεῖς, καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν ἐλάχιστον ὑπερέχειν τοῦ τρίτου μέρους τοῦ μέσου μο ῑ. ἔσται ςου ἑνὸς, καὶ μο ῑ. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν μέσον τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχειν τῷ τοῦ πρώτου τρίτῳ μέρει. ἀλλ᾽ ὁ μέσος τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχει ςοῖς δυσὶ λείψει μο ῑ. ταῦτα ἄρα τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ μεγίστου, αὐτὸς ἄρα ὁ μέγιστος ἔσται ςς̄ ϛ̄ λείψει μο λ̄. δέοι δ᾽ ἄρα καὶ τὸν μέγιστον τοῦ μέσου ὑπερέχειν τῷ τοῦ ἐλαχίστου τρίτῳ μέρει. ἀλλ᾽ ὁ μέγιστος τοῦ μέσου ὑπερέχει ςςοῖς τρισὶ λείψει μο λ̄. ταῦτα ἄρα τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ ἐλαχίστου, ὁ ἄρα ἐλάχιστος ἔσται ἀριθμῶν θ̄ λείψει μο ϟ. ἀλλὰ καὶ ἀριθμοῦ ἑνὸς μο ῑ ὑπέκειτο. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο ιβ. καὶ ἥμισυ. ἔσται ἄρα ὁ μὲν τρίτος μο κβ. καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ μέσος λζ. καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ μέγιστος μο με̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE tres numeros, quorum maximus medium excedat minimi data parte; medius minimum superet maximi data parte. At minimus dato numero superet datam medij partem. Oportet autem medium tanta parte maximi præstare minimo, vt denominatore partis illius ducto in id quo medius excedit minimum, maior in eo existat Numerorum multitudo, quam in medio. Constitutum sit maximum medio præstare, triente minimi. Medium autem minimo superaddere trientem maximi. Minimum denique superare trientem medij 10. vnitatibus. Ponatur itaque minimus 1 N. & 10. vnitatum quibus præstare debet triente medij. Erit ergo medius 3 N. vt contineat minimus trientem medij & vnitates 10. vel sic. Ponatur medius 3 N. & quia volo minimum superare trientem medij decem vnitatibus, erit minimus 1 N. + 10. Restat vt medius minimum superet maximi triente, sed quo medius minimum superat est 2. N. − 10. hoc ergo est triens maximi, ipse igitur maximus est 6 N. − 30. Oportet itaque & maximum medio præstare, triente minimi, sed quo maximus medium excedit est 3 N. − 30. hoc ergo est triens minimi, minimus ergo est 9 N. − 90. sed & repertus est 1 N. + 10. Quamobrem fit 1 N. 12. $\frac{1}{2}$ erit igitur tertius 22 $\frac{1}{2}$. Medius 37 $\frac{1}{2}$. Maximus 45. & satisfaciunt proposito.

IN QVAESTIONEM XXIII.

OPORTET *autem medium* &c. Refertur hæc conditio ad Algebricos numeros nota N. affectos, & eius necessitas ita demonstrari potest. Quia Diophantus ponit pro medio certam Numerorum multitudinem, erit & minimus certa Numerorum multitudo + certis vnitatibus, quia videlicet minimus est certa pars medij + certis vnitatibus. Quare medius excedet minimum certa mul-

titudine Numerorum — certis vnitatibus, cùm enim in medio nullæ ſint vnitates abſolutæ, non poterunt ab eo ſubtrahi vnitates quæ ſunt in minimo, niſi per ſignum —. Cùm ergo exceſſus iſte medij ſupra minimum ſit certa pars maximi, vt habeatur maximus, ducetur hic exceſſus in denominatorem partis, fietque maximus conſtans ex multitudine Numerorum — certis vnitatibus. Neceſſe eſt autem vt hæc Numerorum multitudo exiſtens in maximo, ſit maior Numerorum multitudine exiſtente in medio, alioquin ſi ponatur minor vel æqualis, cùm præterea adiunctum habeat defectum vnitatum, ſequetur maximum minorem eſſe medio. Quod eſt abſurdum. Quæ omnia ex ipſamet Diophanti operatione manifeſta ſunt. Sed (quod pace Diophanti dictum velim) hæc conditio, parum congruenter aſſignata videtur. Etenim cùm quæſtioni apponitur conditio, id fit vt per eam agnoſcamus vtrum poſſibilis ſit quæſtio, necne, ne videlicet oleum operamque perdamus circa impoſſibilem fruſtra operantes, ac proinde talis eſſe debet conditio, vt ante ipſam operationem naturam quæſtionis nobis aperiat. Quod ſane non præſtat hæc Diophanti conditio, cùm per eam non niſi iam prouecta operatione, de ſtatu quæſtionis iudicium fieri poſſit. Itaque ſolitum authoris acumen hîc deſidero. Certè non erat difficile legitimam conditionem præſcribere, hoc modo.

Oportet denominatorem partis medij minorem eſſe numero, qui fit ex eodem denominatore vnitate multato in denominatorem partis maximi.

Canonem hîc ſi formare libet, neceſſe erit eum perplexiorem fieri, hoc ſcilicet modo.

Duc inter ſe denominatores partium maximi & minimi, & productum vnitate auctum ducito in datum numerum, productúmque diuide per ſolidum ſub tribus denominatoribus multatum vnitate & numero qui ſit ex denominatore partis minimi in ſummam aliorum duorum denominatorum. Quotienti adde datum numerum, fiet minimus quæſitorum. Et eundem quotientem ducito in denominatorem partis medij, fiet ipſe medius.

Verbi gratia debeat maximus ſuperare medium quarta parte minimi. Medius minimum ſexta parte maximi. minimus quintam partem medij numero 12. ducito inter ſe 4. & 6. producto 24. adde 1. fit 25. quem ducito in 12. fit 300. quem diuide per ſolidum ſub denominatoribus 5. 6. 4. multatum vnitate & producto ex 4. in ſummam aliorum, hoc eſt diuide 300. per 75. fit 4. cui ſi addas 12. fit minimus quæſitorum 16. & ſi ducas 4. in denominatorem 5. fiet 20. medius, vnde facile eſt reperire maximum 24. cùm ſit ſextuplus ad interuallum medij & minimi.

QVÆSTIO XXIV.

INVENIRE tres numeros vt maximus medium ſuperet, minimi data parte. Medius minimum excedat, maximi data parte. Minimus dato numero ſuperet datam medij partem. Oportet autem maximi talem partem dari, vt adiecta minimo, numeros pauciores conficiat iis qui pro medio numero ab initio ponebantur. Ponatur rurſus minimus 1 N. & 10. vnitates quibus ſuperat medij trientem; erit ergo medius 3. N. vt ſcilicet minimus ſuperet 10. vnitatibus trientem medij. Rurſus quia volo maximum medio præſtare triente minimi, ſi addidero medio minimi trientem habebo maximum, nimirum $3 \frac{1}{3}$ N. + $3 \frac{1}{3}$. Reſtat vt medius æqualis ſit minimo, & maximi trienti. Sed minimus cum triente maximi eſt $2 \frac{1}{9}$. Hoc igitur æquatur medio ſeu 3 N. Aufero ſimilia à ſimilibus. Ergo $\frac{8}{9}$ N. æquantur $11 \frac{1}{9}$. Omnia nouies. Igitur 8 N. æquantur 100.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ μέγιστος τοῦ μέσου ὑπερέχῃ τῷ τοῦ ἐλαχίστου δοθέντι μέρει. ὁ δὲ μέσος τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχῃ τῷ τοῦ μεγίστου δοθέντι μέρει. ὁ δὲ ἐλάχιστος δοθέντι ἀριθμῷ τοῦ τοῦ μέσου δοθέντος μέρους. δεῖ δὴ τὸν διδόμενον τοῦ μεγίστου μέρους τηλικοῦτον δίδοσθαι, ὥστε προστιθέμενον τῷ ἐλαχίστῳ ποιεῖν τοὺς ἐν αὐτῷ ἀριθμοὺς ἐλάσσονας τῶν ἐξ ἀρχῆς λαμβανομένων τοῦ μέσου. τετάχθω πάλιν ὁ ἐλάσσων ςου ἑνὸς, καὶ ὧν ὑπερέχει τοῦ μέσου τρίτου μέρους μονάδων ι. ἔσται ἄρα ὁ μέσος ςςοὶ τρεῖς, ἵνα ὑπερέχῃ ὁ ἐλάχιστος μονάδας ι τοῦ τοῦ μέσου τρίτου μέρους. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν μέγιστον τοῦ μέσου ὑπερέχειν τῷ τοῦ ἐλαχίστου τρίτῳ μέρει, ἐὰν προσθῶ τῷ μέσῳ τοῦ ἐλαχίστου τρίτον μέρος, ἕξω τὸν μέγιστον ςς γ. α γ' μο γ α γ'. λοιπὸν δεῖ καὶ τὸν μέσον ἴσον εἶναι τῷ ἐλαχίστῳ, καὶ τῷ τοῦ μεγίστου τρίτῳ μέρει. ἀλλ' ὁ ἐλάχιστος μετὰ τοῦ τρίτου μέρους τοῦ μεγίστου ἀριθμοί εἰσι β α θ'. καὶ μονάδες ια α θ'. ταῦτα ἴσα τοῖς τοῦ μέσου ἀριθμοῖς τρισίν. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. ἀριθμοὶ ἄρα η θ'. ἴσα ἐστι μονάσιν ια α θ'. πάντα ἐννεάκις. ςςοὶ ὀκτὼ ἴσοι μο-

νάσιν ἑκατόν. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο. ιβ καὶ ἥμισυ. καὶ ἡ αὐτὴ δεῖξις τῇ ἐπάνω.

& fit 1 N. 12 $\frac{1}{2}$ & eadem est quæ suprà demonstratio.

IN QVAESTIONEM XXIV.

EST eadem prorsus quæstio cum præcedente, sed alia operatio. Conditio adiecta eiusdem est naturæ cum ea quæ præcedenti apponitur, & eius necessitas simili ratiocinatione potest deprehendi, sed eodem vitio laborat atque præcedens, nec per eam determinari quicquam potest de quæstione proposita, antequam peracta operatione ad æquationem peruentum sit. Quare melius præscribetur sic.

Oportet denominatorem partis medij maiorem esse numero qui fit si einsdem denominatoris aucti parte vnitatis à parte minimi denominata, sumatur pars à parte maximi denominata, vnitate aucta.

Canon etiam ab hac operatione formari posset, sed intricatus. Quare cum huiusmodi Canones vix vsui esse possint ob eorum perplexitatem, illis supersedere satius erit.

QVÆSTIO XXV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς, ἑαυτοῦ διδῷ μέρος τὸ ἐπιταχθέν. ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον τῷ δευτέρῳ διδόναι ἑαυτοῦ τὸ τρίτον. τὸν δὲ δεύτερον τῷ τρίτῳ τὸ τέταρτον. καὶ ἔτι τὸν τρίτον τῷ πρώτῳ τὸ πέμπτον, καὶ γενέσθαι ἴσους μετὰ τὴν ἀντίδοσιν. τετάχθω ὁ πρῶτος ἀριθμῶν τινῶν τρίτον ἐχόντων μέρος, ἐπεὶ τρίτον δίδωσιν. ἔστω δὴ ἀριθμῶν τριῶν. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων τινῶν τέταρτον μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ τέταρτον δίδωσιν. ἔστω δὴ μονάδων τεσσάρων, καὶ μένει ὁ δεύτερος δοὺς καὶ λαβὼν ςοῦ ἑνὸς μο τριῶν. λοιπόν ἐστι τὸν πρῶτον δόντα καὶ λαβόντα γίνεσθαι ςοῦ ἑνὸς μο γ. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ τρίτον ςὸν ἕνα, λαβὼν δὲ μονάδας τρεῖς λεῖψει ἀριθμοῦ ἑνός, γίνεται ςοῦ ἑνός, μο γ. μονάδες ἄρα τρεῖς λεῖψει ςοῦ ἑνὸς πέμπτον μέρος εἰσὶ τοῦ τρίτου. αὐτὸς ἄρα ἐστὶ μο ιε λεῖψει ςς ε. δεήσει ἄρα καὶ τὸν τρίτον δοθέντα μὲν ἑαυτοῦ τὸ πέμπτον, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον μονάδα μίαν, γίνεσθαι ςοῦ ἑνὸς μο τριῶν. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ πέμπτον μονάδας τρεῖς λεῖψει ςοῦ ἑνός, λοιπός ἐστι μονάδων ιβ λεῖψει ςς δ. λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον μονάδα μίαν, γίνεται μο ιγ λεῖψει ςς δ. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσι τρισί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο β. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο ς. ὁ δὲ δεύτερος μο δ. ὁ δὲ τρίτος μο ε. καὶ φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE tres numeros, quorum si quisque proximè ipsum sequenti sui partem quæ mandatur dederit, inter eos qui dederunt & acceperunt fiat æqualitas. Statutum sit vt primus secundo det sui trientem; secundus tertio sui quadrantem; Tertius primo sui quintantem, & post mutuam hanc contributionem fiant æquales. Ponatur primus quotlibet numerorum qui trientem habeant, quandoquidem daturus est trientem, esto itaque 3. N. Statuatur secundus quotlibet vnitatum quæ quadrantem habeant, quia daturus est quadrantem; esto itaque vnitatum 4. & erit secundus datis & acceptis quæ imperata sunt 1 N. + 3. Restat vt & primus vbi dederit acceperitque, fiat 1 N. + 3. sed dans sui trientem 1 N. accipiens autem 3 − 1 N. fit 1 N. + 3. Igitur 3 − 1 N. est quinta pars tertij. ipso ergo tertius est 15 − 5 N. Oportet ergo & tertium dantem quidem sui quintantem, accipientem verò à secundo quadrantem illius, nempe vnitatem, fieri 1 N. + 3. sed dans sui quintantem, nimirum 3 − 1 N. relinquitur 12 − 4 N. Accipiens autem à secundo quadrantem, puta vnitatem, fit 13 − 4 N. Hoc ergo æquatur 1 N. + 3. & fit 1 N. 2. Ad positione. Erit primus 6. secundus 4. tertius 5. & constat propositum.

IN QVAESTIONEM XXV.

HÆC quæstio infinitas recipit solutiones, vt patet, cùm posito primo 3 N. poni possit pro secundo quilibet vnitatum numerus. Eodemque modo si ponas secundum 4 N. poni poterit tertius

tertius quilibet vnitatum numerus. Et si ponatur tertius 5 N. ponetur primus ad libitum quilibet vnitatum numerus.

Quod si determinare velis huiusmodi quæstiones ad vnicam solutionem, præscribendus est numerus in quo fieri debet æqualitas, vt si proponatur quæstio hoc modo. Sint inueniendi tres numeri, ita vt primus impertiendo sui triente secundum, secundus sui quadrante tertium. Tertius sui quintante primum, post hanc mutuam contributionem quilibet trium numerorum inueniatur esse 10. Tunc autem sic erit operandum. Esto primus 3 N. qui dando sui trientem secundo, remanebit 2 N. Quare cùm accipiendo quintantem tertij, debeat esse 10. Erit quintans tertij 10 — 2 N. ac proinde ipse tertius 50 — 10 N. qui dando sui quintantem remanet 40 — 8 N. vnde cùm accipiendo quadrantem secundi, debeat esse 10. erit vtique quadrans secundi 8 N. — 30. ac proinde ipse secundus 32 N — 120. superest vt secundus dando sui quadrantem, & accipiendo trientem primi, fiat etiam 10. fit autem 25 N. — 90. Igitur 25 N. — 90. æquantur 10. & fit 1 N. 4. Ad positiones. Erit primus 12. secundus 8. tertius 10. Ab hac quæstione parum differunt decima octaua & decima nona secundi vt fusius eo loco docebimus, ita vt videantur hinc eò translatæ.

QVÆSTIO XXVI.

INVENIRE quatuor numeros quorum quilibet proximè sequenti se, det sui partem quæ imperabitur, ita vt dantes & accipientes fiant æquales. Imperatum sit primum secundo dare sui trientem; secundum tertio dare sui quadrantem; tertium quarto, sui quintatem; Quartum primo, sui sextantem, vt post hanc mutuam contributionem fiant æquales. Ponatur primus aliquot numerorum trientem habentium, quoniam trientem daturus est sitque 3 N. secundus autem ponatur aliquot vnitatum quadrantem habentium, quandoquidem quadrantem daturus est, sitque 4. secundus igitur dans sui quadrantem, nempe 1. & accipiens primi trientem, puta 1 N. fit 1 N. + 3. Oportet ergo & primum cùm dederit sui trientem 1 N. & acceperit sextantem quarti fieri 1 N. + 3. sed cùm dedit 1 N. relinquitur 2 N. oportet igitur hoc adscito, sextantem quarti fieri 1 N + 3. Quamobrem 3 — 1 N. est sextans quarti, atque ipse quartus est 18 — 6 N. Restat vt & quartus dato sui sextante, & accepto quintante tertij, fiat 1 N. + 3. sed dato sui sextante, nempe 3 — 1 N. remanet 15 — 5 N. Oportet igitur hunc adsumentem quintantem tertij fieri 1 N. + 3 sed si adsumat 6 N. — 12. fit 1 N. + 3. Igitur 6 N — 12. est quintans tertij. Ipse ergo tertius est 30 N — 60. Oportet ergo & tertium dato sui quintante, accepto vero quadrante secundi

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς ἑαυτοῦ διδῷ μέρος τὸ ἐπιταχθὲν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γίνωνται ἴσοι. ἐπιτετάχθω τὸν μὲν πρῶτον τῷ δευτέρῳ διδόναι τρίτον. τὸν δὲ δεύτερον τῷ τρίτῳ τὸ τέταρτον. τὸν δὲ τρίτον τῷ τετάρτῳ τὸ πέμπτον. καὶ ἔτι τὸν τέταρτον τῷ πρώτῳ τὸ ἕκτον, καὶ γίνεσθαι ἴσους μετὰ τὴν ἀντίδοσιν. τετάχθω ὁ μὲν πρῶτος ἀριθμῶν τινῶν τρίτον μέρος ἐχόντων ἐπεὶ τρίτον δίδωσιν. ἔστω ἀριθμῶν τριῶν. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων τινῶν τέταρτον μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ τέταρτον δίδωσιν, ἔστω μ° $\bar{\delta}$. ὁ ἄρα δεύτερος δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ τέταρτον μονάδα μίαν, λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ πρώτου τὸ τρίτον ἀριθμὸν ἕνα γίνεται ς ἑνὸς μ° $\bar{\gamma}$. δεήσει ἄρα καὶ τὸν πρῶτον δόντα μὲν ἑαυτοῦ τὸ τρίτον ἀριθμὸν ἕνα, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ τετάρτου τὸ ἕκτον γίνεσθαι ἀριθμοῦ ἑνὸς μ° $\bar{\gamma}$. ἀλλὰ δοὺς μὲν ςὸν ἕνα λοιποὺς ἔχει ἀριθμοὺς δύο. δεήσει ἄρα τὸ τοῦ τετάρτου ἕκτον λαβόντα αὐτὸν γίνεσθαι ς ἑνὸς μ° $\bar{\gamma}$. μονάδες ἄρα τρεῖς λείψει ς ἑνὸς ἕκτον μέρος εἰσὶ τοῦ τετάρτου. αὐτὸς ἄρα ὁ τέταρτος ἔσται μ° $\bar{\iota\eta}$ λείψει ςς $\bar{\varsigma}$ λοιπόν ἐστι καὶ τὸν τέταρτον δόντα μὲν ἑαυτοῦ τὸ ἕκτον, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ τρίτου τὸ πέμπτον γίνεσθαι ς ἑνὸς μ° $\bar{\gamma}$. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ ἕκτον μονάδας τρεῖς λείψει ς ἑνὸς, λοιπός ἐστι μ° $\bar{\iota\epsilon}$ λείψει ςς $\bar{\epsilon}$. δεήσει ἄρα αὐτὸν καὶ λαβόντα τὸ τοῦ τρίτου πέμπτον γίνεσθαι ς ἑνὸς μ° $\bar{\gamma}$. ἀλλὰ ἂν λάβῃ ἀριθμοὺς $\bar{\varsigma}$ λείψει μ° $\bar{\iota\beta}$ γίνεται ς ἑνὸς μ° $\bar{\gamma}$. οἵτε ἀριθμοὶ $\bar{\varsigma}$ λείψει μ° $\bar{\iota\beta}$. πέμπτον μέρος εἰσὶ τοῦ τρίτου. αὐτὸς ἄρα ἔσται ςς $\bar{\lambda}$ λείψει μ° $\bar{\xi}$. δεήσει ἄρα καὶ τὸν τρίτον δόντα μὲν τὸ ἑαυτοῦ πέμπτον, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον γίνεσθαι ς ἑνὸς μ° $\bar{\gamma}$. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ πέμπτον ἀριθμοὺς $\bar{\varsigma}$ λείψει μ° $\bar{\iota\beta}$. λοιποὺς ἔχει ἀριθμοὺς $\bar{\kappa\delta}$ λείψει μ° $\bar{\mu\eta}$. λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον

γίνεται ϛϛ̅ κδ̅ λείψει μο̊ μζ. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσι τρισί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ν̅ εἰκοστοτρίτων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρν̅, εἰκοστοτρίτων. ὁ δὲ δεύτερος ϙβ̅, εἰκοστοτρίτων. ὁ δὲ τρίτος ρκ̅, εἰκοστοτρίτων, ὁ δὲ τέταρτος ριδ̅ εἰκοστοτρίτων, περιῃρήσθω τὸ μόριον. ἔσται δηλαδὴ ὁ μὲν πρῶτος μο̊ ρν̅ ὁ δὲ δεύτερος ϙβ̅. ὁ δὲ τρίτος ρκ̅. ὁ δὲ τέταρτος ριδ̅. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

fieri 1 N. + 3. ſed dato ſui quintante, puta 6 N. — 12. remanet 24 N — 48. Accepto autem ſecundi quadrante fit 24 N. — 47. Hoc ergo æquale eſt 1 N. + 3. & fit 1 N. $\frac{50}{23}$ Ad poſitiones erit primus $\frac{150}{23}$ ſecundus $\frac{92}{23}$. tertius $\frac{120}{23}$. quartus $\frac{114}{23}$ Abiiciatur denominator partium. Erit itaque primus 150. ſecundus 92. tertius 120. quartus 114. & ſatisfaciunt quæſtioni.

IN QVAESTIONEM XXVI.

EADEM ratio eſt huius quæſtionis, quæ & præcedentis. Quæſtio infinitas recipit ſolutiones, & ſi determinanda ſit ad vnicam, præſcribendus eſt numerus in quo fieri debet æqualitas, tuncque operabimur vt in præcedente traditum eſt. Quod autem denominatores abiici iubet Diophantus, vt ſolutio in integris habeatur, id fit quia ſi inuenti ſemel numeri quæſtioni ſatisfacientes, per eundem multiplicentur vel diuidantur, producta itidem & quotientes quæſtionem ſoluent, cuius rei ratio eſt quam attingit Xilander, quia ſcilicet quæſiti numeri, partes proportionales viciſſim dant & accipiunt, quæ autem partium cognominum eadem totorum inter ſe, ac viciſſim eſt ratio. Vnde etiam colligi poteſt alius modus ſoluendi huiuſmodi quæſtiones, cùm numerus præſcribitur in quo fiat æqualitas. Nam ſi quæſtio prius ſoluatur per operationem Diophanti, & numerus in quo fit æqualitas diuidatur per eum qui præſcribitur, & per quotientem diuidantur item inuenti numeri per operationem Diophanti, habebuntur quæſiti numeri. Verbi gratia, ſi quærantur quatuor numeri dantes & accipientes eaſdem partes quas requirit Diophantus, ita vt facta contributione quilibet reperiatur 59. $\frac{1}{2}$ ſolues prius quæſtionem cum Diophanto, & inuenies numeros 150. 92. 120. 114. Et numerus in quo fit æqualitas erit 119. Hunc ergo ſi diuidas per numerum præſcriptum 59. $\frac{1}{2}$ erit quotiens 2. per quem ſi diuidas ſigillatim inuentos numeros, fient 75. 46. 60. 57. quæſiti numeri. Poſſet etiam tam hæc quàm præcedens paulò aliter proponi, requirendo ſcilicet vt facta mutua contributione fiant numeri, diuerſi non æquales. Verbi gratia, ſint inueniendi quatuor numeri vt primus dando ſui trientem & accipiendo ſextantem quarti fiat 6. Secundus dando ſui quadrantem, & accipiendo trientem primi fiat 7. Tertius dando ſui quintantem, & accipiendo quadrantem ſecundi fiat 14. Quartus dando ſui ſextantem, & recipiendo quintantem tertij, fiat 23. Et tunc imitabimur artificium operationis quæ ad præcedentem tradita eſt, hoc modo. Ponatur primus 3 N. cum ergo multatus ſuo triente & auctus ſextante quarti faciat 6. erit 6 — 2 N. ſextans quarti, & ipſe quartus 36 — 12 N. vnde ablato ſextante, manent 30. — 10 N. quæ cùm quintante tertij debent facere 23. Igitur quintans tertij eſt 10 N. — 7. Ideoque ipſe tertius eſt 50 N. — 35. qui multatus quintante manet 40 N — 28. debetque tunc cum quadrante ſecundi facere 14. Quare 42 — 40 N. eſt quadrans ſecundi, & ipſe ſecundus 168 — 160 N. vnde ablato quadrante manent 126 — 120 N. quæ cum triente primi debent facere 7. ſed faciunt 126 — 119 N. hoc ergo æquatur 7. & fit 1 N. 1. Ad poſitiones primus eſt 3. ſecundus 8. tertius 15. quartus 24.

QVÆSTIO XXVII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος παρὰ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λάβῃ μέρος τὸ ἐπιταχθὲν, καὶ γίνωνται ἴσοι. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον παρὰ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ τρίτον. τὸν δὲ δεύτερον παρὰ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ τέταρτον. τὸν δὲ τρίτον παρὰ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ πέμπτον, καὶ γίνεσθαι ἴσους. τετάχθω ὁ πρῶτος ϛο̅ ἑνὸς, οἱ δὲ λοιποὶ δύο μονάδων τινῶν τῆς προχείρου ἕνεκεν τρίτον μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ τρίτον διδόασιν. ἔστωσαν μο̊ γ̅. οἱ ἄρα τρεῖς ἔσονται ϛο̅ ἑνὸς μο̊ γ̅. καὶ δὴ ὁ πρῶτος λαβὼν παρὰ τῶν λοιπῶν δύο τὸ τρί-

INVENIRE tres numeros vt quilibet à reliquis duobus coniunctis partem imperatam accipiat, & fiant æquales. Statutum ſit primum à reliquis duobus coniunctis ſumere trientem. Secundum à reliquis duobus coniunctis accipere quadrantem. Tertium à reliquis duobus conjunctis ſumere quintantem, & omnes fieri æquales. Ponatur primus 1 N. reliqui verò duo compendij gratia, quia trientem dare debent, ſtatuantur vnitatum quotlibet, trientem habentium, ſintque 3. Tres ergo numeri ſimul erunt 1 N. + 3.

& ſanè primus ſumens à reliquis duobus trientem, fit 1 N. + 1. Oportet ergo & ſecundum à duobus reliquis coniunctis ſumpto quadrante fieri 1 N. + 1. Sumantur omnia quater. Quater igitur ſecundus adſcitis duobus reliquis, eſt ter ſecundus adſciſcens ipſos tres numeros. Ter ergo ſecundus adiunctis tribus numeris fit 4 N. + 4. Si igitur inde abſtulero tres numeros relinquuntur 3 N. + 1. quod eſt ter ſecundus, ipſe ergo ſecundus eſt 1 N. + $\frac{1}{3}$ Oportet itaque & tertium ſumpto reliquorum duorum quintante fieri 1 N. + 1. Omnia ſimiliter ſumantur quinquies, & eadem ratione inuenietur tertius 1 N. + $\frac{1}{2}$. Supereſt vt tres ſimul iuncti ſint æquales 1 N. + 3. & fit N. $\frac{13}{12}$ & omiſſa denominatione partis, fit primus 13. ſecundus 17. tertius 19. & implent poſtulata.

τον, γίνεται ςͧ ἑνὸς μονάδος μιᾶς. δεήσει ἄρα καὶ τὸν δεύτερον παρὰ τῶν δύο ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ τέταρτον γίνεσθαι ςͧ ἑνὸς μονάδος μιᾶς, πάντα τετράκις. τετράκις ἄρα ὁ δεύτερος προσλαβὼν τοὺς δύο, τρίς ἐστι ὁ δεύτερος προσλαβὼν τοὺς τρεῖς. τρεῖς ἄρα ὁ δεύτερος προσλαβὼν τοὺς τρεῖς γίνεται ἀριθμοὶ δ̅ μονάδες δ̅. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τούτων ἀφέλω τοὺς τρεῖς. λοιποὶ ἀριθμοὶ τρεῖς μονὰς μιὰ τρίς ἐστι ὁ δεύτερος. αὐτὸς ἄρα ὁ δεύτερος, ἔσαι ςͧ ἑνὸς, μονάδος τρίτου. δεήσει ἄρα καὶ τὸν τρίτον παρὰ τῶν δύο ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ πέμπτον γίνεσθαι ςͧ ἑνὸς μονάδος μιᾶς. πάντα ὁμοίως πεντάκις, καὶ συνάγεται διὰ τῶν ὁμοίων ὁ τρίτος ςͧ ἑνὸς μονάδος ἡμίσεως. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς συντεθέντας ἴσους γίνεσθαι ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσι τρισί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιγ δωδεκάτων. καὶ ἀφαιρουμένου τοῦ μορίου. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος μ° ιγ. ὁ δὲ δεύτερος μ° ιζ. ὁ δὲ τρίτος μ° ιθ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXVII.

SVMANTVR *omnia quater*, &c. Hæc ſi obſcuriora videantur, ſic poterunt elucidari. Quia oportet ſecundum ſumpto quadrante reliquorum fieri 1 N + 1. ſumendo huius quadruplum patet 4 N + 4. continere quater ſecundum, & ſemel reliquos. Quare ſi inde auferatur ſemel ſumma trium numerorum, nempe 1 N + 3. patet reſiduum 3 N + 1. continere ter ſecundum. Quare fiet ipſe ſecundus 1 N. + $\frac{1}{3}$ Similiter quia 1 N. + 1. continet ſemel tertium, & quintantem reliquorum, ſi ſumatur huius quintuplum, patet 5 N. + 5. continere quinquies tertium, & ſemel reliquos. Quare ſi auferatur inde ſumma omnium, nimirum 1 N. + 3. reſiduum 4 N. + 2. erit tertij quadruplum, erit ergo tertius 1 N. + $\frac{1}{2}$ cætera patent.

Hæc etiam quæſtio infinitas ſolutiones recipit, & inuentis ſemel numeris quæſtionem ſoluentibus, quotquot ſumentur in iiſdem rationibus, ij ſatisfacient propoſito, vt ſatis indicat Diophantus cùm denominatorem abiicit. Quod ſi præſcribatur numerus in quo fiat æqualitas, iam determinabitur quæſtio ad vnicam ſolutionem. Verbi gratia. Sit propoſitum inuenire tres numeros vt primus cum $\frac{2}{3}$ reliquorum faciat 40. Itemque ſecundus cum $\frac{3}{4}$ reliquorum, & rurſus tertius cum $\frac{4}{5}$ reliquorum faciat etiam 40. Ponatur primus 1 N. ergo $\frac{2}{3}$ reliquorum erunt 40 — 1 N. Quare ipſa ſumma ſecundi & tertij fiet 60. — 1 $\frac{1}{2}$ N. & ſumma omnium 60 — $\frac{1}{2}$ N. Itaque cùm 40. contineat ſecundum & $\frac{3}{4}$ reliquorum, huius quadruplum 160. continebit quater ſecundum, & ter reliquos, auferatur ergo hinc triplum ſummæ omnium, puta 180 — 1 $\frac{1}{2}$ N. remanebit ſecundus 1 $\frac{1}{2}$ N. — 20. Similiter quia 40. continet tertium, & $\frac{4}{5}$ reliquorum, huius quintuplum, nempe 200. continet quinquies tertium, & quater reliquos, auferatur hinc quadruplum ſummæ omnium, nimirum 240 — 2 N. remanet tertius 2 N. — 40. Supereſt vt huic addendo $\frac{4}{5}$ tam primi, quàm ſecundi nempe $\frac{4}{5}$ N. & $\frac{6}{5}$ N. — 16. fiat 40. fiunt autem 4 N. — 56. æqualia 40. & fit 1 N. 24. Ad hypoſtaſes. Eſt primus 24. ſecundus 16. tertius 8.

Eodem artificio ſoluetur quæſtio, ſi ſinguli numeri cum certa parte aliorum diuerſos conficiant numeros, vt ſi primus cum $\frac{1}{2}$ aliorum faciat 32. ſecundus cum $\frac{1}{3}$ aliorũ faciat 28 tertius cum $\frac{1}{4}$ aliorũ faciat 31. Ponatur enim primus 1 N. ergo ſemiſſis aliorum eſt 32 — 1 N, ſummaque ipſorũ 64 — 2 N. & ſumma omniũ 64 — 1 N. Cùm ergo 28. contineat ſecundum & $\frac{1}{3}$ reliquorum, huius triplum 84. continet ter ſecundum & ſemel reliquos, quare ſi hinc auferatur ſumma omnium 64 — 1 N. reſiduum 20 + 1 N. erit duplum ſecundi, ac proinde ipſe ſecundus eſt 10 + $\frac{1}{2}$ N. Similiter quia 31. continet tertium & $\frac{1}{4}$ reliquorum, huius quadruplum 124. continet quater tertium & ſemel reliquos. Quare ſi inde auferatur ſumma omnium 64 — 1 N. reſiduum 60 + 1 N. eſt triplum tertij: ergo ipſe tertius eſt 20 — $\frac{1}{3}$ N. ſupereſt, vt huic addendo $\frac{1}{4}$ tam primi quàm ſecundi nempe $\frac{1}{4}$ N. & 2 $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{8}$ N. fiat 31. fit autem 22 $\frac{1}{2}$ + $\frac{17}{24}$ hoc ergo æquatur 31. & fit 1. N. 12. Ad poſitiones. Primus eſt 12. ſecundus 16. tertius 24.

QVÆSTIO XXVIII.

Εὑρεῖν τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος παρὰ τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνῃ μέρος τὸ ἐπιταχθὲν, καὶ γένωνται ἴσοι. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον παρὰ τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ τρίτον. τὸν δὲ δεύτερον παρὰ τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς τὸ τέταρτον, τὸν τρίτον ὁμοίως τὸ πέμπτον. τὸν δὲ τέταρτον τὸ ἕκτον. καὶ γίνεσθαι ἴσους. τετάχθω ὁ πρῶτος ς^{ου} ἑνός. οἱ δὲ λοιποὶ τρεῖς μονάδων τινῶν τρίτον μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ τρίτον διδόασιν. ἔστωσαν μ° γ. ὁ ἄρα πρῶτος παρὰ τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνων τὸ τρίτον γίνεται ς^{ου} ἑνὸς μονάδος μιᾶς. δεήσει ἄρα καὶ τὸν δεύτερον παρὰ τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ τέταρτον γίνεσθαι ς^{ου} ἑνὸς μονάδος μιᾶς. πάντα πάλιν ὁμοίως τετράκις. καὶ συνάγεται διὰ τῶν αὐτῶν ὁ μὲν δεύτερος ς^{ου} ἑνὸς μονάδος τρίτου. ὁ δὲ τρίτος ς^{ου} ἑνὸς μονάδος ἡμίσεως. ὁ δὲ τέταρτος ς^{ου} ἑνὸς μονάδος τριῶν πέμπτων. λοιπόν ἐστι τοὺς τέσσαρας συντεθέντας ἴσους γίνεσθαι ς^{οις} ἑνὶ μονάσι τρισί. συνάγεται ὁ ἀριθμὸς μ° μζ ἐν μορίῳ ἐννενηκοστῷ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ°. μζ. ὁ δὲ δεύτερος μ° οζ. ὁ δὲ τρίτος μ° ϙβ. ὁ δὲ τέταρτος μ° ρα. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

Invenire quatuor numeros, vt quilibet à tribus reliquis coniunctis accipiat partem imperatam, & fiant æquales. Imperatum ſit primum à reliquis tribus coniunctis ſumere trientem. Secundum à reliquis tribus coniunctis ſumere quadrantem. Tertium ſimiliter ſumere quintantem. Quartum verò, capere ſextantem, & omnes fieri æquales. Ponatur primus 1 N. reliqui verò tres, quandoquidem trientem dare debent, ſtatuantur vnitatum quotlibet trientem habentium, putà 3. Primus igitur à tribus reliquis coniunctis ſumpto triente fit 1 N. + 1. Oportet ergo & ſecundum ſumpto à reliquis tribus quadrante fieri 1 N. + 1. Rurſus omnia vt in præcedenti quater ſumantur, & iiſdem de cauſis inuenietur ſecundus 1 N. + $\frac{1}{3}$ Tertius verò 1 N. + $\frac{1}{2}$ At quartus 1 N. + $\frac{3}{5}$ Reſtat vt quatuor numeri ſimul iuncti æquentur 1 N. + 3. & fit tandem 1 N. $\frac{47}{90}$ Erit ergo primus 47. ſecundus 77. tertius 92. quartus 101. & hi ſatisfaciunt propoſito.

IN QVAESTIONEM XXVIII.

Eadem omnia quæ ad præcedentem dicta ſunt, hîc etiam locum habent. Vnde apparet ſimili prorſus artificio extendi poſſe quæſtionem ad quinque, ad ſex vel ad plures numeros, ſiue ea determinetur ad vnicam ſolutionem, ſiue non; & ſiue ſinguli numeri cum certa parte reliquorum æquales faciant numeros, ſiue diuerſos. Itaque de his ſatis.

QVÆSTIO XXIX.

Δυσὶ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσευρεῖν τινα ἀριθμὸν, ὃς ἑκάτερον πολλαπλασιάσας ποιῇ ὃν μὲν τετράγωνον, ὃν δὲ πλευρὰν τοῦ τετραγώνου. ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ, ὅ τε σ, καὶ ὁ ε. καὶ ἔστω ὁ ζητούμενος ς^{ου} εἷς, κἂν μὲν ἐπὶ τὰς σ μονάδας πολλαπλασιασθῇ ποιεῖ ς^{ους} σ. ἐὰν δὲ ἐπὶ τὰς ε μονάδας, ποιεῖ ςς^{ους} ε. δεῖ δὲ τούτων τὸν μὲν εἶναι τετράγωνον, τὸν δὲ πλευρὰν αὐτοῦ. ἐὰν τοίνυν τοὺς ε. ἀριθμοὺς τετραγωνίσω, γίνονται δυνάμεις κε ἴσαι ςς^{οις} σ. πάντα παρὰ ἀριθμόν. ἀριθμοὶ ἄρα κε ἴσοι μονάσι σ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° η. καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

Dvobvs datis numeris, inuenire aliquem numerum qui in vtrumque ductus, hunc quidem quadratum efficiat, illum verò latus eiuſdem quadrati. Sint dati duo numeri 200. & 5. & ponatur is qui quæritur 1 N. qui ſi ducatur in 200. facit 200 N. At ſi ducatur in 5. facit 5 N. Oportet autem horum alterum quadratum eſſe, alterum latus eius; ſi ergo quadrauero 5 N. fient 25 Q. æquales vtique 200 N. omnia per numerum diuidantur. Igitur 25 N. æquantur 200. & fit 1 N. 8. Ac is quæſtioni ſatisfacit.

IN QVAESTIONEM XXIX.

DVPLEX casus hic considerari potest, prout tertius quæsitus ductus in vtrumque datorum, productum ex maiore facit quadratum, & ex minore latus quadrati. Vel contrà productum ex minore facit quadratum, & ex maiore latus. In priorem casum incidit æquatio Diophanti. In posteriorem ista. Ponatur 5 N. quadratus, & eius latus 200 N. ergo 5 N. æquantur 40000. Q. & fit 1 N. $\frac{1}{8000}$. qui quæstioni satisfacit. Pro vtroque autem casu fiet vnus Canon vniuersalior eo quem affert Xilander.

Alterum datorum numerorum diuide per quadratum alterius, orietur quæsitus numerus.

Porro quod ait Xilander, si quidem in numeris non surdis & integris quæstio consistat, duos propositos numeros semper esse quadratorum similes, falsissimum est si per propositos numeros, datos ab initio intelligat, vt ex ipso Diophanti exemplo manifestum fit, nam 200. & 5. non sunt plani similes. Si autem intelligat tertium quæsitum, & alterum datorum, id verum est. Semper enim tertius quæsitus & is in quem ille ductus quadratum facit, sunt quadratorum similes. Sed si hoc voluit Xilander obscurè locutus est, & malè ad integros numeros id restrinxit. Quicumque enim sumantur Numeri, idem euenire necesse est, [2] cùm ponatur ex eorum mutuo ductu produci quadratum. 2 octaui.

Quod autem ait Diophantus, πάντα παρὰ ἀριθμὸν, depressionem specierum intelligit, quam alibi vocat ὑποβιβασμὸν, de qua definitione vndecima actum est. Cùm enim 5 N. sint æquales 25 Q. si vtraque æquationis pars per 1 N. diuidatur, fiunt 5. æquales 25 N. quia scilicet Æquales numeri per eundem numerum diuisi, æquales dant quotientes.

QVÆSTIO XXX.

INVENIRE duos numeros, vt summa ipsorum, & productus ex eorum multiplicatione datos efficiant numeros. Oportet autem inueniendorum numerorum summæ semissis quadratum, quadrato superare productum multiplicationis. Est autem hoc Plasmaticum. Constitutum sit summum efficere 20. at productum multiplicationis 96. Ponatur interuallum ipsorum 2 N. Et quoniam summa ipsorum est 20. si hanc bifariam secuero, erit pars quælibet diuisionis, seu semissis summæ 10. Et si semissem interualli, puta 1 N. vni parti adiecero, & detraxero ab altera, manebit rursus vtriusque summa 20. & interuallum 2 N. Ponatur ergo maior 1 N. + 10. erit minor 10 − 1 N. & manet summa 20. interuallum 2 N. Restat vt productus multiplicationis sit 96. sed productus ille est 100 − 1 Q. Hoc ergo æquatur 96. & fit 1 N. 2. Est igitur maior 12. minor 8. & satisfaciunt proposito.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ σύνθεσις αὐτῶν, καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τῶν εὑρισκομένων τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ συναμφοτέρου τετράγωνον, τοῦ ὑπ' αὐτῶν ὑπερέχειν τετραγώνῳ. ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικόν. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας κ̄. τὸν δὲ πολλαπλασιασμὸν ποιεῖν μονάδας ϙϛ̄. τετάχθω ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν, ϛϛ^οι β̄. καὶ ἐπεὶ τὸ σύνθεμα αὐτῶν ἐστι μο κ̄. ἐὰν τοῦτο τέμω δίχα. ἔσται ἑκάτερος τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως. ἥμισυ τοῦ συνθέματος μο ῑ. κἂν τὸ ἥμισυ τῆς ὑπεροχῆς τουτέστι ϛ ἕνα, ἑνὶ μὲν τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως προσθῶ. τῷ δὲ λοιπῷ ἀφέλω, μένει πάλιν τὸ σύνθεμα μο κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ἀριθμοὶ δύο. τετάχθω οὖν ὁ μείζων ϛ ἑνὸς καὶ μο ῑ. τῶν ἡμίσεων τοῦ συνθέματος. ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσται μο ῑ. λείψει ϛ ἑνός. καὶ μένει τὸ μὲν σύνθεμα μο κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ϛϛ^οι β̄. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπ' αὐτῶν ποιεῖν μονάδας ϙϛ̄. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστι μονάδες ρ̄ λείψει δυνάμεως μιᾶς. ταῦτα ἴσα μονάσι ϙϛ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ μο β̄. ἔσται ἄρα ὁ μὲν μείζων μο ιβ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων μο η̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXX.

DVo indicat conditio apposita. Primum an absolutè possibilis sit quæstio necne, secundum an per numeros rationales solui possit, vel per surdos tantum. Primo enim cùm constet per secundam secundi porismatum. Quadratum semissis summæ duorum numerorum æquari producto multiplicationis eorundem, & quadrato semissis interualli ipsorum, fieri non potest vt productum multiplicationis sit maius quadrato semissis summæ, sed oportet æquale esse, vel minus. Æquale

quidem ſi æquales ſint numeri, nam ſemiſſis ſummæ æqualium numerorum, idem eſt atque alter ipſorum, ac proinde productum multiplicationis æquatur quadrato eiuſdem ſemiſſis. Minus verò, ſi ſint inæquales numeri, quia tunc, vt dictum eſt, productum multiplicationis vnà cum quadrato ſemiſſis interualli æquatur quadrato ſemiſſis ſummæ. Quare oportet, vt à quadrato ſemiſſis ſummæ auferendo productum, ſuperſit quadratus ſemiſſis interualli. Vnde conſtat Diophantum per conditionem appoſitam ſupponere quæſitos numeros eſſe inæquales. Deinde patet vt ſolutio contingat rationalis, oportere vt detracto producto à quadrato ſemiſſis ſummæ, reſiduum ſit quadratus numerus. Nam cùm hoc reſiduum ſit quadratus ſemiſſis interualli, ſi reſiduum illud non ſit quadratus numerus, erit interuallum irrationale, ac proinde & ipſi numeri. Verbi gratia, ſi diuidendus ſit 20. in duos numeros, quorum productum ſit 98. operando cum Diophanto inueniemus tandem 1 Q. æqualem 2. Quare ſemiſſis interualli erit ℞ 2. atque ipſi numeri 10 — ℞ 2. & 10 + ℞ 2. Porro tam ex conditione appoſita, quàm ex ipſa operatione elicitur iſte Canon.

A quadrato ſemiſsis ſummæ, aufer productum multiplicationis, reſidui radix quadrata, addita & adempta eidem ſemiſſi ſummæ, quæſitos exhibebit numeros.

Aliter etiam proponi poterat conditio, nimirum.

Oportet numerorum ſummæ quadratum, quadrato numero ſuperare quadruplum producti.

Nam vt oſtenſum eſt quinta ſecundi poriſmatum. Quadratus, ſummæ duorum numerorum, æqualis eſt quadruplo plani ſub ipſis numeris, vnà cum quadrato interualli ipſorum. Vnde etiam alius Canon formabitur, nimirum.

Aufer quadruplum producti à quadrato ſummæ, reſidui radicem quadratam adde & adime ipſi ſummæ, ſemiſſis aggregati & reſidui quæſitos exhibebit numeros.

Sed & notatu dignum eſt ad hanc quæſtionem, illam etiam poſſe reduci.

Dato medio trium proportionalium, & aggregato extremorum, extremos inuenire.

20. ſeptimi Vt dato medio 8. & ſumma extremorum 20. ſint inueniendi ipſi extremi. [1] Quia in tribus proportionalibus, planus ſub extremis æquatur quadrato medij, cùm medij quadratus ſit 64. patet eo reduci propoſitam queſtionem, vt diuidatur 20. in duos numeros, quorum mutuò ductu fiat 64. Quod idem eſt cum Diophantæo problemate, & per illud, vel per eius Canones inuenientur extremi quæſiti 4. & 16. Quod autem attinet ad verba illa, ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικόν, quæ nos retento Græco vocabulo vertimus, *Eſt autem hoc plaſmaticum*, Xilander verò Diophanti mentem minimè aſſecutus, malè interpretatur, *Hoc autem eſt effectum aliunde.* Nos ea explicabimus infra quæſtione trigeſima tertia.

QVÆSTIO XXXI.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν, καὶ ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τοὺς δὶς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνους τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου αὐτῶν τετραγώνου ὑπερέχειν τετραγώνῳ. * ἔστι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν. * ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας κ̄. τὴν δὲ σύνθεσιν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας σ̄η̄. τετάχθω δὴ ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν ςς^{οι} β̄ καὶ ἔστω ὁ μείζων ς^{ου} ἑνὸς καὶ μ^{ο} ῑ. τῶν ἡμίσεων πάλιν τοῦ συνθέματος, ὁ δὲ ἐλάσσων μ^{ο} ῑ. λείψει ς^{ου} ἑνός. καὶ μένει πάλιν τὸ σύνθεμα αὐτῶν μονάδες κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ἀριθμοὶ δύο. λοιπόν ἐστι καὶ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας σ̄η̄. ἀλλὰ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δυνάμεις δύο μονάδας σ̄. ταῦτα ἴσα μονάσι σ̄η̄. καὶ γίνεται ὁ ς^{ος} μ^{ο} β̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν μείζων μ^{ο} ι̅β̅. ὁ δὲ ἐλάσσων μ^{ο} η̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE duos numeros, vt & ſumma ipſorum, & ſumma quadratorum ab ipſis ortorum datos conficiant numeros. Oportet autem duplum ſummæ quadratorum, quadrato ſuperare quadratum ſummæ numerorum. * Et hoc quoque Plaſmaticum eſt. * Imperatum ſit ſummam numerorum eſſe 20. & ſummam quadratorum ab ipſis ortorum eſſe 208. Ponatur itaque interuallum ipſorum 2 N. & eſto maior 1 N. + 10. vnitates, quot ſcilicet continet ſemiſſis ſummæ, minor autem ſit 10 — 1 N. & manet rurſus eorum ſumma 20. Interuallum verò 2 N. Supereſt vt ſumma quadratorum ab ipſis, ſit 208. Atqui ſumma quadratorum facit 2 Q. + 200. Hoc igitur æquale eſt vnitatibus 208. & fit 1 N. 2. Ad poſitiones. Erit maior 12. minor 8. & ſatisfaciunt poſtulatis.

IN QVAESTIONEM XXXI.

HIc etiam conditio indicat an possibilis sit quæstio, & an per numeros rationales solui possit, idémque prorsus dicit quod septima secundi porismatum, nimirum. Quadratus summæ duorum numerorum & quadratus interualli eorum æquantur duplo aggregati quadratorum. Quare vt quæstio sit possibilis necesse est duplum aggregati quadratorum, esse maius quadrato summæ, nisi propositi numeri sint æquales, tunc n. duplum quadratorum æquabitur quadrato summæ. [1] Quia quadratus summæ æquatur quadratis numerorum & duplo producti, at cùm numeri sunt æquales, duplum producti æquatur ipsis quadratis. Quare in hoc casu quadratum summæ æquatur duplo quadratorum. Vt verò solutio sit rationalis necesse est duplum quadratorum excedere quadratum summæ, quadrato numero, cùm enim hic excessus sit quadratus interualli numerorum, vt docuimus, si huiusmodi excessus non sit quadratus, erit interuallum numerorum irrationale, ac proinde & ipsi numeri. Cæterùm ex hac conditione sic explicata pendet Canon à Xilandro traditus, nimirum. *4. secundi.*

A duplo agregati quadratorum, aufer quadratum summæ numerorum, residui latus quadratum adde & adime ipsi summæ numerorum, semissis aggregati & residui quæsitos exhibebit numeros.

Poterat etiam aliter proponi conditio, & quidem magis appositè ad operationem Diophanti.

Oportet summam quadratorum superare duplum quadrati semissis summæ numerorum duplo quadrati numeri.

Quia enim per sextam secundi porismatum constat summam quadratorum duplam esse quadratorum qui fiunt à semisse summæ laterum, & à semisse interualli eorumdem, patet si à summa quadratorum, auferatur duplum quadrati à semisse summæ numerorum, residuum æquari duplo quadratis semissis interualli numerorum. Itaque ex hac etiam conditione sic explicata, & ex ipsamet Diophanti operatione elicietur alter Canon.

A summa quadratorum aufer duplum quadrati semissis summæ numerorum, residui semissis latus quadratum additum vel ademptum ipsi semissi numerorum, quæsitos dabit numeros.

Verba autem illa, ἔστι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν, hîc, vt arbitror, subreptitia sunt, vt ad trigesimam tertiam fusius docebo, nolui tamen ea de textu tollere, ne audax plus æquo vel temerarius alicui forte viderer, sed ea asteriscis includere satis habui.

QVÆSTIO XXXII.

INVENIRE duos numeros, vt summa ipsorum, & interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, datos faciant numeros. Constitutum sit summam numerorum esse 20. Interuallum verò quadratorum ab ipsis ortorum esse 80. Ponatur interuallum ipsorum 2 N. erit similiter maior 1 N. + 10. Minor autem 10 − 1 N. & manet rursus summa ipsorum 20. interuallum verò 2 N. superest vt interuallum quadratorum ab ipsis ortorum sit 80. sed interuallum quadratorum ab ipsis est 40 N. Hoc ergo æquatur 80. & fit rursus maior 12. Minor 8. & soluunt quæstionem.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δοθέντας ἀριθμούς. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας κ̄. τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας π̄. τετάχθω ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ςς β̄. ἔσται ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ςοῦ ἑνὸς μο ι̅. ὁ δὲ ἐλάσσων μο ι̅, λείψει ςοῦ ἑνός. καὶ μένει πάλιν τὸ μὲν σύνθεμα αὐτῶν μονάδες κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ςῶν β̄. λοιπόν ἐστι καὶ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μο π̄. ἀλλ' ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἐστὶν ςς μ̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν π̄. καὶ συνάγεται πάλιν ὁ μὲν μείζων μο ιβ̄. ὁ δὲ ἐλάττων μο η̄. καὶ πάλιν ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXXII.

HIc nulla opus est conditione vt solutio contingat rationalis, semper enim, dum quæstio sit possibilis eam per numeros rationales solui continget, verum vt sit possibilis sanè aliqua limitatione indiget, quicquid dicat Scholiastes, quam ego ita concipio.

Oportet excessum quadrati super quadratum minorem esse quadrato summæ numerorum.

Cuius necessitas euidens est, quia [1] Quadratus summæ æquatur ipsis quadratis numerorum, & duplo producti, quare nisi pars ponatur æqualis toti, vel etiam maior, impossibile est interuallum *4. secundi.*

quadratorum esse æquale vel maius quadrato summæ numerorum. Itaque in exemplo Diophanti posita summa numerorum 20. cùm eius quadratus sit 400. poterit interuallum quadratorum præscribi quilibet numerus minor quàm 400. æqualis, autem vel maior nequaquam. Cæterùm ex operatione Diophanti elicitur huiusmodi Canon.

Diuide interuallum quadratorum per duplum summæ numerorum, quotiens additus vel ademptus semissi summæ, dabit quæsitos numeros.

Hoc autem idem fere est quod demonstratum est prop. tertia secundi porismatum. nimirum.

Diuide interuallum quadratorum per summam numerorum, orietur interuallum numerorum.

Data porro summa numerorum & eorum interuallo soluitur quæstio per Canonem primæ huius. Potest etiam aliter institui operatio, & tamen ad æquationem simplicem deuenietur. Esto alter numerorum 1 N. alter 20 − 1 N. horum quadrati sunt 1 Q. & 1 Q. + 400. − 40 N. quorum interuallum est 400 − 40 N. hoc ergo æquatur 80. & fit 1 N. 8. Hinc etiam elicietur Canon alius, priore non deterior.

Quadrato summæ adde vel adime interuallum quadratorum, summam & residuum diuide seorsim per duplum summæ numerorum, orientur quæsiti numeri.

QVÆSTIO XXXIII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν, καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ποιεῖ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τὸν τετράκις ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ποιεῖν τετράγωνον· ἔστι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι μονάδας δ. τὸν δὲ πολλαπλασιασμὸν μονάδας ϙς. τετάχθω τὸ σύνθεμα αὐτῶν ςς β. ἔχομεν καὶ τὴν ὑπεροχὴν μο δ. ἔσται ὁμοίως ὁ μείζων ς ἑνὸς μο β. ὁ δὲ ἐλάσσων ς ἑνὸς λείψει μο β. καὶ μένει τὸ μὲν σύνθεμα αὐτῶν ἀριθμοὶ β. ἡ δὲ ὑπεροχὴ μονάδες δ. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας ϙς. ἀλλ' ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν ἐστι δυ α. ⋔ μο δ. ταῦτα ἴσα μονάσι ϙς. καὶ γίνεται πάλιν ὁ μὲν μείζων μο ιβ. ὁ δὲ ἐλάττων μο η. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros vt interuallum ipsorum, & productum multiplicatione faciant datos numeros. Oportet autem quadruplum producti multiplicationis cum quadrato interualli iunctum, facere quadratum. Et hoc quoque Plasmaticum est. Statutum sit interuallum esse 4. productum verò multiplicationis 96. Ponatur summa ipsorum 2 N. habemus autem & interuallum 4. erit itaque maior 1 N. + 2. Minor 1 N − 2. & manet summa ipsorum 2. N. interuallum 4. Restat vt productum multiplicatione fit 96. est autem huiusmodi productum 1 Q. − 4. Hoc ergo æquatur 96. & fit rursus maior 12. minor 8. & soluunt quæstionem.

IN QVAESTIONEM XXXIII.

HIC apposita conditio non est ad ostendendum an quæstio sit possibilis, sed tantùm an per numeros rationales solui possit. Etenim non potest absolutè proponi huiusmodi quæstio impossibilis, quodcumque enim præscribatur numerorum interuallum, & qualecumque statuatur productum multiplicationis eorum, soluetur quæstio. Sed vt solutio contingat rationalis, necesse est vt quadruplo producti addendo quadratum interualli, quadratus fiat, quia scilicet, ' quadruplum
5. 2. poris. producti cum quadrato interualli æquatur quadrato summæ numerorum. Hinc autem elicitur Canon à Xilandro traditus.

Quadrato interualli adde quadruplum producti, aggregati latus est summa numerorum, cui si addas & adimas interuallum, semissis summæ & residui quæsitos dat numeros.

Poterat etiam aliter proponi conditio, & quidem magis appositè ad operationem Diophanti.

Oportet quadratum semissis interualli additum producto, conficere quadratum.

2. 2. poris. ' Quia scilicet quadratus interualli cum producto, quadratum efficit semissis summæ. Vnde etiam & ex ipsamet operatione Diophanti alium elicimus Canonem.

Adde producto quadratum semissis interualli, aggregati latus est semissis summæ numerorum, cui addendo & adimendo semissem interualli, fient quæsiti numeri.

Est etiam notatu dignum non differre quæstionem istam ab illa. *Dato medio trium proportionalium & differentia extremorum, inuenire extremos.* Vt dato medio 8. & interuallo extremorum 12. quærantur extremi. Quia planus sub extremis æquatur quadrato medij, & is est 64. eò reducitur quæstio, vt

vt inueniantur duo numeri, quorum interuallum sit 12. productum multiplicationis 64. Quod idem est cum quæstione ista Diophanti. Quare per eam vel per Canones allatos inuenientur extremi quæsiti 4. & 16. Superest vt explicem verba illa, ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικὸν, quæ tum huic quæstioni tum trigesimæ & trigesimæ primæ adiecta sunt statim post conditionem, quæque hoc loco dilucidanda recepi. Prius tamen monendus est lector, nec Scholiastem, nec Xilandrum mentem Diophanti assequutum esse, quod cuilibet fiet manifestum qui ea quæ vterque ad trigesimam commentus est legere voluerit. Sanè non vacat in eorum nugis refellendis diutius immorari. Præterea Xilander verba ipsa male reddidit, nam Plasmaticum, interpretatus est, effictum aliunde; cum potius significet id à quo aliud quippiam effingi & plasmari potest. Ego itaque nil aliud voluisse Diophantum aio, quam indicare ex huiusmodi quæstionum solutione, seu ex conditionibus adiectis, vel ex canonibus inde deductis formari & plasmari quodammodo regulas illas quas vocant compositas, cùm scilicet ex tribus infimis speciebus, duæ vni æquales reperiuntur, seu vt loquitur Franciscus Vieta, regulas de quadrato affecto sub latere. Etenim prima & secunda illarum regularum, ab hac ipsa quæstione trigesima tertia facilè deducuntur. Tertia verò pendet omnino à trigesima. Quamobrem cùm à trigesima prima nulla formetur huiusmodi regula, non dubito eadem verba ibi temerè inculcata esse, ab ipso scilicet Scholiasta, vel imperito amanuensi ex aliis quæstionibus eò translata.

Quomodo autem ab his quæstionibus formentur supradictæ regulæ, non pigebit in tyronum gratiam adscribere, ipsas etiam tradendo regulas, tum eo modo quo communiter absoluuntur, tum eo quem tradit Petrus Nonius ad vitandas Fractiones sæpe commodo, ac denique methodum ipsam Diophanti exhibendo.

PRIMA REGVLA COMPOSITARVM.

Quadrati & Numeri æquales vnitatibus.

Fiat prius reductio ad vnum Quadratum per parabolismum, diuidendo scilicet singulas æquationis partes per numerum Quadratorum. Tunc capiatur semissis Numerorum, & eius quadrato addantur vnitates, ab aggregati latere auferatur semissis Numerorum, residuum est valor Numeri.

Verbi gratia 2 Q. + 8 N. sint æquales 42. fiet reductio ad 1 Q. diuidendo omnia per 2. fientque 1. Q. + 4 N. æqualia 21. Tunc sumpto semisse Numerorum 2. eius quadratum 4. addo vnitatibus 21. fit 25. cuius latus 5. vnde auferendo semissem Numerorum, remanet 3. valor Numeri.

EADEM EX PETRO NONIO.

Facto vt supra parabolismo si opus sit. Quadrato numeri Numerorum adde quadruplum vnitatum; ab aggregati latere aufer numerum Numerorum, residuum erit valor Numeri duplicati.

Verbi gratia 1 Q + 5 N. sint æquales 24. Quia nullo hîc opus est parabolismo, quadrato ipsius 5. nimirum ipsi 25. adde quadruplum ipsius 24. nimirum 96. fit 121. cuius latus 11. vnde auferendo 5. remanet 6. duplum numeri, ergo Numerus est 3. vtrumque autem modum ab hac quæstione trigesima tertia deduci sic ostendemus. Ponantur 1 Q. + 4 N. æquales 21. & sit CD 1 N. cui addatur BC ipsi æqualis. Et illis addatur adhuc AB æqualis numero Numerorum, puta 4. Tunc constat ex CD in BC. fieri 1 Q. & ex CD in AB fieri 4 N. Igitur ex CD in totum AC fit 21. Quamobrem cùm notum sit duorum AC. CD. interuallum esse AB, nempe 4. & productum ex eorum multiplicatione esse 21. patet nos eo deduci vt quæramus duos numeros quorum interuallum 4. productum multiplicatione sit 21. Quod ipsum quærit Diophantus quæstione hac trigesima tertia. Minor autem quæsitorum erit CD. seu 1 N. quod inueniendum proponebatur. Itaque si vtamur secundo Canone supra allato, capiemus semissem Numerorum, seu interualli, nempe ipsius 4. & eius quadratum addemus vnitatibus seu producto 21. vnde fient 25. cuius latus 5. vnde si auferantur 2 semissis ipsius 4. remanet 3 minor quæsitorum, seu CD. seu 1 N. vnde patet à secundo illo Canone deduci modum communem perficiendi hanc regulam.

A . . . . B . . . C . . . D

Quod si ad inueniendum duos numeros quorum interuallum sit 4. productum 21. vtaris primo Canone supra allato, incides sane in regulam Petri Nonij. Nam quadrato ipsius 4 qui est 16. addes quadruplum ipsius 21. nempe 84. vnde fiet 100. à cuius latere 10. auferes 4. & residuum 6. erit duplum Numeri, nempe ipsius 3.

SECVNDA REGVLA COMPOSITARVM.

Quadrati æquales Numeris & vnitatibus.

Facto si opus sit parabolismo, adde vnitatibus quadratum semissis Numerorum, lateri aggregati adde ipsum semissem Numerorum, fiet valor Numeri.

Verbi gratia 1 Q. sit æqualis 4 N. + 21. addo ad 21. quadratum semissis ipsius 4. nempe 4. fit 25. cuius lateri 5. addo supradictum semissem 2. fit 7. valor numeri.

EADEM EX PETRO NONIO.

Quadrato numeri Numerorum adde quadruplum vnitatum, lateri aggregati adde numerum Numerorum, fiet valor Numeri duplicati.

Verbi gratia 1 Q. si æqualis 5 N. + 24. Adde 25. ad quadruplum ipsius 24. nempe ad 96. fit 121. cuius lateri 11. adde 5. fit 16. duplum Numeri. Quare ipse Numerus est 8. Vtrumque modum deriuari quoque ab hac quæstione trigesima tertia sic probabimus. Sit 1 Q. æqualis 4. N. + 21. imprimis patet 1 N. maiorem esse quàm 4. numerum Numerorum, nam ex quolibet latere in seipsum, vel in numerum ipso maiorem, fit vel quadratus lateris, vel numerus eodem quadrato maior. Quare si 4. esset æqualis vel major quàm 1 N. essent 4 N. æquales vel maiores quàm 1 Q. ac proinde non posset 1 Q. æquari 4 N. + 21. Hoc posito. Sit A C. 1 N. erit ergo A C maior quàm 4. vt probatum est. Sumatur igitur in eo A B 4. & reliquo B C addatur æqualis ei C D.

A....B...C...D

Patet ergo quadratum ex A C esse 1 Q. & productum ex A C in A B esse 4 N. 2. secundi. [1] Quare cùm quadratus ex A C sit æqualis productis ex A C. in A B. & ex A C. in B C. seu in C D. sequitur productum ex A C. in C D. æquari 21. Igitur vt prius quærendi sunt duo numeri A C. C D. quorum interuallum A B seu 4. & productum multiplicationis est 21. nam horum maior A C. erit valor numeri. Itaque à duplici Canone, duplex vt supra eruitur regula, primæ prorsus similis, finali tantum substractione in additionem mutata, quia videlicet ibi quærebatur minor numerus C D. Hic vero quæritur maior A C.

TERTIA REGVLA COMPOSITARVM.

Numeri æquales Quadratis & vnitatibus.

Facto si opus sit Parabolismo. A quadrato semissis Numerorum aufer vnitates, residui latus adde vel adime semissi Numerorum, fiet valor Numeri.

Verbi gratia 10 N. sint æquales 1 Q. + 21. Quadratus semissis Numerorum est 25. vnde si auferas 21. vnitates superest 4. cuius latus 2. si addas & adimas semissi Numerorum 5. fit valor Numeri vel 3. vel 7.

EADEM EX PETRO NONIO.

A quadrato numeri Numerorum aufer quadruplum vnitatum, residui latus adde vel adime ipsi numero Numerorum, fiet valor Numeri duplicati.

Verbi gratia 7 N. sint æquales 1 Q. + 10. à quadrato ipsius 7. puta à 49. aufer quadruplum ipsius 10. nempe 40. superest 9. cuius latus 3. adde vel adime ipsi 7. fiet vel 4. vel 10. duplum Numeri. Quare Numerus est vel 2. vel 5. vtramque regulam deduci à trigesima quæstione Diophanti facilè probabitur. Sunto 10 N. æquales 1 Q. + 21. imprimis patet numerum Numerorum 10. maiorem esse quàm 1 N. nam si esset æqualis, vel minor, eo ducto in 1 N. fierent 10 N. æquales 1 Q. vel minores illo. Quare cùm 10 N. præter 1 Q continean 21. oportet 10. esse maiorem quàm 1 N. Hoc posito sit A B 10. in quo sumatur 1 N. A D. vel D B. & si ponatur 1 N. A D. constat ex A B in A D. fieri 10 N. & quadratum ex A D. esse 1 Q. Quare cùm productus ex A B. in A D. [3] sit æqualis quadrato ex A D. vnà cum producto ex A D. in D B. relinquitur productum ex A D in D B. esse 21. Igitur quærendi sunt duo numeri quorum summa sit 10. productum 21. Eodem modo si 1 N. ponatur D B. ostendemus ex A B. in D B. fieri 10. N. & ex A D. in D B. fieri 21. Quare vt prius quærendi erunt duo numeri, quorum summa sit 10. productum 21. Quod ipsum quærit Diophantus quæstione trigesima.

A......D...B

3 secundi.

Itaque si libeat vti primo Canone ibi allato. Summæ 10. semisse capto nempe 5. ab illius quadrato

25. auferemus productum 21. & residui 4. latus 2. addemus vel adimemus ipsi 5. & fient quæsiti numeri 7. & 3. quorum alter est A D. alter D B. & vterque valor Numeri esse potest. Qui est primus modus hanc regulam perficiendi. Quod si vtaris secundo Canone, incides in regulam Petri Nonij vt manifestum est. Sed & ex annotatis ad trigesimam patet si quadratus semissis Numerorum æqualis sit vnitatibus, ipsum eundem semissem esse valorem Numeri, signum enim est quæsitos A D. D B. æquales esse.

Cæterùm quia Diophantus vt iam monui ad definitionem vndecimam, peculiari vtens methodo, & nunquam adhibens parabolismum æquationes resoluit, quomodo id perficiat iam docendum est.

REGVLAE COMPOSITAE EX DIOPHANTO.

Ducito numerum Quadratorum in vnitates, producto adde quadratum semissis Numerorum in prima & secunda regula. vel ab eodem quadrato aufer idem productum in tertia regula. Summæ vel residui cape latus; & huic adde vel adime semissem Numerorum in prima vel secunda regula. Contra semissi numerorum adde vel adime idem latus in tertia regula. Summam vel residuum diuide per numerum quadratorum, fiet valor Numeri.

Verbi gratia 3 Q. + 20 N. sint æquales 52. ducito 3. in 52. fit 156. cui adde 100. quadratum semissis Numerorum, fit 256. cuius latus 16. vnde si auferas 10. remanet 6. quo diuiso per 3. fit 2. valor Numeri, eademque est aliarum regularum ratio. Differt Ergo Diophantæa methodus à communi in hoc solùm, quod in communi diuisio per numerum Quadratorum fit ab initio, in Diophantæa methodo, eadem diuisio fit in fine. Sed demonstrandum est vtramque methodum eodem recidere. Sit enim A numerus quadratorum, & B numerus Numerorum, & C vnitatum. Tunc per Diophantæam methodum ducto A in C. fiat D. sumptoque E semisse ipsius B. eius quadratus F addatur ad D. & fiat G. cuius latus esto H. vnde auferendo E supersit K. Deinde per communem methodum diuidandur per A. ipsi A. B. C. vnde fiant vnitas M. & numeri N. P. sumptoque Q. semisse ipsius N. eius quadratus R. addatur ad P. & fiat T. cuius latus esto V. vnde ablato Q. supersit X. Erit ergo vt demonstratum est in prima regula, X. valor numeri. Dico si K. per A. diuidatur produci eundem X. valorem Numeri. Sumatur enim L. quadratus ipsius A. Quoniam ergo M. est vnitas, erunt continuè proportionales L A M. in ratione cuius denominator est A, & rationis ipsius L. ad M. denominator erit L. Cùm autem idem A. ductus in P & in C. producat C & D [1] erit D ad C vt C ad P. & ipsi D C P. erunt proportionales ipsis L A M. eritque D ad P. vt L. ad M. Quare ex L in P. fiet D. Quia etiam A ductus in N. facit B, erit B ad N. vt A ad M. Quare & dimidium E. ad dimidium Q. erit vt A. ad M. Quamobrem & quadratus F. ad quadratum R erit vt L ad M. Igitur vt F ad R. ita est D ad P. Quare & [2] antecedentes simul, puta G. ad consequentes simul, puta ad T. erunt vt L ad M. Ergo rursus latus H. ad latus V. erit vt A. ad M. Itaque cùm ostensum sit esse quoque E. ad Q. vt A. ad M. erit vt totus H. ad totum V. ita ablatus E. ad ablatum Q. [3] Quare & reliquus K ad reliquum X erit quoque vt A ad M. Quamobrem diuiso K per A prodibit X. Quod demonstrandum erat.

Y 36. K 6. H 21.
F 225. G 441.
L 9. E 15. D 216.

A 3. B 30. C 72.
M 1. N 10. P. 24.

R 25. Q 5. T 49.
Z 12. X 2. V 7.

[1] 17. septimi.
[2] 12. septimi.
[3] 21. septimi.

Eadem prorsus ratione, idem euenire ostendetur in secunda regula. Nam omnia eodem modo perficiuntur, nisi quod in fine fit additio loco substractionis. Vt in communi methodo, addatur Q ad V. fiet Z valor Numeri. Itaque in Diophantæa methodo addatur E ad H. & fiat Y. dico si Y diuidatur per A. prodire eundem valorem Numeri Z. Cùm enim vt ostensum est sit H ad V, sicut E ad Q. erunt & antecedentes simul, puta Y ad consequentes simul, puta ad Z in eadem ratione, quæ eadem est cum ratione A ad M. Quamobrem diuiso Y. per A, orietur Z. Quod erat ostendendum.

Non dissimili ratione ostendetur vtramque methodum conuenire in tertia regula. Sit enim A quadratorum numerus & B vnitatum, & C numerorum. Tunc per Diophantæam methodum ducto A in B fiat D. & semissis ipsius C. esto E cuius quadratus F vnde auferendo D. supersit G. cuius latus H. quo detracto ex E supersit K, & eodem H addito ad eundem E fiat Y. Deinde per communem methodum diuidantur per A ipsi A B C. & fiant M N P. & ipsius P semissis esto Q. cuius quadratus R, vnde auferendo N. supersit T. cuius latus V. quo detracto ex Q supersit X, & eodem V ad Q addito fiat Z. Erit igitur valor Numeri tam X quàm Z. Dico itaque si ipsi K. Y. per A diuidantur prodire eosdem X Z. Nam sumpto L quadrato ipsius A, rursus vt prius ostendemus esse L ad M vt D ad N. sed & est C ad P vt A ad M. ergo rursus semissis E ad semissem Q. est vt A ad M. Quare & quadratus F ad quadratum R est vt L ad M. seu vt D ad N. Quamo-

Y 24. H 9. K 6.
G 81. F 225.
L 9. D 144. E 15.

A 3. B 48. C 30.
M 1. N 16. P 10.

R 25. T 9. Q 5. brem & reliquus G ad reliquum T est vt L ad M, ac proinde & latus H ad latus
12. septimi. Z 8. V 3. X 2. V est vt A ad M seu vt E ad Q. Itaque cùm sit E ad Q. vt H ad V. siue addantur H E, itemque Q V. siue detrahatur H ex E itemque V ex Q.[1] erit rursus composito-
11. septimi. rum Y & Z,[2] Itemque residuorum K & X eadem ratio quæ A ad M. Quare si ipsi Y & K diuidantur per A orientur ipsi Z & X. Quod demonstrandum erat.

Ex his tribus modis absoluendi regulas compositas, eum seliget peritus logista, quem compendiosiorem iudicabit. Sanè si parabolismus citrà fractiones fieri possit, communem præstat amplecti methodum, sin secus, Diophantæa compendiosior est. In vtraque porrò si numerus Numerorum sit impar, Nonij methodum adhibere iuuabit, nam ea commodè aptari potest, non minus Diophantææ quàm communi, Vt si 3 Q. + 7 N. æquentur 26. ducto 3 in 26. fit 78. & quia numerorum Numerus est impar sumo eius quadratum 49. cui addo quadruplum ipsius 78. puta 312. fitque 361. cuius latus 19. vnde si auferas 7. superest 12. quo diuiso per numerum quadratorum 3. fit 4 valor numeri duplicati, ac proinde ipse Numerus est 2. vel si placet diuide 12. per duplum numeri quadratorum, nimirum per 6. fiet statim valor Numeri 2. sed de his satis.

Quoniam vero quærendo duos numeros quorum summa, vel summa quadratorum, vel interuallum, vel interuallum quadratorum, aut productum multiplicationis data sint diuersimodè, multæ aliæ non inelegantes quæstiones fieri possunt, quas omisit Diophantus, libet hic earum nonnullas subiicere, in quibus nobis non erit magnoperè cauendum, ne in regulas compositas æquatio deuoluatur, cùm illæ iam nobis sint familiares, dum per conditiones adiectas innotescat, an in numeris rationalibus solutio contingat.

QVAESTIO PRIMA.

Quæruntur duo numeri, vt summa quadratorum ab iis ortorum, & productus eorum multiplicatione sint quales poscimur. Oportet autem, siue addatur, siue adimatur, summæ quadratorum, duplum producti, fieri vtrimque quadratum.

Esto summa quadratorum 34. productum multiplicationis 15. si placet per reductionem ad alias
4. secundi. quæstiones, ista variis modis solui potest.[3] Quia enim summa quadratorum adscito duplo producti,
6. 2. poris. æquatur quadrato summæ numerorum.[4] At summa quadratorum multata duplo producti, relinquit quadratum interualli numerorum; si ad 34. addas 30. fiet 64. quadratus summæ. Quare ipsa summa est 8. Item si à 34. auferas 30. remanet 4. quadratus interualli. Quare ipsum interuallum est 2. Iam ergo per quatuor quæstiones inueniri possunt quæsiti numeri. Primò per trigesimam quærendo duos numeros quorum summa 8. productum 15. Secundò per trigesimam primam quærendo duos numeros quorum summa 8. & summa quadratorum 34. Tertiò per trigesimam tertiam quærendo duos numeros, quorum interuallum 2. productum 15. Quartò denique per primam quærendo duos numeros, quorum summa 8. interuallum 2.

Sed si peculiari operatione rem absoluere placeat. Ponatur interuallum quadratorum 2. N. erunt ipsi quadrati 17 − 1 N. & 17 + 1 N. quorum mutuo ductu fit 289 − 1 Q. æquale quadrato producti 15. nempe 225. Quare tandem 64. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 8. Ad positiones sunt quæsiti quadrati 25. & 9. quorum latera 5. & 3. sunt quæsiti numeri. Hinc etiam Canonem formare licet.

A Quadrato semissis summæ quadratorum aufer quadratum producti, residui latus additum & ademptum semissi summæ quadratorum, ipsos exhibebit quadratos.

QVAESTIO SECVNDA.

Inueniantur duo numeri, quorum interuallum, & summa quadratorum ab ipsis ortorum, sint quales poscimur. Oportet autem duplum summæ quadratorum multatum quadrato interualli, relinquere quadratum.

Esto interuallum 6. summa quadratorum 68. si per reductionem, quæstionem propositam sol-
7. 2. poris. uere libet.[1] Quia duplum summæ quadratorum, æquatur quadrato summæ numerorum, & quadrato interualli, à duplo ipsius 68. nempe à 136. aufer quadratum ipsius 6. nempe 36. remanet 100. cuius latus 10. est summa numerorum. Iam ergo soluetur quæstio per trigesimam primam, quærendo duos numeros quorum summa 10. & summa quadratorum 68. & rursus per primam quærendo duos numeros, quorum summa 10. interuallum 6. sed si peculiari est vtendum operatione id ita fiet. Cùm interuallum præscribatur 6. Ponatur alter numerorum 3 + 1 N. alter 1 N − 3. fiet summa quadratorum 18 + 2 Q. æqualis 68. Quare fit 1 N. 5. & sunt quæsiti numeri 8. & 2. Hinc etiam Canon formabitur.

Dimidium quadrati interualli aufer à summa quadratorum, residui semissis latus additum & ademptum semissi interualli quæsitos numeros exhibebit.

Qui sanè Canon prorsus conuenit cum sexta secundi porismatum, vt manifestum est.

QVAESTIO TERTIA.

Inueniantur duo numeri, quorum interuallum, & interuallum quadratorum ab ipsis ortorum datos conficiant numeros. Oportet autem quadratum interualli numerorum minorem esse interuallo quadratorum.

Sit interuallum numerorum 6. interuallum quadratorum 60. si libet vti reductione. ³ Quia ex interuallo numerorum in summam eorundem, fit interuallum quadratorum, diuidendo 60. per 6. quotiens 10. erit summa numerorum. Igitur soluetur quæstio per trigesimam secundam quærendo duos numeros, quorum summa 10. interuallum quadratorum 60. Rursus soluetur per primam quærendo duos numeros quorum summa 10. interuallum 6. Sed si peculiarem requiras operationem. Pone minorem quæsitorum 1 N. ergo maior 1 N. + 6. interuallum quadratorum est 36 + 12 N. quod æquatur 60. & fit 1. N. 2. minor numerus. Vel, Pone maiorem 1 N. erit minor 1 N. – 6. Interuallum quadratorum est 12 N. – 36. quod æquatur 60. & fit 1 N. 8. maior numerus. Hinc formatur Canon. 3.2. porism.

Quadratum interualli numerorum adde & adime interuallo quadratorum, summam & residuum diuide per duplum interualli numerorum, prodibunt quæsiti numeri.

Aliter etiam esto minor 1 N – 3. maior 1 N + 3. fiet interuallum quadratorum 12 N. æquale 60. Quare fit 1 N. 5. & sunt numeri vt prius 2. & 8. Hinc etiam Canon alius formari potest.

Diuide interuallum quadratorum per duplum interualli numerorum, quotienti adde & adime semissem interualli numerorum: habebis quæsitos numeros.

QVAESTIO QVARTA.

Inueniantur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione, & interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, sint quales poscimur. Oportet autem quadratum dupli producti additum quadrato interualli quadratorum, efficere quadratum, cuius lateri siue addatur siue adimatur duplum producti, fiat quadratus.

Esto productus 15. interuallum quadratorum 16. Ponatur summa quadratorum 1 N. Ergo si addatur ei duplum producti ¹, fiet 1 N. + 30. æquale quadrato summæ numerorum: & si ab 1 N. auferatur idem duplum producti 30. ² fiet 1 N. – 30. æquale quadrato interualli numerorum. Porro ³ quia ex interuallo numerorum in summam ipsorum fit interuallum quadratorum, patet ex quadrato interualli numerorum in quadratum summæ, fieri quadratum interualli quadratorum. Quamobrem ex 1 N. – 30. in 1 N. + 30. productus 1 Q. – 900. æquatur quadrato ipsius 16. nempe 256. & fit 1 N. 34. summa quadratorum. Reducetur ergo iam quæstio ad primam istarum quærendo duos numeros, quorum productum 15. summa quadratorum 34. vel etiam ex summa quadratorum 34. & interuallo ipsorum 16. reperientur sigillatim ipsi quadrati 25. & 9. per primam huius libri, vnde & latera 5. 3. innotescent. ¹ 4. secundi. ² 4.2. porism. ³ 3.2. porism.

Aliter etiam, & facilius institui potest operatio, & alia quoque conditio præscribi. nimirum. Oportet quadratum producti additum quadrato semissis interualli quadratorum facere quadratum, cuius lateri siue addatur siue adimatur semissis interualli quadratorum, fiat item quadratus. Ponatur quadratorum alter 1 N. + 8. alter 1 N. – 8. Sic enim est eorum interuallum 16. Igitur cùm ex quadratorum mutuo ductu fiat quadratus plani sub lateribus, ex 1 N. + 8. in 1 N. – 8. fiet 1 Q. – 64. æquale quadrato producti 15. nempe 225. & fit 1 N. 17. suntque quadrati quæsiti 25. & 9. vnde & ipsa latera 5. & 3. noscuntur. Hinc elicietur huiusmodi Canon.

Quadratum producti adde quadrato semissis interualli quadratorum, summæ lateri adde & adime semissem interualli quadratorum, fient quadrati quæsitorum numerorum.

QVAESTIO QVINTA.

Inuenire duos numeros, quorum summa, & aggregatum ex producto multiplicationis & ex summa quadratorum, datos conficiant numeros. Oportet autem quadruplum aggregati ex producto multiplicationis, & ex summa quadratorum multatum triplo quadrati summæ, relinquere quadratum.

Esto summa 10. aggregatum ex producto & ex summa quadratorum 76. Esto alter numerorum 5 + 1 N. alter 5. – 1 N. erit summa quadratorum 50 + 2 Q. productum multiplicationis 25 – 1 Q. ergo aggregatum horum erit 75 + 1 Q. æquale 76. & fit 1 N. 1. sunt ergo quæsiti numeri 6. & 4. Hinc formatur iste Canon.

Ab aggregato ex summa quadratorum & ex producto multiplicationis aufer, dodrantem quadrati summæ, residui latus additum & ademptum semissi summæ, quæsitos dabit numeros.

Vel quod idem est.

A quadruplo aggregati aufer triplum quadrati summæ, residui latus additum & ademptum ipsi summæ, præstabit duplum quæsitorum numerorum.

4. secundi. Quod si per reductionem velis hoc problema soluere. ' Quoniam quadratus summæ æquatur summæ quadratorum & duplo producti, si à quadrato summæ 100. auferas 76. compositum ex summa quadratorum & ex producto semel, residuum 24. æquabitur producto. Iam ergo tripliciter reducetur quæstio. Primo ad trigesimam quærendo duos numeros quorum summa 10. productum multiplicationis 24. secundo ad trigesimam primam quærendo duos numeros quorum summa 10. & summa quadratorum 52. nam cognito producto 24. cognoscitur & summa quadratorum auferendo 24. de 76. Tertio ad primam istarum quærendo duos numeros quorum productum 24. summa quadratorum 52.

QVAESTIO SEXTA.

Dato aggregato ex summa quadratorum, & ex producto multiplicationis, datoque altero è duobus numeris, alterum inuenire. Oportet autem datum aggregatum multatum dodrante quadrati dati numeri, relinquere quadratum.

Esto datum aggregatum 124. alter numerorum 10. Ponatur compositum ex quæsito numero & ex semisse dati 1. N. ergo quæsitus 1 N. — 5. cuius quadratus est 1 Q. + 25 — 10 N. At alterius quadratus est 100. productum verò multiplicationis ipsorum est 10 N. — 50. Quæ omnia simul efficiunt 1 Q. + 75. æqualia 124. Quare fit 1 N. 7. ergo quæsitus numerus qui ponebatur 1 N. — 5. erit 2. Hinc elicietur huiusmodi Canon.

A dato aggregato aufer dodrantem quadrati dati numeri. à residui latere aufer semissem dati numeri, relinquetur quæsitus.

QVAESTIO SEPTIMA.

Inueniantur duo numeri, vt summa quadratorum, & compositum ex summa numerorum, & ex producto multiplicationis, datos conficiant numeros. Oportet autem duplum huius compositi vnitate auctum, additum summæ quadratorum, efficere quadratum, cui proximè minor quadratus, ablatus à duplo summæ quadratorum relinquat etiam quadratum.

Sit summa quadratorum 34. Compositum ex summa numerorum, & ex producto multiplicationis sit 23. Ponatur summa numerorum 1 N. ergo productum est 23 — 1 N. cuius duplum 46 — 2 N.
4. secundi. quo addito summæ quadratorum 34. ' fit 80. — 2 N. æquale quadrato summæ 1 Q. & tandem 1 Q. + 2 N. æquantur 80. quæ est prima compositarum, & fit 1 N. 8. summa scilicet numerorum. Quare productum multiplicationis est 15. Itaque iam reducetur quæstio ad tres alias. Primò ad trigesimam quærendo duos numeros quorum summa 8. productum 15. secundò ad trigesimam primam quærendo duos numeros quorum summa 8. & summa quadratorum 34. tertiò ad primam istarum, quærendo duos numeros quorum productum 15. summa quadratorum 34. & omnibus modis inuenientur quæsiti numeri 3. & 5. Hinc fiet Canon.

Summæ quadratorum adde duplum compositi ex summa numerorum & ex producto, vnitate auctum. Aggregati latus vnitate multatum, erit summa numerorum.

Porro hic & in sequentibus per quadratum proximè minorem, intelligo illum cuius latus deficit vnitate à latere quadrati cuius fit mentio.

QVAESTIO OCTAVA.

Inueniantur duo numeri, vt productum multiplicationis eorum, & compositum ex summa numerorum, & ex summa quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem octuplum producti vnitate auctum, additum quadruplo compositi conficere quadratum, cui proximè minor quadratus multatus sedecuplo producti relinquat quadratum.

Esto productum 6. Compositum ex summa numerorum & quadratorum 18. Ponatur summa numerorum 1 N. ergo summa quadratorum 18 — 1 N. cui addendo 12. duplum producti ' fiet 30. —
4. secundi. 1 N. æqualis quadrato summæ numerorum, puta 1 Q. Quare 1 Q. + 1 N. æquatur 30. & fit 1 N. 5. summa scilicet quæsitorum numerorum. Quamobrem summa quadratorum est 13. Itaque iam licet ad tres alias quæstionem hanc reuocare, sicut & præcedentem, nimirum ad trigesimam primam,

& primam istarum. Inuenienturque quæsiti numeri 2. & 3. Hinc formatur huiusmodi Canon.

Quadruplo compositi adde octuplum producti vnitate auctum, aggregati latus vnitate multatum, erit duplum summa numerorum.

QVAESTIO NONA.

Inuenire duos numeros, quorum summa, & compositum ex eorum interuallo, & ex summa quadratorum, datos conficiant numeros. Oportet autem vt à dato composito auferendo semissem quadrati summæ, residui duplum vnitate auctum faciat quadratum.

Esto summa 8. Compositum ex interuallo numerorum, & ex summa quadratorum 56. Ponatur minor 4 − 1 N. maior 4 + 1 N. horum interuallũ est 2 N. summa quadratorum 32 + 2 Q. Quare 32 + 2 N. + 2 Q. æquantur 56. & tandem 2 Q + 2 N. sunt æquales 24. vnde fit 1 N. 3. semissis interualli, ipsum ergo interuallum est 6. summa quadratorum 50. Itaque iam ad tres alias reuocabitur quæstio. Primò ad primam quærendo duos numeros, quorum summa 8. interuallum 6. Secundò ad trigesimam primam quærendo duos numeros, quorum summa 8. summa quadratorum 50. Tertiò ad secundam istarum quærendo duos numeros, quorum interuallum 6. summa quadratorum 50. & omnibus modis inuenientur quæsiti numeri 1 & 7. Hinc etiam elicitur facilis Canon.

Aufer à dato composito semissem quadrati summæ, residui duplo adde vnitatem, fiet quadratus cuius latus vnitate multatum, erit interuallum numerorum.

QVAESTIO DECIMA.

Inuenire duos numeros vt interuallum ipsorum, & compositum ex summa numerorum, & ex summa quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem vt à dato composito auferendo semissem quadrati interualli, residui duplum vnitate auctum faciat quadratum.

Esto interuallum 6. compositum ex summis numerorum & quadratorum 58. Ponatur summa numerorum 2 N. ergo summa quadratorum erit 58 − 2 N. ipsi verò numeri 1 N − 3. & 1 N. + 3. vt eorum interuallum maneat 6. Fiet autem summa quadratorum 2 Q. + 18. sed iam erat 58 − 2 N. Igitur 58 − 2 N. æquantur 2 Q. + 18. & tandem 2 Q. + 2 N. æquantur 40. & fit 1 N. 4. semissis summæ numerorum. Est summa ergo numerorum 8. & summa quadratorum 50. Quare rursus reuocabitur quæstio ad easdem tres ad quas præcedens reduci ostensa est, & inuenientur quæsiti numeri 1 & 7. fiet etiam Canon.

Aufer à dato composito semissem quadrati interualli, residui duplum vnitate auctum quadratus fiet, cuius latus vnitate multatum erit summa numerorum.

Non adiicitur hîc alia huiusmodi quæstio.

Inuenire duos numeros, vt summa quadratorum, & compositum ex summa numerorum & ex eorum interuallo datos conficiant numeros.

Quia facilè citrà Algebram solui potest. Sit enim summa quadratorum 50. compositum ex summa numerorum, & ex eorum interuallo 14. Patet per Canonem primæ libri huius, vel per vigesimam tertiam primi porism. 14. esse duplum maioris numeri. Quare ipse maior numerus est 7. cuius quadratum 49. si auferas à 50. remanet 1. quadratus minoris.

QVAESTIO VNDECIMA.

Inuenire duos numeros, quorum summa, & aggregatum ex producto multiplicationis & ex interuallo ipsorum datos conficiant numeros.

Oportet autem vt excessus quadrati semissis summæ super aggregatum, vnitate auctus conficiat quadratum. Vel vt excessus aggregati super quadratum semissis summæ, ab vnitate detractus, relinquat quadratum.

Esto primum summa numerorum 16. aggregatum ex producto & interuallo 56. Ponatur interuallum 2 N. ergo productum erit 56. − 2 N. ipsi verò numeri 8 + 1 N. & 8 − 1 N. quorum productum fit 64 − 1 Q æquale 56 − 2 N. & tandem 2 N. + 8. æquantur 1 Q. vnde fit 1 N. 4. semissis interualli, ac proinde ipsum interuallum est 8. productum 48. Itaque iam reducetur quæstio ad primam, cum summa sit 16. interuallum 8. vel ad trigesimam, cum summa sit 16. productum 48. vel ad trigesimam tertiam, cùm interuallum sit 8. productum 48. & inuenientur numeri 4. & 12. Deinde esto summa $\frac{1}{2}$ aggregatum ex producto & interuallo $\frac{1}{4}$. Posito vt prius interuallo 2

N. erit productum $\frac{1}{3}-2$ N. ipsi verò numeri $\frac{5}{12}+1$ N. & $\frac{5}{12}-$ N. 1 quorum productum fit $\frac{25}{144}-1$ Q. æquale $\frac{1}{3}-2$ N. & tandem 1 Q. + . $\frac{23}{144}$ æquantur 2. N. & fit 1. N. $\frac{1}{12}$ semissis interualli, ergo ipsum interuallum est $\frac{1}{6}$ productum item $\frac{1}{6}$ & per quæstiones suprà citatas reperientur quæsiti numeri $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ Hinc fit iste Canon.

Aufer à quadrato semissis summæ datum aggregatum, residuum vnitate auctum est quadratus, cuius latus vnitate auctum est semissis interualli numerorum. Vel.

Aufer à dato aggregato quadratum semissis summæ, residuum ab vnitate detractum relinquit quadratum, cuius latus detractum ab vnitate est semissis interualli numerorum.

QVAESTIO DVODECIMA.

Inuenire duos numeros, quorum interuallum, & aggregatum ex summa, & ex producto ipsorum, datos faciant numeros. Oportet autem vt quadrato semissis interualli ad datum aggregatum vnitate auctum adiecto, fiat quadratus.

Esto interuallum 8. aggregatum ex summa & producto 32. Ponatur summa 2 N. ergo productum relinquetur 32 − 2 N. ipsi autem numeri erunt 1 N. + 4 & 1 N. − 4. quorum productum 1 Q. − 16. æquatur 32. − 2 N. & tandem 1 Q. + 2 N. æquatur 48. & fit 1 N. 6. semissis summæ. Ipsa ergo summa est 12. productum 20. Soluetur igitur quæstio per easdem per quas superior, & inuenientur quæsiti numeri 2 & 10. & fiet Canon.

Quadrato semissis interualli adde datum aggregatum vnitate auctum, fiet quadratus cuius latus vnitate multatum erit semissis summæ numerorum.

Hîc etiam non subiicitur huiusmodi quæstio.

Inuenire duos numeros, quorum productum, & aggregatum ex summa ipsorum & interuallo, datos conficiant numeros.

Etenim nullo negotio absque Algebra soluitur. Esto productum 48. aggregatum summæ & interualli 24. patet per Canonem primæ huius, vel per vigesimam tertiam primi porism. 24. esse duplum maioris numeri. Est ergo maior 12. per quem si diuidas 48. fit minor 4.

QVAESTIO DECIMA TERTIA.

Inuenire duos numeros, quorum summa, & aggregatum ex producto multiplicationis, & ex interuallo quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem vt à quintuplo quadrati semissis summæ auferendo datum aggregatum, supersit quadratus.

Esto summa 12. aggregatum ex producto & ex interuallo quadratorum 116. Ponatur minor 1 N. maior 12 − 1 N. interuallum quadratorum erit 144 − 24 N. productum verò 12 N. − 1 Q. quæ iuncta faciunt 144 − 12 N. − 1 Q. æqualia 116. & tandem 1 Q. + 12 N. æquantur 28 & fit 1 N. 2. minor numerus. Ergo maior est 10. Hinc formatur Canon.

A quintuplo quadrati semissis summæ aufer datum aggregatum, remanebit quadratus cuius latus multatum semisse summæ, minorem exhibet numerum.

Hîc videntur desiderari duæ quæstiones quibus quæruntur duo numeri dato producto, & aggregato ex summa numerorum, & ex interuallo quadratorum. Vel dato interuallo quadratorum & aggregato ex summa numerorum & ex producto. Sed quia resolui non possunt per regulas Algebræ perfectè Canonicas, quandoquidem incidunt in æquationes in quibus duæ species duabus speciebus æquales reperiuntur, non possunt hîc commode tractari. Qua de causa nonnullas etiam alias omisimus eiusdem naturæ.

QVAESTIO DECIMA QVARTA.

Inuenire duos numeros, quorum summa, & aggregatum ex interuallis numerorum & quadratorum, datos conficiant numeros. Oportet autem aggregatum interuallorum esse minus quadrato summæ aucto suo latere.

Esto summa 10. aggregatum interuallorum 44. Ponatur interuallum Numerorum 2. N. erunt ipsi 5 − 1 N. & 5 + 1 N. quadratorum interuallum fiet 20. N. æquale 44. − 2 N. & fit 1 N. 2. semissis interualli, quare quæsiti numeri sunt 3. & 7. Hinc fit Canon.

Diuide aggregatum interuallorum per duplum summæ binario auctum, orietur semissis interualli numerorum.

Reducitur ergo ad primam vel ad trigesimam secundam Diophanti, vel ad tertiam harum. Aliter

ter ponatur alter numerorum 1 N. alter 10 − 1 N. fiet aggregatum interualli numerorum & quadratorum 110 − 22 N. vel 22 N. − 110. prout 1 N. nunc maior nunc minor statuetur. Igitur 110 − 22. N. æquantur 44. & fit 1 N. 3. minor numerus. Vel 22. N − 110. æquantur 44. & fit 1. N. 7. maior numerus. Hinc etiam fiet Canon.

Quadrato summæ suo latere aucto adde vel adime aggregatum interuallorum: summam, & residuum diuide per duplum summæ binario auctum, orientur quæsiti numeri.

QVAESTIO DECIMA QVINTA.

Inuenire duos numeros, quorum interuallum, & aggregatum ex summa ipsorum, & ex interuallo quadratorum, datos conficiant numeros.

Oportet autem datum aggregatum maius esse interualli quadrato aucto suo latere.

Esto interuallum 4. aggregatum ex summa numerorum, & ex interuallo quadratorum 50. Ponatur alter 1 N. alter 1 N + 4. fiet aggregatum ex summa numerorum & interuallo quadratorum 10. N + 20 æquale 50. vnde fit 1 N. 3. minor numerus. Quod si ponatur maior 1 N. minor 1 N. − 4. fient 10 N − 20 æqualia 50. vnde erit 1 N. 7. maior numerus. Hinc formatur Canon.

Dato aggregato adde vel adime interualli quadratum auctum suo latere, summam & residuum diuide per duplum interualli auctum binario, orientur, quæsiti numeri.

Aliter etiam fiet operatio posita summa 2 N. & ipsis numeris 1 N − 5. & 1 N + 5. vt tibi considerandum relinquo. Hic quoque prætermitto quæstionem de inueniendis duobus numeris dato interuallo quadratorum, & aggregato ex summa & interuallo numerorum, nam soluitur absque Algebra.

QVAESTIO DECIMA SEXTA.

Inueniantur duo numeri, vt summa quadratorum, & aggregatum ex interuallo numerorum, & ex producto multiplicationis datos conficiant numeros. Oportet autem vt si a summa quadratorum auferatur duplum dati aggregati vnitate multatum, remaneat quadratus.

Esto summa quadratorum 58. aggregatum interualli & producti 25. Ponatur interuallum 1 N. erit ergo productum 25 − 1 N. Sed a summa quadratorum 58. auferendo quadratum interualli 1 Q. [a] residuum 58 − 1 Q. duplum est producti. Ergo 58 − 1 Q. æquatur 50 − 2 N. & fit 1 N. 4. interuallum numerorum, productum ergo est 21. Itaque iam reducetur quæstio vel ad trigesimam tertiam Diophanti, vel ad primam, vel ad secundam harum, & inuenientur quæsiti numeri 3. & 7. 4. 2. poris.

Aduertendum autem fieri posse vt summa quadratorum sit minor duplo aggregati. Quo casu sic præscribenda erit conditio. Oportet vt summam quadratorum auferendo à duplo aggregati, residuum ab vnitate detractum, relinquat quadratum. Et pro vtroque casu Canon formabitur.

A summa quadratorum aufer duplum aggregati, residuum vnitate auctum quadratus erit, cuius latus vnitate auctum erit interuallum numerorum.

Vel in alio casu.

A duplo aggregati aufer summam quadratorum, residuum ab vnitate detractum relinquet quadratum, cuius latus ab vnitate detractum, erit interuallum numerorum.

QVAESTIO DECIMA SEPTIMA.

Inuenire duos numeros quorum interuallum, & aggregatum ex producto & ex summa quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem vt si ab aggregato auferatur quadratus semissis interualli, residui triens sit quadratus.

Esto interuallum 4. aggregatum ex producto & ex summa quadratorum 79. Per solam reductionem solui potest quæstio hac arte. [a] Quia summa quadratorum continet duplum producti & quadratum interualli, patet 79. continere ter productum & semel quadratum interualli. Quare si inde auferatur 16. quadratus interualli, residuum 63. erit triplum producti, erit ergo productum 21. summa quadratorum 58. Quare multis modis reducetur quæstio, vt manifestum est. Aliter ponatur summa Numerorum 2 N. ergo ipsi numeri sunt 1 N. − 2 & 1 N. + 2. aggregatum ex summa quadratorum & ex producto est 3 Q. + 4. æquale 79. vnde fit 1 N. 5. semissis summæ. Quare ipsa summa 10. ex qua & interuallo per primam huius libri noscentur numeri 3. & 7. Canon. 4. 2. poris.

Aufer ab aggregato quadratum semissis interualli, residui triens est quadratus semissis summæ numerorum.

QVAESTIO DECIMA OCTAVA.

Inuenire duos numeros, vt productum multiplicationis & aggregatum ex interuallo ipsorum, & ex summa quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem vt quadruplum excessus aggregati suprà duplum producti, adscita vnitate faciat quadratum.

Esto productum 21. aggregatum ex interuallo numerorum, & ex summa quadratorum 62. Ponatur interuallum numerorum 2 N. erit ergo summa quadratorum 62 − 2 N. vnde si auferatur quadratus interualli, nimirum 4 Q. [1] residuum 62 − 2 N. − 4 Q. æquatur duplo producti, hoc est vnitatibus 42. Quare tandem 4 Q. + 2 N. æquantur 20. & fit 1 N 2. semissis interualli numerorum. Quare ipsum interuallum est 4. summa quadratorum 58. Itaque reducitur quæstio ad trigesimam tertiam Diophanti. Vel ad primam istarum, vel ad secundam, & inueniuntur quæsiti numeri 3. & 7. Hinc etiam fit Canon.

4. 2. porif.

Quadruplo excessus aggregati suprà duplum producti adde vnitatem, fiet quadratus cuius latus vnitate multatum duplum est interualli numerorum.

QVAESTIO DECIMA NONA.

Inuenire duos numeros, vt summa quadratorum & aggregatum ex producto, & ex interuallo quadratorum datos conficiant numeros.

Oportet autem vt quintuplum interualli quadratorum ortorum à data summa, & à dato aggregato, additum vel ademptum quadrato aggregati summam vel residuum faciat quadratum.

Esto summa quadratorum 58. aggregatum ex producto, & ex interuallo numerorum 61. Ponatur productum 1 N. Igitur eius duplo addito ad summam quadratorum, [1] fit 58 + 2 N. quadratus summæ numerorum. At eodem duplo detracto ab eadem summa quadratorum, [2] remanet 58 − 2 N. quadratus interualli numerorum. Quoniam igitur ex summa numerorum in eorum interuallum, [3] fit interuallum quadratorum; vtique ex quadrato summæ numerorum in quadratum interualli eorum, fiet quadratus interualli quadratorum. Igitur ex 58. + 2 N. in 58 − 2. N. fiet 3364. − 4 Q. æqualis quadrato ipsius 61 − 1 N. nimirum 3721. + 1 Q. − 122 N. & tandem 5 Q. + 357 æquabuntur 122 N. & fiet 1 N. 21. productum scilicet. Ergo interuallum quadratorum erit 40. vnde licet varia vti reductione, & inuenire quæsitos numeros 3. & 7.

4 secundi. 4. 2. porif. 3. 2. porif.

Accidit autem vt data summa nunc minor sit, nunc verò maior dato aggregato, vt in superiore exemplo minor extitit, sed in sequente maior est. Esto summa quadratorum 34. Aggregatum ex producto & ex interuallo quadratorum 31. eodem vtentes ductu inueniemus tandem 62 N. + 195. æquales 5 Q. & fiet 1 N. 15. productum scilicet, vnde interuallum quadratorum est 16. & ipsi quadrati 25. & 9. Hinc elicitur Canon.

Quintuplum excessus quadrati à dato aggregato super quadratum à data summa, aufer à quadrato aggregati, residui latus adde aggregato, summæ quinta pars erit productum. Vel.

Quintuplum excessus quadrati à data summa super quadratum à dato aggregato, adde quadrato aggregati, summæ latus adde aggregato, compositi quinta pars erit productum.

Aduertendum porrò, vt omnino solutio sit rationalis, præter appositam conditionem, necesse esse vt inuento interuallo quadratorum, id ademptum vel additum summæ quadratorum, summam & residuum faciat quadratum.

QVAESTIO VIGESIMA.

Inuenire duos numeros vt interuallum quadratorum, & aggregatum ex summa quadratorum, & ex producto datos conficiant numeros.

Oportet autem vt triplum excessus quadrati à dato aggregato super quadratum à dato interuallo, additum quadrato aggregati efficiat quadratum, cuius latus multatum eodem aggregato, numerum relinquat cuius triens additum rursus eidem aggregato, faciat quadratum.

Esto interuallum quadratorum 40. Aggregatum ex summa quadratorum, & ex producto 79. esto productum 1 N. ergo summa quadratorum 79 − 1 N. vnde auferendo duplum producti, [1] residuum 79 − 3 N. est quadratus interualli numerorum. Sed etiam si ad 79 addatur productum 1 N. [2] fit 79 + 1 N. quadratus summæ numerorum. [3] Igitur cùm ex summa numerorum in eorum

4. 2. porif. 4. secundi. 5. 2. porif.

interuallum fiat interuallum quadratorum, vtique ex quadrato summæ 79 + 1 N. in quadratum interualli 79 − 3 N. fiet 6241 − 158 N. − 3 Q. æquale quadrato interualli quadratorum, nimirum 1600. & tandem 4641. æquantur 3 Q. + . 158 N. & fit 1 N 21. productum. Quare per reductionem ad præcedentes regulas soluitur quæstio. Hinc fiet Canon.

Triplum excessus quadrati ab aggregato super quadratum ab interuallo, adde ipsi quadrato aggregati; à summa latere aufer idem aggregatum, residui triens erit productum multiplicationis.

Alia quæstio qua quæruntur numeri dato producto, & aggregato ex summa & interuallo quadratorum facilis est, & soluitur absque algebra.

QVAESTIO VIGESIMA PRIMA.

Quæruntur duo numeri, vt aggregatum ex interuallis numerorum & quadratorum, itemque aggregatum ex summis numerorum & quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem siue aggregatum interuallorum addatur aggregato summarum, siue adimatur, duplum summæ & residui addita vnitate fieri vtrumque quadratum.

Esto aggregatum interuallorum 14. aggregatum summarum 26. Quoniam [1] igitur addendo interuallum numerorum summæ numerorum, fit duplum maioris numeri, & addendo interuallum quadratorum summæ quadratorum, fit duplum maioris quadrati, patet addito 14. ad 26. summam 40. continere bis maiorem numerum, & bis eius quadratum. Ergo 20. est maior numerus & eius quadratus. Ponatur maior numerus 1 N. erit eius quadratus 1 Q. Igitur 1 Q. + 1 N. æquatur 20. fitque 1 N. 4. maior numerus. Eadem ratione auferendo 14. de 26. residuum 12. est duplum minoris numeri & eius quadrati. Quare 6. est minor numerus & eius quadratus. Posito ergo minore numero 1 N. fiet 6. æqualis 1 Q. + 1 N. & erit 1 N. 2. minor numerus. Hinc formatur Canon. 23. 1. [illegible]

Duplo summæ duorum aggregatorum, & duplo interualli ipsorum, adde seorsim vnitatem, fient duo quadrati, quorum latera vnitate multata, dupla manebunt quæsitorum numerorum.

QVAESTIO VIGESIMA SECVNDA.

Inuenire duos numeros, vt aggregatum ex summa ipsorum, & ex interuallo quadratorum, itemque aggregatum ex summa quadratorum, & ex interuallo numerorum datos faciant numeros. Oportet autem vt duplum summæ aggregatorum addita vnitate faciat quadratum. Et vt duplum interualli eorundem vel additum vnitati, vel detractum ab vnitate faciat quadratum.

Esto prius aggregatum 18. posterius 22. Patet ob rationem allatam in præcedente horum summam 40. esse duplum maioris numeri & quadrati ipsius. Quare vt suprà inuenietur maior numerus 4. Quia verò auferendo 18. de 22. superest 4. patet 4. esse duplum minoris quadrati minus duplo lateris. Quare posito minore numero 1 N. duplum minoris quadrati erit 4 + 2 N. Quare 2 + 1 N. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 2.

Sed esto prius aggregatum 20 $\frac{2}{9}$. Posterius 19. $\frac{7}{9}$. Quia horum summa est quoque 40. erit 4 maior numerus vt prius. Sed quia prius aggregatum excedit posterius, erit horum interuallum $\frac{4}{9}$ duplum minoris numeri, minus duplo sui quadrati. Quare posito minore numero 1 N. fient $\frac{4}{9}$ + 2 Q. æqualia 2 N. vnde erit 1 N. $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ Et vtrumque satisfacit proposito. Hinc fit Canon.

Duplum summæ aggregatorum vnitate auctum fit quadratus, cuius latus vnitate multatum est duplum maioris lateris, & duplum excessus posterioris aggregati super prius aggregatum; addita vnitate quadratus fit, cuius latus vnitate auctum est duplum minoris lateris. At duplum excessus prioris aggregati super posterius aggregatum, detractum ab vnitate quadratum relinquit, cuius latus additum & ademptum semissi vnitatis, vtroque modo exhibet duplum minoris numeri.

Sed & aduertendum est, si vnum aggregatum alteri sit æquale, tunc minorem numerum esse semper vnitatem vt facilè est demonstrare.

QVAESTIO VIGESIMA TERTIA.

Inuenire duos numeros vt productum ex interuallo numerorum in interuallum quadratorum, & productum ex summa numerorum in summam quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem duplum posterioris producti multatum priore producto, relinquere cubum, ita vt per eius latus diuidendo prius productum, oriatur quadratus.

3. 2. poris. Esto prius productum 32. posterius 272. Ponatur summa numerorum 1 N. Igitur $\frac{272}{1N}$ est summa quadratorum, & quia ex summa numerorum in interuallum eorundem fit interuallum quadratorum, quo rursus ducto in numerorum interuallum fit 32. erit $\frac{32}{1N}$ quadratus interualli numerorum,
7. 2. poris. qui si auferatur à duplo summæ quadratorum, nimirum à $\frac{544}{1N}$ residuum $\frac{512}{1N}$ æquatur quadrato summæ numerorum 1 Q. & omnia ducendo in 1 N. fiunt 512 æquales 1 C. & fit 1 N 8. summa numerorum, & 34. summa quadratorum, & 2. interuallum eorundem. Vnde facilè reperiuntur numeri 3. & 5. Hinc fit Canon.

Aufer prius productum à duplo posterioris, residuum est cubus summæ numerorum, per quam si diuidas prius productum, fit quadratus interualli numerorum.

QVAESTIO VIGESIMA QVARTA.

Inuenire duos numeros vt productum ex summa numerorum in interuallum quadratorum, & productum ex summa quadratorum in interuallum numerorum, datos conficiant numeros. Oportet autem duplum posterioris producti multatum priore producto, relinquere cubum, ita vt per eius latus diuidendo prius productum, oriatur quadratus.

Esto prius productum 128. posterius 68. Ponatur interuallum numerorum 1 N. ergo summa quadratorum erit $\frac{68}{1N}$ & ob causam in precedente allatam $\frac{128}{1N}$ erit quadratus summæ numerorum. Itaque
7. 2. poris. si à duplo summæ quadratorum quod est $\frac{136}{1N}$ auferatur quadratus summæ numerorum nimirum $\frac{128}{1N}$ residuum $\frac{8}{1N}$ est quadratus interualli numerorum. Quare $\frac{8}{1N}$ æquatur 1 Q. & omnia in 1 N. fiunt 8. æquales 1 C. est ergo 1 N 2. interuallum numerorum, & summa quadratorum 34. & quadratus summæ numerorum 64. vnde licet variis modis quæstionem soluere, & inuenire quæsitos numeros 3. & 5. Hinc fit Canon.

Aufer prius productum à duplo posterioris, residuum est cubus interualli numerorum, itaque per eius latus diuidendo prius productum, oritur quadratus summæ numerorum.

QVÆSTIO XXXIV.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντας δεδομένον ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα, τὴν δὲ σύνθεσιν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι πενταπλασίονα. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς^ος ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ςς γ. λοιπόν ἐστι τὸ σύνθεμα, τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρω εἶναι πενταπλασίονα. ἀλλὰ τὸ σύνθεμα, τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δυνάμεις ι. τὸ δὲ αὐτῶν σύνθεμα ςς^οὶ δ. ὥστε δυνάμεις ι πενταπλασίονές εἰσιν ςς δ. ἀριθμοὶ ἄρα κ ἴσοι δυνάμεσι ι. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο β. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μο β ὁ δὲ μείζων μο ς. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE duos numeros, datam inter se rationem habentes, vt & summa quadratorum ab ipsis, ad summam ipsorum datam habeat rationem. Imperatum sit maiorem minoris esse triplum; summam autem quadratorum; summæ numerorum esse quincuplam. Ponatur minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. Superest vt summa quadratorum ab ipsis, summæ vtriusque sit quincupla. Cæterùm summa quadratorum ab ipsis ortorum fit 10 Q. summa verò ipsorum est 4 N. vnde constat 10 Q. quincuplos esse ad 4 N. Quamobrem 20 N. æquantur 10 Q. & fit 1 N. 2. Est igitur minor 2. maior 6. & quæstioni satisfaciunt.

IN QVÆSTIONEM XXXIV.

CIRCA hanc quæstionem & octo sequentes nulla est difficultas, nec ampliori indigent explicatione. Canones etiam pro qualibet formari nullo negotio possunt, quod tibi relinquo peragendum.

QVÆSTIO XXXV.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt summa quadratorum ab

ipsis ortorum, ad interuallum ipsorum datam habeat rationem. Iniunctum sit maiorem minoris triplum esse; summam autem quadratorum ab ipsis ortorum, interualli ipsorum esse decuplam. Ponatur minor 1 N. Maior ergo erit 3 N. Cæterum volo summam quadratorum ab ipsis, interualli ipsorum esse decuplam. Sed summa quadratorum ab ipsis facit 10 Q. Interuallum autem ipsorum 2 N. Igitur 10 Q. decupli sunt ad 2 N. sed & 20 N. decupli sunt ad 2 N. Igitur 20 N. æquales sunt 10 Q. & omnia per numerum diuidantur, fiunt 10 N. æquales 20. & fit 1 N. 2. & est rursus minor 2. maior *6*. & satisfaciunt proposito.

τετραγώνων πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάττονος εἶναι τριπλασίονα, τὸ δὲ σύνθεμα τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι δεκαπλασίονα. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ςοῦ ᾱ. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ςς̄ γ̄. λοιπὸν θέλω τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι δεκαπλασίονα. ἀλλὰ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δυνάμεις ῑ. ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτῶν ςςοὶ β̄ δυνάμεις ἄρα ῑ δεκαπλάσιοί εἰσιν ςς̄ β̄. ἀλλὰ καὶ ςςοὶ κ̄ δεκαπλάσιοί εἰσιν ςς̄ β̄. ἀριθμοὶ ἄρα κ̄ ἴσοι εἰσὶ δυνάμεσι ῑ., καὶ πάντα παρὰ ἀριθμόν. ςςοὶ ἄρα ῑ ἴσοι μονάσιν κ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο β̄. καὶ ἔσται πάλιν ὁ ἐλάσσων μο β̄. ὁ δὲ μείζων μο ς̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

QVÆSTIO XXXVI.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt & interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, ad summam ipsorum datam habeat rationem. Constitutum sit maiorem minoris esse triplum. Interuallum autem quadratorum ab ipsis summæ ipsorum esse sescuplum. Ponatur minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. Superest vt & interuallum quadratorum ab ipsis ortorum summæ vtriusque sit sescuplum. Sed interuallum quadratorum ab ipsis est 8 Q. summa autem numerorum ipsorum est 4 N. Igitur 8 Q. sescupli sunt ad 4 N. Quamobrem 24 N. æquantur 8 Q. & fit 1 N. 3. & est minor quidem 3. Maior verò *9*. & satisfaciunt quæstioni.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ δοθέντι ὅπως καὶ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων πρὸς ἀμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάττονος εἶναι τριπλασίονα. τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι ἑξαπλασίονα. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ςοῦ ἑνός, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ςς̄ γ̄. λοιπόν ἐστι καὶ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι ἑξαπλασίονα. ἀλλὰ ἡ μὲν ὑπεροχὴ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ἐστὶ δυνάμεις η̄. συναμφότερος δὲ ςς̄ δ̄. δυνάμεις ἄρα η̄. ἑξαπλασίονές εἰσι ςς̄ δ̄. ἀριθμοὶ ἄρα κδ̄. ἴσοι εἰσὶν δυνάμεσιν η̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο γ̄, καὶ ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μο γ. ὁ δὲ μείζων μο θ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

QVÆSTIO XXXVII.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt etiam interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, ad interuallum ipsorum datam habeat rationem. Imperatum sit maiorem minoris esse triplum; interuallum quadratorum, interualli numerorum esse duodecuplum. Ponatur rursus minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. superest vt & interuallum quadratorum, interualli numerorum sit duodecuplum. Sed interuallum quadratorum est 8. Q. Hoc ergo duodecuplum est ad 2 N.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα, τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι δωδεκαπλασίονα. τετάχθω πάλιν ὁ ἐλάσσων ςοῦ ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ςς̄ γ̄. λοιπόν ἐστι καὶ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι δωδεκαπλασίονα. ἀλλὰ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ἐστὶ δυνάμεις η̄. αὗται ἄρα δω-

δεκαπλασίονές εἰσιν ςς β̄. ἀριθμοὶ ἄρα κδ̄ ἴσοι εἰσὶ δυνάμεσι η̄. καὶ γίνεται πάλιν ὁ ς μο γ̄. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

Ὁμοίως δὲ διὰ τοῦ αὐτοῦ εὑρεθήσονται καὶ ἀριθμοὶ δύο πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντες δεδομένον, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτοῦ πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχειν δεδομένον. καὶ πάλιν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντες δεδομένον, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχειν δεδομένον.

Quamobrem 24. N. æquantur 8 Q. & fit rursus 1 N. 3. & demonstratio est manifesta.

Similiter hac ipsa ratione inuenientur duo numeri datam ad inuicem rationem habentes, vt productus ex eorum multiplicatione ad summam ipsorum datam habeat rationem. Et rursus duo numeri datam inter se rationem habentes, vt productus ex eorum multiplicatione ad ipsorum interuallum datam habeat rationem.

QVÆSTIO XXXVIII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος, πρὸς τὸν μείζονα λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν μείζονα τοῦ ἐλάττονος τριπλασίονα, τὸν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τοῦ μείζονος εἶναι ἑξαπλασίονα. τετάχθω πάλιν ὁ ἐλάσσων ς ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ςς γ̄. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος, εἶναι τοῦ μείζονος ἑξαπλασίονα. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονός ἐστι δυνάμεως μιᾶς. δύναμις ἄρα μία ἑξαπλασίων ἐστὶν ἀριθμῶν τριῶν. ἀριθμοὶ ἄρα ιη̄ ἴσοι δυνάμει μιᾷ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο ιη̄. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μο ιη̄. ὁ δὲ μείζων μο νδ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt quadratus à minore ortus ad maiorem datam habeat rationem. Iniunctum sit maiorem minoris esse triplum; quadratum autem minoris, esse maioris sescuplum. Ponatur rursus minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. superest vt & quadratus à minore ortus, sit maioris sescuplus. Sed quadratus minoris est 1 Q. Igitur 1 Q. sescuplus est ad 3 N. Quamobrem 18 N. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 18. Erit ergo minor 18. Maior 54. & hi satisfaciunt quæstioni.

QVÆSTIO XXXIX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετραγώνος πρὸς αὐτὸν τὸν ἐλάττονα λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα, τὸν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον αὐτοῦ τοῦ ἐλάσσονος ἑξαπλασίονα. ἔστω ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ςς γ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων ς ἑνός, καὶ μένει ὁ μείζων τοῦ ἐλάττονος τριπλασίων. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον αὐτοῦ ἐλάσσονος εἶναι ἑξαπλασίονα. δύναμις ἄρα μία ἑξαπλασίων ἐστὶ ἀριθμοῦ ἑνός. ἀριθμοὶ ἄρα ς̄. ἴσοι δυνάμει μιᾷ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο ς̄. ἔσται ὁ μὲν ἐλάττων μο ς̄. ὁ δὲ μείζων μο ιη̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt quadratus minoris ad ipsum minorem datam habeat rationem. Constitutum sit maiorem minoris esse triplum; Minoris autem quadratum ipsius minoris esse sescuplum. Esto similiter maior 3 N. minor 1 N. & manet maior minoris triplus. Restat vt minoris quadratus, ipsius minoris sit sescuplus. Quamobrem 1 Q. sescuplus est ad 1 N. Proinde 6. N. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 6. erit igitur minor 6. Maior 18. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO XL.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετραγώνος πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω τὸν μείζονα τοῦ ἐλάττονος εἶναι τριπλασίονα. τὸν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον συναμφοτέρου εἶναι διπλασίονα. ἔστω πάλιν ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ςς γ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων ς ἑνός. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt quadratus minoris ad summam vtriusque datam habeat rationem. Statutum sit maiorem minoris esse triplum; quadratum verò minoris summæ vtriusque esse duplum. Esto rursus Maior 3 N. minor 1 N. Superest vt quadratus à minore ortus, summæ vtriusque sit du-

plus, sed quadratus minoris est 1 Q. summa verò vtriusque 4 N. Igitur 1 Q. duplus est ad 4 N. Quamobrem 8 N. æquales sunt 1 Q. & fit 1 N. 8. Erit igitur minor 8. maior 24. Et satisfaciunt quæstioni.

τετράγωνον συναμφοτέρου ἐστὶ διπλασίονα. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος ἐστὶ δυνάμεως μιᾶς, συναμφότεροι δὲ ςς δ̄. δύναμις ἄρα μία διπλασίων ἐστὶ ςς δ̄. ἀριθμοὶ ἄρα η̄. ἴσοι δυνάμει μιᾷ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° η̄. καὶ ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ° η̄. ὁ δὲ μείζων μ° κδ̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

QVÆSTIO XLI.

INVENIRE duos numeros in ratione data, vt quadratus minoris ad ipsorum interuallum datam habeat rationem. Constiturum sit maiorem minoris esse triplum. Quadratum autem minoris interualli ipsorum esse sescuplum. Esto rursus maior 3 N. minor verò 1 N. Superest vt quadratus minoris interualli ipsorum sit sescuplus. Igitur 1 Q. sescuplus est ad 2 N. Quamobrem 12 N. æquales sunt 1 Q. vnde fit 1 N. 12. Erit ergo minor 12. maior 36. & satisfaciunt quæstioni.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα. τὸν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ἑξαπλασίονα. ἔστω πάλιν ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ςς γ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων ς ἑνός. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι ἑξαπλασίονα. δύναμις ἄρα μία, ἑξαπλασίων ἐστὶ ςς β̄. ἀριθμοὶ ἄρα ιβ̄, ἴσοι εἰσὶ δυνάμει μιᾷ ὁ ἄρα ἀριθμὸς ἔσται μ° ιβ̄. ἔσται ἄρα ὁ μὲν ἐλάσσων μονάδων ιβ̄. ὁ δὲ μείζων μ° λϛ̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

QVÆSTIO XLII.

SIMILITER ob hæc eadem, inuenientur duo numeri in data ratione, ita vt maioris quadratus ad minorem datam habeat rationem. Et rursus duo numeri in data ratione, vt quadratus maioris ad ipsum maiorem datam habeat rationem. Et similiter duo numeri in data ratione, vt maioris quadratus ad summam vtriusque datam habeat rationem. Et adhuc duo numeri in ratione data, vt & maioris quadratus ad interuallum ipsorum datam habeat rationem.

ΟΜΟΙΩΣ δὲ διὰ τῶν αὐτῶν εὑρεθήσονται ἀριθμοὶ δύο ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνος πρὸς τὸν ἐλάσσονα, λόγον ἔχῃ δεδομένον. καὶ πάλιν δύο ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος πρὸς αὐτὸν τὸν μείζονα λόγον ἔχῃ δεδομένον. καὶ ὁμοίως δύο ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. καὶ ἔτι δύο ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι, ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνος πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον.

QVÆSTIO XLIII.

DVOBVS datis numeris, alium numerum inuenire, vt ex his tribus bini quique coniuncti, & in reliquum multiplicati, producant tres numeros æqualibus se incrementis superantes. Sint duo dati numeri 3. & 5. & oporteat inuenire alium numerum, vt bini coniuncti, & in reliquum multiplicati producant tres numeros, quorum æqualia sint interualla. Esto quæsitus 1 N. & si adiiciatur ad 5. fit 1 N. + 5. Quod si multiplicetur in reliquum, nimirum in 3. fit 3 N. + 15. Rursus si 1 N. addatur ad 3. fit 1 N. + 3.

ΔΥΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς, προσευρεῖν ἕτερον ἀριθμὸν ὅπως τῶν τριῶν ἐκκειμένων συνδύο συντεθέντες καὶ ἐπὶ τὸν λοιπὸν πολλαπλασιασθέντες ποιῶσι τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ. ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ ὅ τε τρία καὶ ὁ πέντε, καὶ δέον ἔστω προσευρεῖν ἕτερον ἀριθμὸν ὅπως συνδύο συντεθέντες, καὶ ἐπὶ τὸν λοιπὸν πολλαπλασιασθέντες ποιῶσι τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ἔστω ὁ ζητούμενος ς ἑνὸς καὶ ἐὰν μὲν συντεθῇ μετὰ μ° ε̄. γίνεται ς° εἷς μ° ε̄. ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν λοιπὸν τουτέστι τὸν γ̄. γίνονται ςς°ι τρεῖς μ° ιε̄. πάλιν ἐὰν ς° εἷς συντεθῇ μετὰ μ° γ̄. γίνεται ς° εἷς μ° γ̄. ἐὰν δὲ, πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν

λοιπὸν τουτέστι τὸν ε. γίνονται ςς οἱ ε μο ιε. καὶ ἔτι ἐὰν μο ε. συντεθῶσι μετὰ μο γ. καὶ αἱ γινόμεναι μο η. πολλαπλασιασθῶσαι ἐπὶ ς ἕνα. γίνονται ςς οἱ η. ὅτι μὲν οὖν οὐδέποτε ἔσται μέγιστος ὁ τῶν ςς γ. μο ιε φανερόν. μείζων γὰρ αὐτοῦ ἐστι ὁ τῶν ἀριθμῶν ε μο ιε. ὁ ἄρα ςς γ. μο ιε. ἤτοι μέσος ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ὁ δὲ τῶν ςς ε μο ιε. ἤτοι μέγιστός ἐστιν, ἢ μέσος. ὁ δὲ τῶν ςς η. καὶ μέγιστος, καὶ μέσος, καὶ ἐλάχιστος δύναται τυγχάνειν τῷ ἄδηλον εἶναι τὴν τοῦ ς ὑπόστασιν. τετάχθω οὖν πρῶτον μέγιστος μὲν ὁ τῶν ςς ε μο ιε. ἐλάχιστος δὲ ὁ τῶν ςς γ μο ιε. μέσος δὲ δηλονότι ὁ τῶν ςς η. ἐὰν δὲ ὦσιν ἀριθμοὶ τρεῖς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος συντεθέντες διπλάσιοί εἰσι τοῦ μέσου, καὶ ἔστιν ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος ςς οἱ η μονάδες λ. ταῦτα ἴσα ςς οἷς ις καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δεκαπέντε τετάρτων μονάδος. τοσούτων ἔσται ὁ ζητούμενος. καὶ ποιῶν τὰ τῆς προτάσεως.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω μέγιστος μὲν ὁ τῶν ςς ε μο ιε. μέσος δὲ ὁ τῶν ςς γ μο ιε. ἐλάχιστος δὲ ὁ τῶν ςς η. ἐπεὶ δὲ ὦσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ᾧ ὑπερέχει ὁ μέγιστος τὸν μέσον, τούτῳ ὑπερέχει ὁ μέσος τὸν ἐλάχιστον ὑπερέχει δὲ ὁ μὲν μέγιστος τὸν μέσον ἀριθμοῖς β. ὁ δὲ μέσος τὸν ἐλάχιστον μονάδας ιε λεῖψει ςς ε. μονάδες ἄρα ιε λεῖψει ςς ε. ἴσαι εἰσὶν ἀριθμοῖς δυσί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιε ἑβδόμων τοσούτων ἔσται ὁ ζητούμενος, καὶ ποιῶν τὸ πρόβλημα. Ἀλλὰ δὴ ἔστω μέγιστος μὲν ὁ τῶν ςς η. μέσος δὲ ὁ τῶν ςς ε μο ιε. ἐλάχιστος δὲ ὁ τῶν ἀριθμῶν γ μονάδων ιε. ἐπεὶ οὖν πάλιν ὁ μέγιστος καὶ ἐλάχιστος διπλάσιοί εἰσι τοῦ μέσου. ἀλλὰ ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος εἰσὶν ςς οἱ ια μονάδες ιε. ταῦτα διπλάσια εἰσὶ τοῦ μέσου. ὁ δὲ μέσος ἐστι ςς ε μο ιε. ςς οἱ ἄρα ι. μο λ. ἴσοι εἰσὶν ςς οἷς ια μονάσι ιε. ἔσται ἄρα ὁ ζητούμενος μο ιε. καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

quod si multiplicetur in reliquum, puta in 5. fit 5 N. + 15. Denique si 3. & 5. coniungantur, & qui conficitur 8. ducatur in 1 N. fiunt 8 N. Enimverò 3 N. + 15. non esse trium productorum maximum liquet, maior enim illo est 5 N. + 15. Ergo 3 N. + 15. aut minimus est, aut medius. At 5 N. + 15. aut maximus est, aut medius, Denique 8 N. & maximus, & medius, & minimus esse potest, eo quod ignotum sit quantum valeat 1 N. Ponatur ergo primò maximus 5 N. + 15. minimus 3 N. + 15. medius subinde 8 N. Iam si tres numeri æqualibus se superent interuallis, maximus & minimus coniuncti, duplum sunt medij. Maximus autem & minimus faciunt 8 N. + 30. Hoc ergo æquale est 16 N. & fit 1 N. $\frac{15}{4}$. Tantus est quæsitus, & satisfacit postulatis.

Iam verò sit maximus quidem 5 N. + 15. sed medius 3 N. + 15. minimus verò 8 N. Atqui si tres numeri æqualibus se superent interuallis, quanto maximus medium superat, tanto medius superat minimum. Sed excessus maximi supra medium est 2 N. Medij autem supra minimum excessus est 15 − 5 N. Igitur 15 − 5 N. æquantur 2 N. & fit 1 N. $\frac{15}{7}$. Tantus est quæsitus, & quæstioni satisfacit. Denique maximus esto 8 N. medius autem 5 N. + 15. minimus 3 N. + 15. Quandoquidem rursus maximus & minimus duplum medij conficiunt, sed maximus & minimus faciunt 11 N. + 15. hoc duplum est medij; medius autem est 5 N. + 15. Igitur 10 N. + 30. æquantur 11 N. + 15. Erit ergo quæsitus numerus 15. & implet postulata.

IN QVÆSTIONEM XXXXIII.

QVOD hîc assumit Diophantus. Si tres numeri fuerunt in arithmetica medietate, summa extremorum est æqualis duplo medij, demonstratum est propositione quinta libri primi porismatum.

Cæterùm ex triplici operatione, triplex Canon formari potest nimirum.

Diuide duplum producti multiplicationis datorum numerorum, per summam eorundem, orietur tertius quæsitus. vel.

Diuide productum multiplicationis per compositum ex maiore numero & interuallo numerorum, orietur tertius quæsitus. vel denique.

Diuide productum multiplicationis per id quo duplum minoris numeri excedit maiorem, orietur tertius quæsitus.

Ex hoc autem vltimo Canone manifestum est requiri vt duplum minoris numeri excedat maiorem. Nec tertia operatio Diophanti absque tali limitatione locum habere potest.

DIOPHANTI

DIOPHANTI ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBER SECVNDVS.

QVÆSTIO I.

INVENIRE duos numeros, vt summa ipsorum, ad summam quadratorum ab ipsis ortorum datam habeat rationem. Imperatum sit summam ipsorum summæ quadratorum ab ipsis ortorum esse decimam partem. Ponatur minor 1 N. maior autem 2 N. fit summa ipsorum 3 N. Summa verò quadratorum ab ipsis ortorum est 5 Q. Oportet igitur 3 N. esse decimam partem de 5 Q. Quare 30 N. sunt æquales 5 Q. & fit 1 N. 6. Est ergo minor 6. maior 12. & satisfaciunt quæstioni.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ σύνθεσις αὐτῶν πρὸς τὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν σύνθεσιν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν σύνθεσιν αὐτῶν τῆς τῶν ἀπ' αὐτῶν συνθέσεως εἶναι μέρος δέκατον. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς^ο ἑνός. ὁ δὲ μείζων ςς^ῶν β. γίνεται ἡ μὲν σύνθεσις αὐτῶν ςς^οὶ γ. ἡ δὲ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, δυνάμεις ε. δεήσει ἄρα ἀριθμοὺς γ. δέκατον μέρος εἶναι δυνάμεων ε. καὶ γίνεται ὁ ς^ος μο ς. ἔσται ἄρα ὁ μὲν ἐλάσσων μο ς. ὁ δὲ μείζων μο ιβ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

In II. Librum Diophanti Commentarij.

IAM animaduerterunt & Scholiastes & Xilander quatuor quæstiones initio libri huius expositas, cum quatuor priore libro traditis, in omnibus ferè conuenire, nimirum primam & secundam huius cum trigesima quarta & trigesima septima primi. At quartam & quintam huius cum trigesimaquinta & trigesima sexta illius. Nec in alio differunt hæ quæstiones ab illis, nisi quod istæ vniuersalius proponuntur, in illis verò numerorum quæsitorum ratio præscribitur, sed operandi modus idem est. Itaque vt quod sentio, liberè dicam, vix adducor vt credam hæc scripsisse Diophantum, & in re facili tam inani vsum esse repetitione. Iudicent alij.

QVÆSTIO II.

INVENIRE duos numeros, vt interuallum ipsorum, ad interuallum quadratorum ab ipsis ortorum datam habeat rationem. Constitutum sit interuallum ipsorum; interualli quadratorum ab ipsis, esse sextantem. Ponatur minor 1 N. maior autem 2 N. & fit interuallum ipsorum 1 N. At interuallum quadratorum ab ipsis ortorum est 3 Q. Oportet igitur 1 N. sextantem esse de 3 Q. Quamobrem 6 N.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν πρὸς τὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχὴν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τῆς τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχῆς εἶναι μέρος ἕκτον. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς^ου ἑνός, ὁ δὲ μείζων ςς^ῶν β. καὶ γίνεται ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν ἀριθμὸς εἷς, ἡ δὲ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχὴ δυνάμεις γ. δεήσει ἄρα ς^ὸν ἕνα ἕκτον μέρος εἶναι δυνάμεων γ. ςς^οὶ ἄρα ς ἴσοι δυνάμεσι τρισί. καὶ

γίνεται ὁ ς^ος μ° β. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μονάδων β. ὁ δὲ μείζων μ° δ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

æquantur 3 Q. & fit 1 N. 2. Est ergo minor 2. maior 4. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO III.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἵνα ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρὸς συναμφότερον ἢ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ πρότερον τὸν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τοῦ συναμφοτέρου εἶναι ἑξαπλασίονα· τετάχθωσαν οἱ ζητούμενοι, ς^ος εἷς, καὶ ς^οι β. δύναται γὰρ ἤτοι προβάλλεσθαι καὶ ἐν λόγῳ δοθέντι. ἔσται ἄρα ὁ μὲν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν δυνάμεις β. ὁ δὲ συναμφότερος ς^οι γ. δεήσει ἄρα δυνάμεις β ἑξαπλασίους εἶναι ςς^ῶν γ. ἀριθμοὶ ἄρα ιη ἴσοι εἰσὶ δυνάμεσι δυσί. καὶ γίνεται ὁ ς^ος μ° θ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ° θ. ὁ δὲ δεύτερος μ° ιη. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

Ἐὰν δὲ ἐπιταχθῇ τὸν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ὑπεροχῆς εἶναι ἑξαπλασίονα. ἔσται πάλιν ὁ μὲν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δυνάμεις β. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ἀριθμὸς εἷς, ἀριθμοὶ πάλιν ς. ἴσοι δυνάμεσι δυσί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° γ. ὁ δὲ δεύτερος μ° ς. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione ad summam vtriusque, vel ad interuallum ipsorum datam habeat rationem. Constitutum sit primò productum multiplicationis, summæ sesculplum esse. Ponantur quæsiti numeri 1 N. & 2 N. (Cæterùm possent etiam in qualibet data ratione poni.) Erit igitur productus ex eorum multiplicatione 2 Q. summa verò vtriusque 3 N. Oportet ergo 2 Q. sescuplos esse ad 3 N. Proinde 18. N. æquantur 2 Q. & fit 1 N. 9. Erit ergo primus 9. secundus 18. & soluunt quæstionem.

Quod si imperatum sit productum multiplicationis interualli esse sescuplum. Erit rursus productum multiplicationis 2 Q. At interuallum 1 N. Proinde rursus 6 N. æquabuntur 2. Q. & fiet 1 N. 3. Erit ergo primus 3. secundus 6. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM III.

HÆC quæstio cùm nulla primi libri conuenit, quicquid dicat Scholiastes, qui eam reuocat ad trigesimam & trigesimam tertiam. Sed quàm meritò, sola collatione fiet manifestum. Cæterùm sicut hîc Diophantus comparat productum ex multiplicatione duorum numerorum, cum eorum summa, & cum eorum interuallo, sic & idem productum comparari potest interuallo quadratorum, & summæ eorundem. vnde duæ huiusmodi formabuntur quæstiones.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros, vt summa quadratorum ad productum multiplicationis datam habeat rationem. Oportet autem vt à quadrato semissis denominatoris rationis, auferendo vnitatem supersit quadratus.

Esto summa quadratorum ad productum vt 5. ad 2. Ponatur alter numerorum 1 N. alter 1. erit summa quadratorum 1 Q. + 1. productum 1 N. Quare 1 Q. + 1. æquatur $\frac{5}{2}$. N. & fit 1 N. vel 2. vel $\frac{1}{2}$. Itaque duo quilibet numeri in ratione dupla satisfacient proposito. Hinc fit Canon.

A quadrato semissis denominatoris rationis datæ, aufer vnitatem, residui latus adde vel adime eidem semissi, orietur vtroque modo denominator rationis, in qua duo quilibet sumpti numeri soluunt quæstionem.

Ceterùm notatu dignum est summam quadratorum ad productum, eandem semper habere rationem, quam habet ad vnitatem summa quotientum qui fiunt ex mutua laterum diuisione. Quod etiam sic ostendetur.

A 2. B, 6.
C $\frac{1}{3}$. D 3.
3. 1. porism. E 4. F 36.
G 12.

Sint latera A B. quorum quadrati E F, productum G. & diuiso A & B. fit quotiens C. diuisoque B per A fit quotiens D. Dico ambos E F. simul ad G. esse sicut ambos C D simul ad vnitatem. Etenim quia ducto D in A. & producto B in B fit F, [a] idem F. fiet ducto A in B, & producto G in D. Eodem argumento ostendemus E fieri ex G in C. Cùm ergo G ductus in singulos C D producat singulos E F. patet ex summa ipsorum C D. in G fieri summam ipsorum E F. Quare ex definitione multiplicationis est summa ipsorum E F. ad G. sicut summa ipsorum C D. ad vnitatem. Quod demonstrandum erat.

QVAESTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros, vt interuallum quadratorum ad productum multiplicationis datam habeat rationem. Oportet autem vt quadrato semissis denominatoris rationis datæ addendo vnitatem, fiat quadratus.

Esto interuallum quadratorum ad productum, vt 8. ad 3. Ponatur alter Numerorum 1 N. alter 1. erit interuallum quadratorum 1 Q. — 1. At productum 1 N. Quare 1 Q. æquabitur 1 + $\frac{8}{3}$ N. & fiet 1 N. 3. vel si 1 N. supponatur minor quàm 1. erit interuallum quadratorum 1 — 1 Q. Quare 1. æquabitur 1 Q. + $\frac{8}{3}$ N. & fiet 1 N. $\frac{1}{3}$ Quare manifestum est quoslibet numeros in proportione tripla soluere quæstionem, hinc fiet Canon.

Quadrato semissis denominatoris ratione data adde vnitatem, lateri summa adde vel adime eundem semissem, vtroque modo innotescet denominator rationis, in qua duo quilibet numeri sumpti satisfacient proposito.

Hic etiam accidit interuallum quadratorum ad productum multiplicationis eandem habere rationem, quam habet ad vnitatem interuallum quotientum qui fiunt ex mutua laterum diuisione. Quod ex demonstratis in præcedente, manifestè colligitur.

QVÆSTIO IV.

INVENIRE duos numeros vt compositus ex quadratis ipsorum ad ipsorum numerorum interuallum, datam habeat rationem. Constitutum esto compositum ex quadratis ipsorum interualli esse decuplum. Ponatur rursus primus 1 N. secundus 2 N. erit igitur compositus ex quadratis ipsorum 5 Q. interuallum autem ipsorum est 1 N. Oportet ergo 5 Q. decuplos esse ad 1 N. Proinde 5. Q. æquantur 10. N. & fit 1 N. 2. erit ergo primus 2. secundus 4. & satisfaciunt quæstioni.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς εἶναι δεκαπλασίονα. τετάχθω πάλιν πρῶτος μὲν ς$^{\overline{\alpha}}$ ἑνὸς, ὁ δὲ δεύτερος, ςς$^{\overline{oi}}$ β̄. ἔσται ἄρα ὁ μὲν συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων δυνάμεις ε̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτῶν ς^{o} εἷς. δεήσει ἄρα δυνάμεις ε̄ δεκαπλασίονας εἶναι ς$^{\overline{\alpha}}$ ἑνός. δυνάμεις ἄρα ε̄ ἴσαι ἀριθμοῖς ῑ. καὶ γίνεται ὁ ς^{o} μ^{o} β̄. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ$^{\overline{o}}$ β̄. ὁ δὲ δεύτερος μ^{o} δ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

QVÆSTIO V.

INVENIRE duos numeros, vt interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, ad summam ipsorum numerorum, datam habeat rationem. Imperetur vt interuallum quadratorum, summæ numerorum sit sescuplum. Ponantur rursus quæsiti numeri, hic quidem 1 N. ille vero 2 N. & fit interuallum quadratorum ab ipsis ortorum 3. Q. summa verò numerorum 3 N. Proinde 3 Q. æquantur 18. N. & fit 1 N. 6. & euidens est demonstratio.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι ἑξαπλασίονα. καὶ πάλιν τετάχθωσαν οἱ ζητούμενοι, ὃς μὲν ς$^{\overline{\alpha}}$ ἑνὸς ὃς δὲ ςς$^{\overline{oi}}$ β̄. καὶ γίνεται ἡ μὲν ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων δυνάμεις γ̄. συναμφότερος δὲ ςς^{oi} γ̄. δεήσει ἄρα δυνάμεις γ̄. ἑξαπλασίονας εἶναι ςς$^{\overline{\omega\nu}}$ γ̄. δυνάμεις ἄρα τρεῖς ἴσαι εἰσὶ ἀριθμοῖς ιη̄. καὶ γίνεται ὁ ς^{o} μ^{o} ς̄. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

QVÆSTIO VI.

INVENIRE duos numeros, dato eorum interuallo, vt interuallum qua-

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπεροχῇ δοθείσῃ, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν

τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ὑπερέχῃ δοθέντι ἀριθμῷ. δεῖ τὸν ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τετράγωνον ἐλάσσονα εἶναι συναμφοτέρου αὐτοῦ τε τοῦ τῆς ὑπεροχῆς, καὶ τοῦ διδομένου τῆς ἀπ' αὐτῶν πρὸς τὴν αὐτῶν ὑπεροχήν. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι μονάδων β. τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ὑπερέχειν μονάδας κ. τετάχθω δὴ ὁ ἐλάσσων ςοῦ ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ςοῦ ἑνός μο β. καὶ μένει ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν μονάδες β. ἡ δὲ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχὴ ςςοὶ δ μο δ. δεήσει ἄρα ἀριθμοὺς δ μο δ. ὑπερέχειν μονάδων β μονάσιν κ. ὥστε ἀριθμοὶ δ μονάδες δ ἴσοι εἰσὶ μονάσιν κβ. καὶ γίνεται ὁ ςος μο δ καὶ ἥμισυ. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μο δ καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ μείζων ς καὶ ἥμισυ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

dratorum ab ipsis ortorum, interuallum ipsorum superet dato numero. Oportet autem quadratum interualli numerorum minorem esse composito tum ex ipsomet interuallo, tum ex dato numero quo quadratorum interuallum superat ipsum numerorum interuallum. Imperetur vt interuallum numerorum sit 2. Interuallum autem quadratorum superet interuallum numerorum vnitatibus 20. Ponatur minor 1 N. Maior igitur erit 1 N. + 2. & manet interuallum ipsorum 2. interuallum autem quadratorum est 4 N. + 4. Oportet igitur 4 N. + 4. superare vnitates 2. vnitatibus 20. Quamobrem 4 N. + 4. æquantur 22. & fit 1 N. 4 $\frac{1}{2}$. Erit igitur minor 4 $\frac{1}{2}$. maior 6 $\frac{1}{2}$. & soluunt quæstionem.

IN QVAESTIONEM VI.

HÆC quæstio verbis paulum immutatis eadem est cum tertia illarum, quas ad trigesimam tertiam primi sumus commenti. Nam verbi gratia quærere duos numeros quorum interuallum sit 2. & interuallum quadratorum superet ipsum 2. numero 20. nil aliud est quàm velle vt interuallum numerorum sit 2. interuallum verò quadratorum 22. Itaque conditio ibi apposita eadem est cum illa quam hîc præscribit Diophantus, nimirum. *Quadratus interualli numerorum debet esse minor interuallo quadratorum*, cuius Theorematis si quis peculiarem requirat demonstrationem, eam afferre non pigebit. Sint dati numeri A B. B C. quorum interuallum A D. ita vt D B. B C. sint æquales. Dico quadratum ipsius A D minorem esse interuallo quadratorum ab ipsis A B. B C. etenim

A . . D . . . B . . . C

4. secundi. [1] Quadratus A B est æqualis quadratis partium A D. D B. & duplo plani sub ipsis. Igitur interuallum quo quadratus ab A B superat quadratum abs D B seu abs B C est æquale quadrato ipsius A D. & duplo producti ex A D. in D B. Quare interuallum quadratorum superat quadratum interualli numerorum, duplo producti ex minore numero in ipsum interuallum numerorum. Quod erat propositum. Sic contra si interuallo quadratorum addatur quadratus interualli numerorum, fiet duplum producti ex maiore numero in idem interuallum numerorum. Nam si quadrato ipsius A D. & duplo producti ex A D in D B. addatur rursus quadratus ipsius A D. erit totum compositum æquale duplo quadrati ex A D, & duplo producti ex A D in D B, hoc est duplo producti ex A B. maiore numero in A D interuallum numerorum. Quod erat propositum. Quamuis itaque Canones allati ad tertiam illarum quas attulimus ad trigesimam tertiam primi, sint faciles & expediti, ex hoc tamen Theoremate alium colligemus Canonem, sane non inelegantem.

Interuallo quadratorum adde vel adime quadratum interualli numerorum, summam & residuum diuide per interuallum numerorum, quotientes erunt dupli quæsitorum numerorum.

QVÆSTIO VII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν δοθέντι ἀριθμῷ μείζων ᾖ καὶ ἐν λόγῳ δοθέντι. τετάχθω τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι τριπλασίονα, καὶ ἔτι ὑπερέχειν μονάδας ι. δεῖ δὴ τὸν ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τετράγωνον ἐλάσσονα εἶναι συναμφοτέρου τοῦ τε τριπλασίονος τῆς ὑπεροχῆς, καὶ τῶν δοθεισῶν μονάδων ι. τετάχθω ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν μονάδες β. ὁ δὲ ἐλάσσων

INVENIRE duos numeros, vt interuallum quadratorum ab ipsis, dato numero superet interuallum numerorum, & sic ad illum in data ratione. Constitutum sit interuallum quadratorum, interualli numerorum esse triplum, & superaddere adhuc vnitates 10. Oportet autem quadratum interualli numerorum, minorem esse composito ex triplo sui ipsius, & ex datis vnitatibus 10. Ponatur

interuallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adscitis vnitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quæstioni.

ϛ^{ου} ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ϛ^{ου} ἑνὸς μ^{ο} β. δεήσει ἄρα ἀριθμοὺς δ μονάδας δ τριπλασίονας εἶναι μ^{ο} β. καὶ ἔτι ὑπερέχειν μ^{ο} ι. τρὶς ἄρα μονάδες β μετὰ μ^{ο} ι. ἴσαι εἰσὶν ϛϛ^{οις} δ μονάσι δ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^{ο} γ. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ^{ο} γ. ὁ δὲ μείζων μ^{ο} ε. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM VII.

CONDITIONIS appositæ eadem ratio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quàm vt quadratus interualli numerorum sit minor interuallo quadratorum, & Canones iidem hîc etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$ & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ιϛ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος δυνάμεως μιᾶς. δεήσει ἄρα μονάδας ιϛ λείψει δυνάμεως μιᾶς ἴσας εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ϛϛ. ὅσων δή ποτε λείψει τοσούτων μ^{ο} ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ ιϛ μ^{ο} πλευρά. ἔστω ϛϛ β λείψει μ^{ο} δ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεων δ μ^{ο} ιϛ λείψει ϛϛ ιϛ. ταῦτα ἴσα μονάσι ιϛ λείψει δυνάμεως μιᾶς. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. δυνάμεις ἄρα ε ἴσαι ἀριθμοῖς ιϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιϛ πέμπτων. ἔσται ὁ μὲν σνϛ εἰκοστοπέμπτων. ὁ δὲ ρμδ εἰκοστοπέμπτων, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι υ εἰκοστόπεμπτα, ἤτοι μονάδας ιϛ. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

CVbum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ erit

ΕΣΤΩ δὴ πάλιν τὸν ιϛ τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. τετάχθω πάλιν ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ ϛ^{ου} ἑνός, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ϛϛ ὅσων δήποτε λείψει μ^{ο} ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ διαιρουμένου πλευρά. ἔστω δὴ ϛϛ β λείψει μ^{ο} δ. ἔσονται οἱ τετράγωνοι ὃς μὲν δυνάμεως μιᾶς, ὃς δὲ δυνάμεων δ μ^{ο} ιϛ λείψει ϛϛ ιϛ. βούλομαι τοὺς δύο λοιπὸν συντεθέντας ἴσους εἶναι μ^{ο} ιϛ. δυνάμεις ἄρα ε μ^{ο} ιϛ λείψει ϛϛ ιϛ ἴσαι μ^{ο} ιϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιϛ πέμπτων.

ἔσαι ἡ μὲν τοῦ πρώτου πλευρὰ ις πέμπτων. αὐτὸς ἄρα σνϛ εἰκοσοπέμπτων. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου πλευρὰ ιβ πέμπτων. αὐτὸς ἄρα ἔσαι ρμδ κε. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

ergo primi latus $\frac{16}{5}$ Atque ipſe quadratus $\frac{256}{25}$. ſecundi latus verò erit $\frac{12}{5}$. Atque ipſe quadratus $\frac{144}{25}$. & manifeſta eſt demonſtratio.

IN QVAESTIONEM VIII. & IX.

PARVM aut nil differunt hæ duæ quæſtiones, cùm idem quærant, & eodem prorſus operandi modo. Quare vnica indigent explicatione. Operatio eſt ſubtilis & Diophanti propria, qua in ſequentibus pulcherrima & difficillima perficit problemata, & ab alio ante ipſum nunquam excogitata. Proinde tyronibus hîc omni ope laborandum eſt, vt methodum iſtam fingendorum laterum perfectè comprehendant, illique aſſueſcant. Cùm igitur Diophantus æquare velit quadrato 16 − 1 Q. id tali artificio peragit vt æquatione ritè præparata, tandem inter duas ſpecies proximas æqualitas conſiſtat, ſic enim cùm nulla opus ſit radicis extractione, ſed ſola diuiſione inueniatur valor Numeri, patet ſolutionem contingere rationalem. Et hoc vnum voluiſſe Diophantum præter quàm quod res ipſa clamat, ipſemet diſertis verbis teſtatur quæſtione vndecima infra, vbi cùm de fingendo latere quadrati præceptum dediſſet, ſubiicit, *Sic enim vna ſpecie vni ſpeciei æquali remanente, expedietur quæſtio.* Quod rurſus iiſdem ferè verbis repetit quæſtione duodecima & decima tertia. Hic itaque vt æquatio ritè procedat, tria ſunt obſeruanda.

Primò vt in latere fictitij quadrati ponatur vnitatum numerus æqualis lateri quadrati diuidendi in duos quadratos, ita Diophantus fingit hoc latus 2 N. − 4. Quod fit ideirco, quia ſic neceſſe eſt in quadrato fictitio reperiri vnitates æquales ipſi quadrato diuidendo, nimirum 16. cùm lex multiplicationis requirat vt ex − 4. in − 4. fiant 16. Quare cùm idem vnitatum numerus ſit etiam in altera æquationis parte, puta in 16 − Q. euidens eſt auferendo ſimilia à ſimilibus, vnitates omnino tolli ab vtraque parte, & æqualitatem conſiſtere inter proximas duas ſpecies, Quadratos ſcilicet & Numeros.

Secundò neceſſe eſt vt vnitates quæ ponuntur in fictitio latere, adiunctum habeant ſignum defectus, ſic Diophantus ponit huiuſmodi latus 2 N. − 4. & ratio eſt quia ſi poneretur 2 N. + 4. nulla quadrati pars adiunctum haberet ſignum defectus, eſſet enim quadratus 4 Q. + 16 N. + 16. Quare cùm in altera æquationis parte ſint vnitates cum defectu quadratorum, nempe 16 − 1 Q. ablatis vtrimque vnitatibus 16. vt ſupra dictum eſt, & addendo defectum vtrinque, nempe 1 Q. remanerent 5 Q. + 16. N. æquales nihilo. Vt igitur Numeri deficiant neceſſe fuit ponere latus quadrati cum defectu vnitatum, puta 2 N. − 4. ſic enim fit quadratus 4 Q. − 16 N. + 16. Quare ablatis vtrimque vnitatibus 16. & addendo vtrimque 1 Q. tum 16 N. remanent hinc 5. Q. inde 16. N. inter ſe æquales. Denique multitudo Numerorum qui ponuntur in latere fictitio, debet eſſe maior vel minor vnitate. Nam ſi ponatur vnitas, orietur valor Numeri æqualis lateri ipſius quadrati diuidendi, & reſoluendo hypoſtaſes, ipſum latus fictitium, reperietur nihil. Ita ſi ponas in exemplo Diophanti, latus fictitium 1 N. − 4. fiet quadratus 1 Q − 8 N. + 16 æquandus 16 − 1 Q. Quare auferendo ſimilia à ſimilibus, & ſupplendo defectus, remanent 2 Q. æquales 8 N. & fit 1 N. 4. Quare latus quod poſitum erat 1 N. − 4. erit 4 − 4. ſeu nihilum. Cur autem id contingat, ratio eſt euidens. Nam numerus quadratorum qui in æquatione remanet, ſemper æqualis eſt quadrato Numerorum qui ponuntur in latere ficto, adſcita vnitate, quare cùm in latere ficto ponetur 1 N. numerus quadratorum qui manent in æquatione, erit 2. Q. At multitudo Numerorum cui æquantur 2 Q. eſt duplum lateris quadrati diuidendi, quia ſcilicet fit ex ductu 1 N. in dictum latus bis. Verbi gratia in dato exemplo 2 Q. æquantur 8 N. Quare cùm duplum lateris, puta 8. diuidetur per 2. neceſſe erit oriri ipſum latus 4 pro valore Numeri. Quod erat propoſitum.

His ſanè probè intellectis totum Diophanti artificium percipietur. Sed abundantioris doctrinæ gratia libet aduertere, eandem ſolutionem contingere, quamuis dupliciter inſtituatur poſitio ſecundi lateris, nimirum, ſiue ponatur in eo quælibet multitudo Numerorum maior ea quæ poſita eſt in primo latere, ſiue alia minor, ita tamen vt inter harum vtramque, illa ſit media proportionalis. Verbi gratia in exemplo Diophanti, ſiue ponas latus fictitium 2 N. − 4. ſiue $\frac{1}{2}$ N. − 4. eadem continget ſolutio, fiet enim vtrobique 1 N. $\frac{16}{5}$ Quia ſcilicet 1 N. eſt medius proportionalis inter 2 N. & $\frac{1}{2}$ N. & ſic de aliis. Cuius ſymptomatis cauſa pendet ab huiuſmodi Theoremate.

Si fuerint tres numeri proportionales, vt ſe habet aggregatum quadratorum à duobus primis ad primum, ita & aggregatum quadratorum à duobus poſtremis ad poſtremum.

D 16. E 36. G. 81.
A 4. B 6. C 9.

Sint tres proportionales A. B. C. quorum quadrati D E G. Dico eſſe D E ſimul ad A, ſicut E G ſimul ad C.
11 octaui. Quia enim D ad E eſt in duplicata ratione lateris A. ad latus B sed & A ad C eſt duplicata ratio rationis A ad B, erit D ad
10. defin. 5. E ſicut A ad C. eodem argumento oſtendetur eſſe E ad G vt A ad C. Quare eſt D ad E vt E ad G.
13. ſeptimi. & conuertendo G ad E vt E ad D. Quia verò eſt D ad E vt A ad C eſt & viciſſim D ad A vt E

C. Itaque cùm sit E ad D vt G. ad E erunt componendo D E simul ad D, sicut E G simul ad E, sed vt D ad A, sic E ad C. vt ostensum est iam. [a] Igitur ex æquo vt D E simul ad A, sic E G simul ad C. Quod erat propositum. 14. septimi.

Hoc posito esto B numerus Numerorum primi lateris, medius proportionalis inter A & C. dico siue A ponatur numerus Numerorum secundi lateris, siue C. eandem contingere solutionem. Sit enim D latus quadrati diuidendi in duos quadratos. Igitur A − D erit secundum latus, [b] cuius quadratus constabit ex quadratis ipsorum A & D. minus duplo producti ex A in D. cui addendo quadratum ex B. totum compositum æquabitur quadrato diuidendo abs D. Quare auferendo vtrimque quadratum abs D, & transferendo defectum in alteram æquationis partem, manent quadrati ex A & B simul æquales duplo producti ex A in D. vnde fit valor Numeri diuidendo duplum producti ex A in D per aggregatum quadratorum ab, A & B. similiter ostendemus si secundum latus statuatur C − D valorem Numeri haberi diuidendo duplum producti ex C in D per aggregatum quadratorum abs B & C. Cùm ergo per præcedens Theorema fit vt aggregatum quadratorum abs A & B ad A. ita aggregatum quadratorum abs B & C ad C. ac proinde per eundem duplum ipsius D multiplicando consequentes, [c] fit vt aggregatum quadratorum abs A & B ad duplum producti ex A in D. ita aggregatum quadratorum abs B & C ad duplum producti ex C in D. patet diuiso seorsim duplo producti ex A in D per aggregatum quadratorum abs A & B, & duplo producti ex B in C per aggregatum quadratorum abs B & C. fieri ob æqualitatem proportionis, eundem quotientem vtrobique, atque ideo eundem vtrobique reperiri valorem Numeri. Quod demonstrandum erat.

4. secundi.

Schol. 11. 5.

A $\frac{1}{2}$ N − D 4. B 1 N. C 2 N − D 4.

Aduertendum præterea primi quadrati latus poni posse quemlibet Numerorum numerum, dum in secundi latere ponatur maior vel minor Numerorum numerus, verbi gratia ponatur primi latus 3 N. erit quadratus 9 Q. Igitur secundus quadratus erit 16 − 9 Q. cuius latus fingatur 2 N. − 4. fiet quadratus 4 Q. − 16 N. + 16, æqualis 16 − 9 Q. & tandem 13 Q. æquabuntur 16 N. & fiet 1 N. $\frac{16}{13}$ erit igitur primum latus $\frac{48}{13}$ secundum $\frac{20}{13}$ quorum quadrati $\frac{2304}{169}$ & $\frac{400}{169}$ quorum summa $\frac{2704}{169}$ seu 16. vbi accidit (quod animaduersione dignum est) resoluendo hypostasim secundi lateris illud reperiri non 2 N. − 4. sed 4 − 2 N. Manet tamen eadem æquatio, & res æquè bene succedit, quia quadratus 4 Q. − 16 N. + 16. cum quo æqualitas instituitur, habere potest duplex latus, nimirum 2 N. − 4. vel 4 − 2 N. nec interest à quo illorum effingi concipiatur. Quod semel monuisse sufficiat, ne cui scrupulum moueat quotiescunque deinceps simile quid continget. Sanè Franciscus Vieta in tali casu defectum sub ambiguitate relinquens tali nota vteretur ad eum significandum 2 N. − 4. Indicans scilicet ob indeterminationem Numeri qui talis esse potest vt 2 N. nunc maiores sint quàm 4. nunc minores, latus illud poni vel 2 N − 4. vel 4 − 2 N. prout valor Numeri commodius positionibus applicari poterit.

Cæterùm ex operatione Diophanti nullo negotio Canon erui potest. Sed omnium facillimus ad huiusmodi quæstiones soluendas, elicitur ex propositione tertia libri tertii porismatum. nimirum. Canon.

Dati quadrati latus diuide in duos numeros planos similes, horum interuallum, & duplum medij proportionalis inter eos cadentis, latera exhibent quæsitorum quadratorum.

Vt si datus sit quadratus 16. diuide latus eius 4. in planos duos similes, habentes scilicet rationem quam 4 ad 1. quod fiet per Canonem secundæ primi, eruntque $\frac{4}{5}$ & $\frac{16}{5}$ quorum interuallum $\frac{12}{5}$ Quare latera quæsitorum quadratorum sunt $\frac{12}{5}$ & $\frac{16}{5}$. Si autem 4. diuidatur rursus in alios duos planos similes seruantes aliam proportionem, alia reperietur solutio, vt si diuidatur in duas partes seruantes rationem quam habent 4. ad 9. erunt hæ $\frac{16}{13}$ & $\frac{36}{13}$ quarum interuallum, & duplum medij proportionalis sunt $\frac{20}{13}$ & $\frac{48}{13}$ latera scilicet quæsitorum quadratorum. Attamen, ne quid tyrones fallat, aduertendum est fieri posse, vt idem numerus bis diuidatur in duos planos similes, nec tamen per geminam illam diuisionem quadratus illius bis componatur ex duobus quadratis. Quod accidit quotiescunque partium prioris diuisionis interuallum æquatur duplo medij proportionalis cadentis inter partes posterioris diuisionis, & è conuerso. Vnde necesse est per vtranque diuisionem eadem quadratorum latera reperiri, non autem diuersa. Verbi gratia, si idem 4. diuidatur in planos similes $\frac{2}{5}$ & $\frac{18}{5}$ quorum ratio est quæ 1 ad 9. sunt hi diuersi à iam expositis $\frac{4}{5}$ & $\frac{16}{5}$. Attamen quia eorum interuallum $\frac{16}{5}$ idem est cum duplo medij qui cadit inter $\frac{4}{5}$ & $\frac{16}{5}$. & è conuerso interuallum ipsorum $\frac{4}{5}$ & $\frac{16}{5}$ idem est cum duplo medij qui cadit inter $\frac{2}{5}$ & $\frac{18}{5}$ nimirum $\frac{12}{5}$ patet per vtramque diuisionem eadem reperiri latera $\frac{12}{5}$ & $\frac{16}{5}$. Vt autem hæc ex altiori principio repetantur, id huiusmodi planis similibus accidit, quia illi sunt in ratione quadratorum 1 & 9. isti verò in ratione quadratorum 1. & 4. at priorum latera æquantur summæ laterum posteriorum & eorum interuallo, etenim posteriorum latera sunt 1. & 2. quorum summa & interuallum, nimirum 3. & 1. conficiunt latera priorum. Hanc porrò esse veram symptomatis huius causam more nostro libet demonstrare.

Sunto quadrati A C. quorum latera G H. itemque quadrati D F quorum latera K L, ita vt ipsorum K L summa sit æqualis ipsi G, & eorumdem K L interuallum sit æquale ipsi H. Tunc ducatur

idem numerus M in ipſos A C, vt fiant plani ſimiles Q S. itemque ducatur idem N. in ipſos D F. vt fiant plani ſimiles T X. ita tamen vt amborum Q. S. ſumma ſit æqualis ſummæ amborum T. X. & ipſorum Q. S. medius proportionalis eſto R, interuallum verò Y. Ipſorum quoque T X medius proportionalis eſto V, interuallum Z. dico tam Z ipſius R. quàm viciſſim Y ipſius V duplum eſſe. Sumantur enim & ipſorum A C. & D F medij proportionales B E, & eorumdem interualla O P. [1] Quoniam igitur quadratorum D F interuallum P fit ex ſumma laterum K L in eorundem interuallum, fiet P ex G in H ex hypotheſi, at [2] ex G in H fit etiam B. igitur B P. ſunt æquales. [3] At verò quadrati A C, ſimul quadratorum D F. ſimul dupli ſunt, & ex M in ipſos A C fiunt Q S. ex N autem in ipſos D F fiunt T X, cùm ergo ſumma duorum Q S. ſit æqualis ſummæ amborum T X. patet ex M in ſummam ipſorum A C fieri eundem numerum qui fit ex N. in ſummam ipſorum D F. Igitur [4] eſt vt ſumma ipſorum A C ad ſummam ipſorum D F, ita N. ad M. Quare & N. duplus eſt ipſius M. Rurſus cum ex M in ipſos A C. fiant Q S. patet etiam ex M. in ipſos B. O. fieri R Y, ſimiliterque ex N in ipſos E P. fieri V. Z. Quoniam itaque ex N in P fit Z, & ex M in B fit R. & B. P. oſtenſi ſunt æquales, patet ex eodem numero in ipſos N M. fieri ipſos Z R. [5] Quamobrem eſt Z ad R ſicut N ad M. ac proinde Z eſt duplus ipſius R. Quod erat oſtendendum.

	M 5.	O 8.			Y 40.	
G 3. H 1.	A 9.	B 3.	C 1.	Q 45.	R 15.	S 5.
K 2. L 1.	D 4.	E 2.	F 1.	T 40.	V 20.	X 10.
	N 10.	P 3.			Z 30.	

Deinde cum ſumma ipſorum G H conſtet ex ſumma ipſorum K L & eorum interuallo, [6] erit ſumma ipſorum G H dupla ipſius K. & quia interuallum eorundem G H fit ex ſumma ipſorum K L multata eorundem interuallo. [7] erit interuallum ipſorum G H duplum ipſius L. Quare productus ex ſumma ipſorum G H in eorundem interuallum, [8] nimirum O æquabitur producto ex duplo K in duplum L, ſeu quadruplo producti ex K in L. Igitur O quadruplus eſt ipſius E. Proinde productus ex N in O quadruplus erit producti ex N in E ſeu ipſius V. ſed quia N eſt duplus ipſius M. idem productus ex N in O duplus eſt producti ex M in O ſeu ipſius Y. Igitur Y. duplus eſt ipſius V. Quod demonſtrandum erat. Itaque ex omni parte conſtat propoſitum.

Hinc euidens eſt cur etiam cum Diophanto poſitionibus diuerſimodè inſtitutis, eadem tamen nonnunquam ſolutio contingat, ſi enim primò ſtatuantur numeri Numerorum vtriuſque lateris quales ſunt K L. & ſecundò ſtatuantur iidem numeri Numerorum quales ſunt G H. eadem per vtramque poſitionem inuenietur ſolutio. Nam ſi ponas cum Diophanto latus vnum 1 N, aliud verò 2 N − 4. fiunt latera quæſitorum quadratorum $\frac{16}{5}$ & $\frac{12}{5}$ ſi autem rurſus ponas latum vnum 1 N. aliud verò 3 N − 4. fient rurſus eadem quadratorum latera $\frac{16}{5}$ & $\frac{12}{5}$ Eadem de cauſa ſi prima vice ponas numeros Numerorum 2. & 3. ſecunda vice 1 & 5. non contingit ſolutio diuerſa, quia ſcilicet ipſorum 2 & 3. ſumma & interuallum conficiunt ipſos 5 & 1. & ſic de aliis. Denique ex dictis melius & vniuerſalius quàm modo à Xilandro tradito, licebit cognoſcere an propoſitus quadratus componatur ex duobus quadratis integris, immò & quoties in duos integros quadratos diuidi poſſit, reſpiciendo ſcilicet an latus eius è duobus planis ſimilibus integris componatur, & quoties ex planis ſimilibus integris & diuerſis componatur, adhibita tamen cautione ne duorum ex iis planis ſimilibus interuallum æquale ſit duplo medij proportionalis inter alios duos cadentis. Hac arte inuenies quadratum lateris 65. quater componi ex duobus quadratis integris, quia ſcilicet ipſe 65. quater componitur è duobus planis ſimilibus integris, nimirum ex 1 & 64. & 13. & 52. ex 16. & 49. & denique ex 20. & 45. Itaque per Canonem ſuprà traditum inuenies latera quadratorum, ex quibus quadratus ipſius 65 componitur, videlicet 63. & 16. vel 39. & 52. vel 33. & 56. vel demum 25. & 60. Sed de his ſatis.

[Margin: 1) 3. 2. poriſm. 2) 11. octaui. 3) 7. 2. poriſm. 4) 19. ſeptimi. 5) 17. ſeptimi. 6) 23. 1. poriſ. 7) 23. 1. poriſ. 8) 3. 2. poriſm.]

QVÆSTIO X.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν ὃς σύγκειται ἐκ δύο τετραγώνων, μεταδιελεῖν εἰς δύο ἑτέρους τετραγώνους. ἔστω τὸν ιγ συγκείμενον ἔκ τε τοῦ δ. καὶ θ τετραγώνων. μεταδιελεῖν εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους. εἰλήφθωσαν τῶν προειρημένων τετραγώνων αἱ πλευραὶ μονάδες β μονάδες γ. καὶ τετάχθωσαν αἱ τῶν ἐπιζητουμένων τετραγώνων πλευραί, ἡ μὲν ςου ἑνὸς μο β. ἡ δὲ ςς ὅσων δήποτε, λείψει μονάδων ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ λοιποῦ πλευρὰ γ. ἔστω ςς β λείψει μο γ. καὶ γίνονται οἱ τετράγωνοι. ὃς μὲν δυνάμεως μιᾶς ςς δ. μο δ. ὃς δὲ δυνάμεων δ μο, θ. λοιπόν ἐστι τοὺς δύο συντεθέντας ποιεῖν μο-

DATVM numerum qui ex duobus componitur quadratis, in alios quadratos partiri. Numerum 13. compoſitum ex quadratis 4. & 9. diuidere oporteat in alios duos quadratos. Sumantur latera prædictorum quadratorum 2. & 3. & ponantur quæſitorum quadratorum latera: hoc quidem 1 N. + 2. Illud verò numerorum quotcunque, cum defectu tot vnitatum quot continet latus alterius quadrati, puta 3. & eſto 2 N. − 3. & fiunt quadrati, ille quidem 1 Q. + 4 N. + 4. Hic verò 4 Q. + 9. − 12 N.

Reſtat

Restat vt ambo simul iuncti conficiant vnitates 13. sed ambo simul iuncti faciunt 5 Q. + 13. — 8 N. Hoc ergo æquatur 13. & fit 1 N. $\frac{8}{5}$. Ad Positiones. Posueram priori latus 1 N. + 2. erit ergo $\frac{18}{5}$. statueram autem posterioris latus 2 N. — 3. erit vtique $\frac{1}{5}$. Ipsi ergo quadrati erunt, ille quidem $\frac{324}{25}$. Hinc autem $\frac{1}{25}$. Et ambo simul faciunt $\frac{325}{25}$ seu imperatas vnitates 13.

νάδας ιγ̄. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι δυνάμεις ε̄ μονάδας ιγ̄ λείψει ἀριθμῶν η̄· ταῦτα ἴσα μονάσι ιγ̄. καὶ γίνεται ὁ ς° η̄ ε̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὴν τοῦ πρώτου πλευρὰν ς° ἑνὸς μ° β̄. ἔσται ιη̄ ε̄. τὴν δὲ τοῦ δευτέρου πλευρὰν ςς̄ β̄ λείψει μ° γ̄· ἔσται ἑνὸς πέμπτου, αὐτοὶ δὲ οἱ τετράγωνοι ἔσονται. ὃς μὲν τκδ̄ κε̄. ὃς δὲ ἑνὸς εἰκοστοπέμπτου, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι τκε̄ κε̄, ἃ συνάγει τὰς ἐπιταχθείσας μονάδας δεκατρεῖς.

OBSERVATIO D. P. F.

Nvm verò numerum ex duobus cubis compositum diuidere poterimus in alios duos cubos? Hæc quæstio difficilis sane nec Bacheto aut Vietæ cognita fortasse nec ipsi Diophanto; eius tamen solutionem dedimus infra in notatis ad quæstionem secundam lib. 4.

IN QVAESTIONEM X.

PVLCHERRIMVM est hoc problema, & eiusdem naturæ cum præcedente, cuius magnus est vsus in sequentibus, præsertim libro quinto. Sed circa operationem Diophanti multa sunt obseruanda, quæ Scholiastes & Xilander, vel non viderunt omnino, vel imperfectè tractarunt.

Primò obseruandum ne in vtroque latere fictitio idem statuatur Numerorum numerus, alioquin non inuenientur diuersa quadratorum quæsitorum latera à datis iam lateribus, sed eadem prorsus, & inutilis erit operatio. Ita in exemplo Diophanti si ponas fictitia latera 1 N. — 2. & 1 N. — 3. vel rursus 1 N. + 2. & 1 N. — 3. inuenies per vtramque positionem eadem latera 2. & 3. quæ iam data sunt, & nihil actum erit. Quod vt sua demonstratione fulciatur sunto B C. latera data quadratorum, quorum summa K. & ponatur A certus Numerorum numerus in vtroque latere fictitio, ita vt alterum sit A — B, alterum A — C. duplum autem quadrati abs A esto D. & duplum producti ex K in A esto E. patet diuiso E per D. oriri valorem Numeri. Nam ducere B in A, & C in A idem est atque ducere summam ipsorum B C. nempe K in A. Quare duplum productum ex B in A, & ex C in A, æquatur duplo producti ex K in A, puta ipsi E. Quamobrem E est numerus Numerorum qui reperiuntur in aggregato quadratorum à fictitiis lateribus A — B & A — C. Atqui D est numerus Quadratorum qui sunt in eodem aggregato. Proinde diuiso E per D fit valor Numeri. Itaque quia duplum A in ipsum A ductum facit D, & duplum A in K facit E, erit D ad E sicut A ad K. Quare diuiso K per A prodibit idem valor Numeri qui ostensus est prodire diuiso E per D. Proinde cùm resoluendo hypostases, ducetur valor Numeri in A, fiet K, à quo auferendo B restabit vtique C, & auferendo C, restabit B. Igitur latus A — B idem erit quod ipse C, & latus A — C idem erit quod B. Quod erat demonstrandum.

K 5.
A 6 N. — B 2. A 6 N. — C 3.
D 72 Q. E 60 N.

Deinde ponatur vnum latus A + B. alterum A — C. & sit K interuallum ipsorum B C sit autem D vt prius duplum quadrati A. sed E. sit duplum producti ex A in K. Patet ob signi diuersitatem, haberi numerum Numerorum contentorum in aggregato quadratorum qui fiunt à fictitiis lateribus, si à duplo producti ex A in C, auferatur duplum producti ex A in B. hoc autem idem est atque ducere duplum A in interuallum ipsorum B C. seu in K. Igitur E est ille numerus Numerorum. Itaque cùm D sit numerus quadratorum in eodem aggregato contentorum, diuiso E per D. orietur valor numeri. Quia ergo ducendo duplum A in A fit D, & ducendo idem duplum A in K fit E, erit A ad K vt D ad E. Proinde diuiso K per A orietur item valor Numeri, & resoluendo hypostases cùm A ducetur in valorem Numeri fiet K. Quamobrem A + B æquabitur ipsi C. & A — C hoc est C — A æquabitur ipsi B. Quod erat propositum.

K 1
A 6 N. + B 2 A 6 N. — C 3.
D 72 Q. E 12 N.

Aduertendum secundò ad hoc vt æquatio procedat, in lateribus fictitiis ponendum esse latus vtrumque datorum cum signo defectus, vel saltem alterum, ita vt in aggregato quadratorum fictitiorum numerus Nnmerorum reperiatur cum signo defectus, ac proinde transeat in alteram æquationis partem, & maneant Numeri æquales quadratis. Quare tutissimus omnium modus fingendi latera quadratorum est, cùm in vtroque ponuntur data latera cum signo defectus, & tunc nulla

cautio adhibenda est, præter eam qua tradita est aduertendo primo vt scilicet numeri Numerorum sint diuersi, & eam de qua agetur aduertendo vltimo. Ita si ponas latera 1. N. – & 2. N. –3. fiet 1 N. $\frac{16}{5}$ & latera quæsita erunt $\frac{6}{5}$ & $\frac{17}{5}$. & sic aliis infinitis modis variari positiones poterunt, & variæ contingent solutiones, prout varij ponentur Numerorum numeri, qui tamen non sint prius positis proportionales, alioquin si proportionales sint eandem exhibebunt solutionem, vt facile est demonstrare. Quod si alterum tantum datorum laterum statuatur cum signo minoris, alterum verò cum signo pluris, dupliciter id accedere potest, quia vel minus latus afficitur signo – vel maius latus. Itaque.

Aduertendum tertiò, cùm minus datorum laterum afficitur signo – maius verò signo +. Necesse esse vt numerus Numerorum appositus minori ad numerum Numerorum appositum maiori maiorem habeat rationem ratione datorum laterum. Quare in hoc casu si ponatur verbi gratia alterum latus 1 N. + 3. ponendum erit alterum 2 N. – 2 vel 3 N. – 2. & sic in infinitum, ita vt numerus Numerorum secundi lateris excedat $1\frac{1}{2}$ qui ad vnitatem seu ad numerum Numerorum primi lateris eandem habet rationem quàm 3. ad 2. Huius rei causa euidens est, quia oportet, vt dictum est, in aggregato quadratorum fictitiorum numerum Numerorum esse cum signo –. Quare in hoc casu oportet duplum producti ex minore datorum laterum in Numeros sibi appositos, superare duplum producti ex maiore in Numeros sibi adiunctos, quod patet fieri non posse nisi obseruetur quod traditum est.

Aduertendum quartò cùm maius latus datorum afficitur signo, – minus verò signo + tunc necesse esse vt numerus Numerorum appositus maiori ad appositum minori lateri, maiorem habeat rationem ratione datorum laterum. Ita si ponatur alterum latus 1 N. – 3. statuendum erit alterum $1\frac{1}{3}$ N. + 2. vel $1\frac{1}{4}$ N. + 2. & sic in infinitum, ponendo in secundo latere quemlibet numerum Numerorum minorem quàm $1\frac{1}{2}$. vel si secundum latus statuatur 1 N. + 2. statuendum erit primum 2. N. – 3. vel 4. N. – 3. & sic in infinitum ponendo in primo latere quemlibet numerum Numerorum maiorem quàm $1\frac{1}{2}$. Quod obseruari oportet ob causam in præcedente aduertendo allatam. Ita possunt hæc duo præcepta in vnicum contrahi, nimirum. Cùm in vno latere fictitio ponitur alterum laterum datorum cum signo, + alterum verò ponitur in altero latere fictitio cum signo. – Oportet vt numerus Numerorum qui afficitur signo – ad eum qui afficitur signo + maiorem rationem habeat, ratione datorum laterum.

Aduertendum postremò, cùm maius datorum laterum afficitur signo – & minus signo + tunc cauendum esse, ne numerus Numerorum maiori appositus, ad appositum minori eandem rationem habeat, quam habet summa datorum laterum ad eorundem interuallum; alioquin idem sequetur absurdum quod in primo aduertendo sequi ostensum est, reperientur scilicet eadem latera quæ data sunt, & nihil effectum erit. Verbi gratia si ponas alterum latus 5 N. – 3. alterum 1 N. + 2. quia 5 N. ad 1 N. se habet sicut summa ipsorum 3. & 2. ad eorundem interuallum inuenies tandem 5 N. – 3. nil aliud esse quàm 2. & 1 N. + 2 esse idem quod 3. Huius symptomatis causa ex huiusmodi Theoremate pendet.

Datis quatuor numeris, quorum primus ad secundum sit vt summa tertij & quarti, ad excessum tertij suprà quartum: erit aggregatum quadratorum primi & secundi, ad productum ex primo in tertium multatum producto ex secundo in quartum: Sicut primus ad semissem summæ tertij & quarti, vel sicut secundus ad semissem interualli eorundem.

F 5.
A 15. C 6.
E 2.
B 3. D 4. G 1.
H 234. K 78.
L 225. R 75.
M 9. P 3.

Sint dati quatuor numeri A B C D. & ipsorum C D interuallum sit E cuius semissis G. & eorundem C D summæ semissis sit F. & aggregatum quadratorum ab A & B sit H. productum autem ex A in C multatum producto ex B in D esto K. & ponatur esse A ad B sicut summa duorum C D ad eorundem interuallum E, hoc est sicut F ad G. dico esse sicut H ad K. sic A ad F vel B ad G. Quia enim est A ad B sicut F ad G, erit vicissim A ad F sicut B ad G. Itaque sumantur L M quadrati ipsorum A B. quorum aggregatum positum est H. & ex F in A fiat R. & ex G in B fiat P. Quia igitur F est semissis summæ ipsorum C D, & G semissis interualli eorundem; D G simul [1] æquantur ipsi F, & G F simul æquantur ipsi C.

coroll. 25. Quare ducere C in A idem est, atque ducere G & F in A, [2] productum autem ex G in A æquatur

1. poris. producto ex F in B (quia est A ad B vt F ad G) Igitur productum ex C in A æquatur productis ex

19. septimi. F in A, & ex F in B. Quoniam verò F æquatur ipsis D G. productum ex F in B æquatur productis ex D in B, & ex G in B. Quamobrem productum ex C in A æquatur productis ex F in A. & ex D in B. & ex G in B. Itaque si hinc auferatur productus ex D in B, vtique productus ex C in A multatus producto ex D in B, hoc est K manebit æqualis productis ex F in A & ex G in B, hoc est ipsis R P. Iam verò quia idem A ductus in seipsum, & in F producit L & R. erit L ad R sicut A ad F seu sicut B ad G. Similiter quia idem B ductus in seipsum & in G producit M & P. erit M ad P sicut B ad G. Igitur est L ad R sicut M ad P. & duo antecedentes simul, nempe H ad consequentes simul, nempe ad K, sunt vt A ad F seu B ad G. Quod demonstrandum erat.

His præmissis, si ponantur data latera C D. & sint A. B. numeri Numerorum, sitque vnum latus fictitium A − C, alterum B + D. fiet æquatio inter aggregatum quadratorum ab A & B, & inter duplum producti ex A in C multatum duplo producti ex B in D. nempe inter H & duplum ipsius K. Quare orietur valor Numeri diuidendo duplum ipsius K per H, Quia autem vt H ad K, sic est A ad F. erit & H ad duplum K, sicut A ad duplum F. hoc est ad summam ipsorum C D. Quare hac summa diuisa per A orietur quoque valor Numeri. Proinde resoluendo hypostases cùm vnitates ipsius A ducentur in valorem Numeri, fiet A æqualis summæ ipsorum C D, vnde patet A − C fore æqualem ipsi D. Similiter quia vt H ad duplum K. sic est B ad duplum G. nempe ad E, diuiso E per B orietur rursus valor Numeri. Vnde resoluendo hypostases cùm vnitates ipsius B. ducentur in valorem Numeri, fiet B æqualis ipsi E. Quamobrem B + D necesse erit æquari ipsi C. Quare ex omni parte patet propositum.

A 15 N. − C 6 F 5.
E 2.
B 3 N + D 4. G 1.
H 234 Q. K 78 N.

Idem quoque absurdum sequitur, cùm in vtroque latere fictitio ponuntur data latera cum signo defectus, si Numerorum numerus minori appositus, ad appositum maiori eandem rursus habeat rationem quam habet summa datorum laterum ad eorundem interuallum, vt si in hypothesi Diophanti ponatur alterum latus 5 N. − 2 alterum 1 N. − 3. Quod eadem facilitate demonstratur, hoc præmisso Theoremate.

Datis quatuor numeris, quorum primus ad secundum sit vt summa tertij & quarti ad excessum quarti supra tertium, erit aggregatum quadratorum primi & secundi, ad aggregatum productorum ex primo in tertium, & ex secundo in quartum, sicut primus ad semissem summæ tertij & quarti, vel sicut secundus ad semissem interualli eorundem.

Demonstratur autem hoc theorema eadem ferè ratione qua & præcedens, imò ex illo facilè infertur, probando scilicet eundem K fieri siue à producto ex A in C. auferatur productus ex B in D; siue producto ex A in D. addatur productus ex B in C. Quod tibi relinquo considerandum exercitationis ergo.

Varij Canones ex varia positionum institutione formari possent, sed quia parum in eis esset compendij, huic labori supersedeo. Verùm Canonis loco libet explicare modum perficiendi hoc problema à Francisco Vieta traditum zetetico 3. libri quarti, qui talis est.

Constituantur latera data, hypotenusæ duorum triangulorum rectangulorum similium. Summa baseos primi & perpendiculi secundi; itemque interuallum perpendiculi primi & baseos secundi: vel interuallum baseos primi & perpendiculi secundi; itemque summa perpendiculi primi, & baseos secundi constituent quæsitorum quadratorum latera.

Porrò quilibet numerus fit hypotenusa trianguli rectanguli per præcedentem, diuidendo scilicet eius quadratum in duos quadratos. Verbi gratia, sint data latera 2. & 3. si per Canonem præcedentis diuida 2. in duos planos similes, videlicet qui sint in ratione 1 ad 4. erunt hi $\frac{2}{5}$ & $\frac{8}{5}$ ex quibus formabuntur latera circa rectum trianguli rectanguli $\frac{6}{5}$ & $\frac{8}{5}$. Rursus diuide 3. in duos planos similes, quique sint in eadem ratione 1 ad 4. erunt hi $\frac{3}{5}$ & $\frac{12}{5}$ ex quibus formabuntur latera circa rectum trianguli rectanguli $\frac{9}{5}$ & $\frac{12}{5}$. Habemus itaque latera circa rectum triangulorum similium, nimirum $\frac{6}{5}$ $\frac{8}{5}$ & $\frac{9}{5}$ $\frac{12}{5}$. summa baseos primi & perpendiculi secundi est $\frac{18}{5}$ interuallum autem perpendiculi primi & baseos secundi est $\frac{1}{5}$. Sunt ergo latera quæsitorum quadratorum $\frac{18}{5}$ & $\frac{1}{5}$. vel summa perpendiculi primi & baseos secundi est $\frac{17}{5}$ interuallum autem baseos primi & perpendiculi secundi est $\frac{6}{5}$. Rursus ergo quæsitorum latera esse possunt $\frac{17}{5}$ & $\frac{6}{5}$. Huius rei demonstratio in promptu est. Sunto data latera A. B. & inuenienda sint alia latera, quorum quadrati æquentur quadratis ipsorum A B. fiat A hypotenusa trianguli rectanguli per præcedentem, sintque latera circa rectum C D. fiat item B hypotenusa similis trianguli, cuius latera circa rectum sint E F. Ita vt quadrati ipsorum C D sint æquales quadrato abs A & quadrati ab E & F. sint æquales quadrato abs B. & sit C ad D vt E ad F. Denique ipsorum C F summa esto G interuallum L. Item ipsorum E D summa esto K interuallum H. Dico latera quæsita esse G H. vel etiam K L. Quia enim est C ad D vt E ad F. Erunt tam quadrati duorum G H. quàm quadrati duorum K L æquales quadratis omnium C D. E F. At quadrati ipsorum C D. E F æquantur quadratis duorum A B ex hypothesi, igitur quadrati ipsorum A B æquantur quadratis ipsorum G H. vel etiam ipsorum K L. Quod erat demonstrandum. 6. 3. porism.

A 10. B 15.
C 8. E 12.
D 6. F 9.
G 17. H 6.
K 18. L 1.

QVÆSTIO XI.

INVENIRE duos quadratos numeros in dato interuallo. Constitutum sit interuallum ipsorum esse 60. Ponatur alterius latus 1 N. alterius verò 1 N. & quot-

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς τετραγώνους ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι μ° ξ. τετάχθω ἡ μὲν πλευρὰ ϛ^ος ἑνός. ἡ δὲ ἡ πλευρὰ ϛ^ος ἑνὸς, καὶ μ°.

ὅσων δή ποτε, μόνον ἵνα μὴ ὁ ἀπὸ τ͂ μ° τετράγωνος ὑπεραίρῃ τ͂ ὑπεροχὴν τ͂ δοθεῖσαν, οὕτω γὰρ ἑνὸς εἴδους ἑνὶ εἴδει ἴσου καταλειπομένου συσταθήσεται τὸ πρόβλημα. ἔστω ς° ἑνὸς μ° γ. αὐτοὶ ἄρα οἱ τετράγωνοι ἔσονται δυ μία, καὶ δυ μία, ςς οἱ ς. μ° θ. ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτῶν ςς οἱ ς μ° θ ταῦτα ἴσα μονάσιν ξ. καὶ γίνεται ὁ ς° μ° η καὶ ἥμισυ. ἔσται ἄρα ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ μ° η καὶ ἥμισυ. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου μ° ια καὶ ἥμισυ. αὐτοὶ δὲ οἱ τετράγωνοι ἔσονται ὃς μὲν μ° οβ α. δ ὃς δὲ ρλβ α. δ καὶ φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

libet vnitatum, dummodo harum quadratus non superet interuallum datum. Sic enim vna specie vni speciei æquali remanente expedietur quæstio. Esto igitur 1 N. + 3. Ipsi igitur quadrati erunt 1 Q. & 1 Q. + 6 N. + 9. Interuallum ipsorum est 6 N. + 9. Hoc æquatur vnitatibus 60. & fit 1 N. 8 ½. Erit igitur prioris latus 8 ½. Posterioris verò ½. Ipsi autem quadrati erunt, 72. ¼ & 132. ¼ & manifestum est satisfactum esse quæstioni.

IN QVAESTIONEM XI.

VERBA illa, *Dummodo harum quadratus non superet interuallum datum*, cautè accipienda sunt. Nam in exemplo Diophanti, vbi interuallum datum 60. non est quadratus numerus, res bene habet, nam cùm non possit dari quadratus æqualis numero non quadrato qualis est 60. quicunque quadratus accipiatur non maior quàm 60. is necessariò minor erit, quod requiritur vt æquatio ritè procedat. Sed si datum interuallum esset quadratus numerus, tunc non sufficeret ponere in latere secundi quadrati vnitates, quarum quadratus non superaret datum interuallum, sed ponendæ essent vnitates, quarum quadratus deficeret à dato interuallo. Verbi gratia sit datum interuallum 25. Ponatur latus alterius quadrati 1 N. alterius verò 1 N. + 5. fient 10 N. + 25. æquales 25. Quare 10 N. æquabuntur nihilo. Itaque oportet fingi latus secundi quadrati ab 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus sit minor quàm 25. vt 1 N. + 1. & fient 2 N. + 1 æquales 25. eritque 1 N. 12. sunt ergo quæsita latera 12. & 13. & satisfaciunt proposito. Quamobrem melius & vniuersalius præscribetur conditio hoc pacto. *Dummodo harum quadratus sit minor dato interuallo.* Cæterùm ex operatione Diophanti elicietur huiusmodi Canon.

Sume quemuis quadratum minorem dato interuallo, eumque subtrahe à dato interuallo, residuum diuide per duplum lateris sumpti quadrati, orietur vnum latus quæsitorum, cui si addas latus sumpti quadrati, fiet alterum latus.

Aliter etiam institui potest operatio, nimirum. Ponatur minor quæsitorum quadratorum 1 Q. ergo maior erit 1 Q. + 60. fingatur eius latus ab 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus sit minor quàm 60. & fiet operatio eadem cum operatione Diophanti. Vel fingatur quadrati eiusdem latus ab 1 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus sit maior quàm 60. verbi gratia fingatur ab 1 N. − 10. fiet quadratus 1 Q. − 20 N. + 100. æqualis 1 Q. + 60. & fiet 1 N. 2. eruntque quæsita latera 2. & 8. Hinc rursus formabitur iste Canon.

Sume quemuis quadratum maiorem dato interuallo, & ab eo subtrahe datum interuallum, residuum diuide per duplum lateris sumpti quadrati, orietur vnum latus quæsitorum, quod subtrahe à latere sumpti quadrati, fiet alterum latus.

Aliter rursus Ponatur maior Quadratus 1 Q. erit ergo minor 1 Q. − 60. cuius latus fingatur ab 1 N. − quotlibet vnitatibus, puta ab 1 N. − 10. fiet quadratus 1 Q. − 20 N. + 100. æqualis 1 Q. − 60. & fiet 1 N. 8. eruntque quæsita latera 8. & 2. Hinc etiam formatur huiusmodi Canon.

Sume quemlibet quadratum quem adde dato interuallo, summam diuide per duplum lateris sumpti quadrati, orietur vnum latus quæsitorum, à quo aufer latus sumpti quadrati, vel contrà; fiet alterum latus.

Porrò Canon omnium elegantissimus, & quo sequenti quæstione vtitur Diophantus, & alibi sæpe elicitur ex tertia secundi porismatum, adiuuante vigesima tertia primi, vel Canone primæ primi Diophanti, nimirum.

Cape duos numeros quorum mutuo ductu fiat datum interuallum, horum summæ semissis, & semissis interualli eorundem, quæsitorum quadratorum exhibebunt latera.

A 60.
B 10. C 6.
D 8. E 2.

Sit enim A datum interuallum, & ex B in C fiat A. summæ autem ipsorum B C semissis esto D, semissis verò interualli eorundem B C. esto E. Quia ergo constat per vigesimam tertiam primi porismatum, vel per Canonem primæ primi Diophanti summam ipsorum D E æquari ipsi B, & interuallum eorundem D E æquari ipsi C patet A fieri ex summa ipsorum D E in eorundem interuallum. Quamobrem A est interuallum quadratorum ab ipsis D E. Quod erat propositum.

Hinc autem melius & vniuersalius quàm modo à Xilandro tradito cognosci poterit, an in in-

tegris quæstio solui possit, immò & an pluribus modis in integris solutio contingat: si enim ipsi B C tales deligi possint, vt vterque sit par vel vterque impar, patet tam eorum summæ, quàm interualli semissem in integris haberi. Quare ipsi D E integri erunt vt iam docuimus ad primam primi. Si autem ipsorum B C. alter sit par, alter impar, non poterunt ipsi D E haberi nisi diuisa vnitate. Quamobrem quot modis reperiri poterunt duo numeri mutuo ductu conficientes datum interuallum, quorum vterque sit par, vel vterque impar, tot modis per integros soluetur quæstio. Vt dato interuallo eodem 60. quia id fit tum ex 10 in 6. tum ex 30. in 2. quorum vterque par est duobus modis in integris continget solui quæstionem, eruntque quæsita latera 8 & 2 vel 16 & 14. similiter dato interuallo 15. quia id fit tum ex 15 in 1. tum ex 5 in 3. duobus modis in integris soluetur quæstio, eruntque quæsita latera 8 & 7. vel 4 & 1. Rursus dato interuallo 48. quia id fit tum ex 2. in 24. tum ex 4 in 12. tum ex 6 in 8. tribus modis soluetur quæstio per integros, & erunt quæsita latera 13. & 11. vel 8 & 4. vel denique 7 & 1. Vnde sequitur quod iam aliter demonstrauimus in Corollario vigesimæ secundæ primi porism. si datum interuallum sit pariter impar tantùm, non posse solui quæstionem in integris, nam non metietur illud numerus par per parem, alioquin esset pariter par contra hypothesim, non metietur etiam idem interuallum numerus impar per imparem, alioquin esset impar, quod est etiam contra hypothesim. Quamobrem relinquitur vt metiatur tantùm illud numerus par per imparem, ac proinde, vt ostensum est, non continget solutio in integris. Si autem datum interuallum sit impar, vel quilibet numerus pariter par supra quaternarium, soluetur quæstio semper in integris. Quia quemlibet imparem vnitas metitur per ipsummet imparem. At quemlibet pariter parem metitur binarius per eiusdem pariter paris semissem [a] qui semper est par. Excluditur autem quaternarius, quia metitur eum tantum binarius per binarium non potest autem idem binarius esse summa & interuallum duorum eorundem numerorum, nisi pars ponatur æqualis toti. a. 1. porism.

QVÆSTIO XII.

Datis duobus numeris addere eundē numerum, & vtrumque quadratum efficere. Sint dati numeri 2 & 3. & esto addendus 1 N. erit ergo tum 1 N. + 2. tum 1 N. + 3. æqualis quadrato. Et hoc genus vocatur duplicata æqualitas, æquatur autem sic. Interuallo conspecto, quære duos numeros quorum vnius in alterum multiplicatio producat istud interuallum. Sunt autem hi 4. & $\frac{1}{4}$. Horum vel interualli semissis in se ductus æquatur minori, vel summæ semissis in se ductus æquatur maiori. Sed interualli semissis in se ductus facit $\frac{225}{64}$ hoc æquatur 1 N. + 2. & fit 1 N. $\frac{97}{64}$. Summæ verò semissis in se ductus facit $\frac{289}{64}$ hoc æquatur maiori, nimirum 1 N. + 3. & fit 1. N. rursus $\frac{97}{64}$. Erit igitur addendus numerus $\frac{97}{64}$ & manifestum propositum.

Ne autem in duplicatam æqualitatem incidamus, sic agendum. Inuenire numerum qui & ad 2. & ad 3. additus, vtrumque quadratum efficiat. Quæro prius numerum aliquem qui adsumens binarium faciat quadratum, vel quis numerus adiecto ternario fiat quadratus. Porro à quocunque quadrato subtraxero 2. vel 3. is erit qui quæritur. Agamus de 2. is ause-

Δυσὶ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τετράγωνον. ἔστω τῷ β̄ καὶ τῷ γ̄ καὶ ἔστω ὁ προστιθέμενος ϛ ἑνός. ἔσται ἄρα ὁ μὲν ϛ ἑνὸς μ° β̄. ὁ δὲ ϛ ἑνὸς μ° γ̄ ἴσοι τετραγώνοις. καὶ τοῦτο τὸ εἶδος καλεῖται διπλοϊσότης, ἰσοῦται δὲ τὸν τρόπον τοῦτον. ἰδὼν τὴν ὑπεροχὴν ζήτει δύο ἀριθμοὺς, ἵνα τὸ ὑπ' αὐτῶν ποιῇ τὴν ὑπεροχήν. εἰσὶ δὲ μ° δ̄ καὶ μονάδος τέταρτον. τούτων ἤτοι τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐλάσσονι, ἢ τῆς συνθέσεως τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ μείζονι. ἀλλὰ τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτό ἐστι σκε ξδ. ταῦτα ἴσα ϛ ἑνὶ μονάσι δυσὶ, καὶ γίνεται ὁ ϛ ϟζ ξδ. τὸ δὲ συνθέσεως τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτό ἐστι σπθ ξδ. ταῦτα ἴσα τῷ μείζονι, τουτέστι ϛ ἑνὶ μονάσι τρισί. καὶ γίνεται ὁ ϛ πάλιν ϟζ ξδ. ἔσται ἄρα ὁ προστιθέμενος ϟζ ξδ. καὶ φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

Ἵνα δὲ μὴ εἰς διπλῆν ἰσότητα ἐκπέσῃ δεικτέον οὕτως. τῷ δύο καὶ τῷ τρία προσευρεῖν τινα ϛ ὃς ἑκατέρῳ προστεθεὶς ποιεῖ τετράγωνον. ζητῶ πρότερόν τινα ἀριθμὸν ὃς προσλαβὼν μονάδας δύο ποιεῖ τετράγωνον, ἢ καὶ τὶς ἀριθμὸς προσλαβὼν μονάδας τρεῖς ποιεῖ τετράγωνον. ἀπ' οἵου δ' ἂν τετραγώνου ἀφέλω τὰς μονάδας ἐκεῖ ἔσται ὁ ζητούμενος. ἔστω δὴ ἐπὶ τῶν μονάδων δύο, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἀπὸ δυνά-

μεως μιᾶς, λοιπὸν ἔσται δύναμις μία λείψει μο β. καὶ δῆλον ὡς ἐὰν προσλάβῃ μονάδας β ποιεῖ τετράγωνον. ἀλλ' ἐὰν προσλάβῃ μονάδας τρεῖς, γίνεται δύναμις μία, μονὰς μία. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς^{ῶν} ἑνὸς λείψει μονάδων τοσούτων ὥστε τὴν τῆς δυνάμεως ὑπόστασιν ὑπερβάλλειν αὐτὰς τὰς προσκειμένας τῆς λείψεως μονάδας, εἶον ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος τὰς μονάδας β. οὕτως γὰρ ἐν ἑκατέρῳ αὐτῶν μερῶν ἓν εἶδος ἑνὶ ἴσον καταλειφθήσεται. ἔστω ἀπὸ ς^{ῶν} ἑνὸς λείψει μο δ. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δύναμις μία, μο ιϛ λείψει ςς η. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ μονάδι μιᾷ. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιποὶ ἀριθμοὶ η ἴσοι μονάσι ιε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιε η^{ων}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ἔσται ὁ προστιθέμενος νζ ξδ^{ων}.

ratur ab 1 Q. superest 1 Q. − 2 & est euidens hunc si absumat 2. fore quadratū. Sed si adsumat 3. fit 1 Q. + 1. Hoc ergo æquatur quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. cum defectu tot vnitatum vt resolutis hypostasibus 1 Q. superet ipsas ante positas defectus vnitates, nimirum 2. Sic enim ex vtraque parte vna species vni speciei æqualis relinquetur. Esto ergo ab 1 N. − 4 ipse quadratus erit 1 Q. + 16 − 8 N. Hoc æquatur 1 Q. + 1. Communis addatur defectus, & auferantur à similibus similia, relinquuntur 8 N. æquales 15. & fit 1 N. $\frac{15}{8}$ Ad positiones. Erit addendus numerus $\frac{57}{64}$.

IN QVAESTIONEM XII.

DVPLICI operatione quæstionem hanc eleganter absoluit Diophantus, sed neutram Scholiastes, Xilanderve satisfeliciter explicauit. Sanè quod ad primam attinet, in qua duplicata æqualitate vtitur author, benè monet vterque eam niti primæ secundi. Sed id solùm non sufficit vt eius adæquata ratio perfectè comprehendatur, nam licet inuenerimus duos quadratos eodem interuallo distantes quo distant dati numeri ea lege vt maior maiorem datorum superet, & minor minorem, non statim constat per hanc duplicatam æqualitatem vtrobique reperiri eundem valorem Numeri, quod vnum curandum est vt quæstio perfectè soluta sit. Hoc ergo sic demonstrabimus. Sint dati Numeri A B. quorum interuallum C. Ponendo ergo quæsitum numerum 1 N. erunt quadrato æquandi 1 N. + A & 1 N. + B. sumantur duo quadrati D E eodem interuallo C distantes, ita vt D sit maior quàm A, & E sit maior quàm B. Dico siue D æquetur 1 N. + A. siue E æquatur 1 N + B. eundem vtrobique reperiri valorem Numeri. Quia

A		B
1 N. + 30.		1 N. + 6.
	C 24.	
D 49.	F 19.	E 25.

7. 1. porism. enim ex constructione est in arithmetica medietate A ad B vt D. ad E.[1] erit & permutando in eadem medietate A ad D, sicut B ad E. Igitur si sumatur F excessus D super A, erit idem F excessus E super B. Cùm ergo æquando D cum 1 N + A. detrahentur similia à similibus, nimirum cùm A vtrimque auferetur, remanebit F æqualis 1 N. sed etiam æquando E cum 1 N + B auferetur vtrimque. B & remanebit idem F æqualis 1 N. Quare constat propositum.

Hoc demonstrato, patet totum duplicatæ æqualitatis negotium in eo versari, vt inueniantur duo quadrati eodem interuallo distantes quo distant dati numeri, quod sanè fit per Canonem postremum ad præcedentem allatum, qui vt ostensum est, totus pendet à tertia secundi porismatum, quæ eadem est cum quinta secundi elementorum. Verùm quilibet quadrati quorum sit idem interuallum qui & datorum numerorum, non statim apti sunt duplicatæ æqualitati resoluendæ, sed tales deligendi sunt, vt maior superet maiorem datorum numerorum, & minor minorem.

Hoc quidem vidit Scholiastes, sed in eo allucinatus est, vt benè monet Xilander, quod arte certa tales quadratos reperiri posse negauit. Ipse quoque Xilander in affinem eius quem reprehendit errorem lapsus meliora non affert, sed indicata tantum necessitate tales quadratos reperiendi, quo pacto id fieri oporteat, minimè docet. Res tamen facilis est, nam tales numeri sumendi sunt quorum mutuo ductu fiat datum interuallum, vt summæ illorum semissis quadratus excedat maiorem datorum numerorum, vt in exemplo Diophanti, vbi interuallum est 1. maior numerorum 3. oportet inuenire duos numeros quorum mutuo ductu fiat 1. & quorum summæ semissis quadratus sit maior quàm 3. Quare cùm summæ ipsius quadratus sit quadruplus quadrati semissis, oportet summæ quadratum excedere 12. Proinde cùm latus proximè maius ipsius 12. sit 3. $\frac{1}{2}$. necesse est summam quæsitorum numerorum quorum mutuo ductu fiat 1. excedere 3 $\frac{1}{2}$. vel sanè non esse minorem. Hinc est cur abiectis 2. & $\frac{1}{2}$. Itemque 3. & $\frac{1}{3}$. se legerit Diophantus 4. & $\frac{1}{4}$. potueritque eorum loco sumere 5. & $\frac{1}{5}$. vel 6. & $\frac{1}{6}$ aliosque infinitos, quorum summa maior est quàm 3 $\frac{1}{2}$. Ita si dati numeri sint 30. & 6. cùm eorum interuallum sit 24. maior vero ipsorum 30. cuius quadruplum 120. quærendi erunt duo numeri quorum mutuo ductu fiat 24. ita vt eorum summæ quadratus excedat 120.

Quare cùm radix proximè maior ipsius 120. sit 11. oportebit quæsitorum numerorum summam esse maiorem quam 11. vel certè non minorem. Quarè ritè sumi poterunt 2. & 12. vel 3. & 8. aliique infiniti quorum summa maior, vel non minor quàm 11. sed eandem ob causam reiicientur 4. & 6. aliique infiniti quorum summa minor quàm 11.

Quod attinet ad secundam operationem verba, illa *ὥστε τὴν τῆς δυνάμεως ὑπόστασιν ὑπερβάλλειν αὐτὰ τὰς προστεθειμένας τῆς λείψεως μονάδας*, alio mendo non laborant, quicquid dicat Xilander, nisi quod vox *τετάρτης* temerè inculcata erat, nam legebatur in codice manuscripto, *αὐτὰς τὰς προστεθειμένας τῆς τετάρτης λείψεως μονάδας*. Cæterùm hac voce sublata, reliqua bene habent, nec vllam pariunt difficultatem, nisi ex praua Xilandri interpretatione, qui ea sic conuertit. *vt substantia quadrati earum superet ipsas ante positas defectus vnitates.* Cùm ramen vox Hypostasis hoc loco & alibi semper apud Diophantum significet, non ipsas vnitates quæ ponuntur in latere fictitio, sed ipsum valorem numeri vel quadrati positionibus applicatum, vt iam docuimus ad primam primi. Hinc etiam erroris causam præbuit Xilander Christophoro Clauio cap. 29. ænigmate 98. sed & Raphaël Bombellius in eodem lapsus est lib. 3. suæ Algebræ Problemate 66. Quare relictis illorum inutilibus commentis, genuinus horum verborum sensus hic est. *vt quadrati hypostasis superet ipsas ante positas defectus vnitates*, vel vt clarioris doctrinæ gratia interpretati sumus, *vt resolutis hypostasibus* 1 *Q. superet ipsas ante positas defectus vnitates*. Cùm enim quæsitus numerus positus sit 1 Q − 2. manifestum est valorem quadrati talem reperiri debere vt superet 2. Id autem arte certa qui consequi possis non docuit hîc Diophantus. Sed profectò in sequentibus sæpe tali vtitur artificio quoties simile quid accidit. Quia numerus æquandus quadrato est 1Q + 1. patet si eius latus fingatur 1 N − aliquot vnitatibus valorem Numeri oriri diuidendo quadratum ipsarum vnitate multarum per duplum earundem vnitatum. Quia vero 1 Q. vt dictum est debet esse maior quàm 2. sumpto latere proximè maiore ipsius 2. nimirum 1 $\frac{1}{2}$. oportet valorem numeri maiorem esse, vel certe non minorem quàm 1 $\frac{1}{2}$. Igitur eò redacti sumus vt inueniamus numerum, cuius quadratus vnitate mulctatus & diuisus per duplum ipsius numeri, det quotientem maiorem vel certè non minorem quàm 1 $\frac{1}{2}$. Esto huiusmodi numerus 1 N. ergo $\frac{1 Q - 1}{2 N}$ maior est vel certè non minor quàm 1 $\frac{1}{2}$. & omnia multiplicando per 2 N. fit 1 Q − 1. non minor quàm 3 N, ac proinde 1 Q. non minor quàm 3 N. + 1. qua æquatione resoluta, fit 1 N. non minor quàm R 3 $\frac{1}{4}$ + 1 $\frac{1}{2}$. sumptoque latere ipsius 3 $\frac{1}{4}$. nimirum 1 $\frac{4}{5}$ si ei addas 1 $\frac{1}{2}$. fit 1. N. non minor quàm 3 $\frac{3}{10}$. Quamobrem æquantes quadrato 1 Q. + 1. fingemus eius latus 1 N. − quotlibet vnitatibus quæ superent 3 $\frac{3}{10}$. sic Diophantus finxit hoc latus 1 N. − 4. Possetque etiam fingi 1 N. − 5. vel 1 N − 6. & sic in infinitum. Itaque vt ista tyronum memoriæ firmius inhæreant, placet paulò aliter positiones instituere, quod fieri posse indicauit Diophantus his verbis. *Porro à quocunque quadrato subtraxero 2. vel 3. is erit qui quæritur.* Ponatur quæsitus numerus 1 Q. − 3. is enim adsumpto 3. quadratum facit: At idem absumpto 2. facit 1 Q − 1. Hoc ergo æquatur quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. cum defectu tot vnitatum, vt hypostasis quadrati superet ipsas ante positas defectus vnitates, nimirum 3. vt ergo determinemus de hoc vnitatum de numero, quia fiet valor Numeri diuidendo quadratum quæsitarum vnitatum auctum vnitate per duplum earundem vnitatum; At oportet 1 Q. maiorem esse quàm 3. atque adeo 1 N. maiorem esse vel certè non minorem latere proximè maiore ipsius 3. quod est 2. Patet eò nos adduci vt inueniamus numerum, cuius quadratus vnitate auctus, & diuisus per duplum ipsius numeri det quotientem non minorem quàm 2. Esto huiusmodi numerus 1 N. ergo $\frac{1 Q}{2 N}$ + $\frac{1}{2 N}$ maior est, vel certè non minor quàm 2. & omnia in 2 N. Igitur 1 Q. + 1. maior est vel certè non minor quàm 4 N. Qua æquatione resoluta fit 1 N. vel 2 + R 3. vel 2 − R 3. & loco R 3 sumendo latus proximè minus ipsius 3. nempe 1 $\frac{2}{3}$. fit 1 N. vel maior quàm 3. $\frac{2}{3}$. vel minor quàm $\frac{1}{3}$. Hic enim ob valorem Numeri duplicem, duplex inuenitur terminus alter supra quem, alter verò infrà quem, sumi potest valor Numeri. Possumus ergo quadrato æquantes 1 Q. − 1. eius latus fingere ab 1. N. − quotlibet vnitatibus quæ sint maiores quàm 3 $\frac{2}{3}$. vel minores quàm $\frac{1}{3}$. fingatur 1 N. − 4. fiet quadratus 1 Q. − 8 N. + 16. æqualis 1 Q. − 1. & tandem 1 N. est $\frac{17}{8}$ vnde fit quæsitus numerus $\frac{97}{64}$. idem qui repertus est per operationem Diophanti. Fingatur rursus latus Quadrati 1 N. − $\frac{1}{5}$ fiet quadratus 1 Q. − $\frac{2}{5}$ N. + $\frac{1}{25}$ æqualis 1 Q. − 1. vnde fit 1 N. $\frac{13}{5}$ & est quæsitus numerus $\frac{94}{25}$. cui addendo 3. & 2. fiunt quadrati $\frac{169}{25}$ & $\frac{144}{25}$.

Si cui porrò laboriosior videbitur hæc operatio, licebit etiam aliam instituere magis expeditam, & quæ tantas difficultates minimè patiatur. Fingatur in eodem exemplo, quadratus aliquis ab 1. N. + tot vnitatibus quarum quadratus superet maiorem datorum numerorum 3. puta ab 1. N. + 2. fiet quadratus 1. Q. + 4 N. + 4. Hinc ergo auferendo 3. statuatur residuum quæsitus numerus, nempe 1 Q. + 4 N. + 1. is enim adsumens 3. facit quadratum. Restat vt & adsumpto 2. quadratum faciat. Facit autem 1 Q. + 4 N. + 3. Hoc ergo æquatur quadrato, cuius latus fingo 1 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus superet 3. vnitates numeri quadrato æquandi, esto latus illud 1 N. − 3. fiet quadratus 1 Q. − 6 N. + 9. æqualis 1 Q. + 4 N. + 3. & fit 1 N. $\frac{3}{5}$ estque quæsitus numerus

$\frac{24}{25}$ vt suprà. Ex his omnibus operationibus varij Canones elici possunt, sed omnium facillimus à prima fit, nimirum.

Cape duos quadratos eodem interuallo distantes quo & dati numeri distant, sed illis maiores, & à maiore quadrato aufer maiorem numerum, vel à minore minorem, residuum quod erit idem vtrobique, quæsitum exhibebit numerum.

QVÆSTIO XIII.

ΑΠΟ δοθέντων δύο ἀριθμῶν ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. ἐπετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ θ. καὶ τοῦ κα. ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. οἷον δ' ἂν τετράγωνον ἀφέλω ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν, τάσσω τὸν λοιπὸν λεῖψει τούτου, οὗτος γὰρ ἀφαιρούμενος καταλείπει τετράγωνον. ἔστω οὖν ὁ ἀπὸ τῶν μο θ ἀφαιρούμενος τετράγωνος δύναμις μία, λοιπαὶ ἄρα μονάδες θ λεῖψει δυνάμεως α. δεήσει ἄρα καὶ ἀπὸ μο κα ἀφελεῖν μο θ λεῖψει δυνάμεως μιᾶς καὶ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ἐὰν ἀπὸ μο κα ἀφέλω μο θ. λεῖψει δυνάμεως α λοιπὴ δύναμις α μο ιβ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςου ἑνὸς λεῖψει μονάδων τοσούτων ὥστε τὸν ἀπ' αὐτῶν τετράγωνον πλείονας ποιεῖν τῶν μο ιβ. οὕτω γὰρ πάλιν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν ἓν εἶδος ἑνὶ ἴσον καταλειφθήσεται. ἔστω δὴ μο δ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεως μιᾶς, μο ις λεῖψει ςς η. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ μονάσι ιβ. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια· λοιποὶ ςςοὶ η ἴσοι μονάσι δ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ^{ων} η. αἱ μὲν θ μονάδες συνάγουσιν οβ η. τουτέστι φος ξδ. ἡ δὲ λεῖψις δυνάμεως μιᾶς ἀφαιρεῖ ἀπ' αὐτῶν ις ξδ. καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

Datis duobus numeris auferre eundem numerum, & facere residuum vtrumque quadratum. Iniunctum sit vt à 9. & à 21. auferatur idem numerus, & vtrumque residuum sit quadratus numerus. Qualemcunque verò quadratum aufero de altero ipsorum; statuam reliquum cum hujus defectu, is enim detractus relinquet quadratum. Esto igitur quadratus à 9. detractus 1 Q. relinquentur ergo 9 − 1 Q. Oportet igitur etiam à 21. auferre 9 − 1 Q. & facere quadratum. Sed si à 21. abstulero 9. − 1. Q. relinquitur 1 Q. + 12. Hoc ergo æquatur quadrato, Fingo quadratum ab 1 N. cum defectu tot vnitatum, vt quadratum earum amplius sit quàm 12. Sic enim rursus ab vtraque parte vna species vni speciei æqualis relinquetur. Esto itaque vnitatum 4. ipse igitur quadratus erit 1 Q. + 16. − 8. N. qui æquabitur 1 Q. + 12. Auferantur à similibus similia: relinquuntur 8 N. æquales 4. & fit 1 N. $\frac{4}{8}$ Atqui 9. faciunt $\frac{72}{8}$ seu $\frac{576}{64}$, vnde defectus 1 Q. auferatur, scilicet $\frac{16}{64}$. & satisfit proposito.

IN QVÆSTIONEM XIII.

LIMITATIO quam præscribit Diophantus circa latus fictitium, omnino insufficiens est. Quod si libet experiri finge illud 1 N. − 8. quandoquidem quadratus ipsius 8. excedit 12. fiet quadratus 1 Q. − 16 N. + 64. æqualis 1 Q. + 12. & fiet 1 N. 3 $\frac{1}{4}$. Quare quæsitus numerus qui positus erat 9. − 1 Q. haberi non poterit, quia 1 Q. est maior quàm 9. Itaque cùm duo præscribendi essent termini intra quos cadere debet numerus vnitatum ponendus in latere fictitio, vnum duntaxat præfiniuit Diophantus, nimirum 12. seu potius latus ipsius 12. Quod cùm sit paulò minus quàm 3 $\frac{1}{2}$. rectè diceмus cum Diophanto numerum illum vnitatum debere superare 3 $\frac{1}{2}$. vel certè non esse minorem. Sed hoc non sufficit, nam prætera necesse est, talem fieri valorem Numeri vt resoluendo hypostases 1 Q. sit minor quam 9. quia scilicet quæsitus numerus positus est 9 − 1 Q. Quare oportet 1 N. minorem esse quàm 3. Quia ergo æquando quadrato 1 Q. + 12. & fingendo latus 1 N. − aliquot vnitatibus, fit valor Numeri ex quadrato vnitatum illarum multato numero 12. & diuiso per duplum sui lateris, eo redigimur vt inueniamus talem vnitatum numerum, cuius quadratus multatus numero 12. & diuisus per duplum sui lateris, det quotientem minorem quàm 3. Esto talis numerus 1 N. Ergo $\frac{1 Q. - 12}{2 N}$ minor est quàm 3. & omnia in 2 N. fit 1 Q. − 12. minor quàm 6 N. & tandem fit 1 Q. minor quàm 6. N. + 12. qua resoluta occasione 1 Q. minor quàm ℞ 21. + 3. seu minor quàm 7 $\frac{5}{9}$ ferè quamobrem necesse est omnino numerum vnitatum ponendarum in latere fictitio cadere inter 3 $\frac{1}{2}$ & 7 $\frac{5}{9}$ quales sunt 4. 5. 6. 7. & alij infiniti admittendo fractiones.

Cæterum,

Cæterum, vt benè monet Xilander, hæc quæstio non secus ac præcedens per duplicatam æqualitatem ritè solui potest. Verbi gratia si dati sint numeri 9. & 21. Ponatur quæsitus ab vtroque auferendus 1 N. ergo tam 9. − 1 N. quam 21 − 1 N. æquatur quadrato. Horum interuallum est 12. Quare tales seligendi sunt numeri, quorum mutuo ductu fiat 12. vt semissis summæ illorum quadratus sit minor quàm 21. vel quod idem est, vt semissis interualli quadratus sit minor quàm 9. ob contrariam scilicet rationem eius, ob quam in præcedente requirebatur contrarium. Memores igitur eorum quæ docuimus in præcedente, quia quadruplum ipsius 21. est 84. dicemus numerorum quorum mutuo ductu fiet 12. summæ quadratum minorem esse debere quàm 84. Quare cùm proximum latus de 84. sit 9. $\frac{1}{6}$. oportebit summam talium numerorum minorem esse quàm 9 $\frac{1}{6}$. qualis est summa ipsorum 2. & 6. vel ipsorum 3. & 4. & aliorum infinitorum. Quod si sumamus 2. & 6. erit quadratus semissis summæ illorum 16. at quadratus semissis interualli fiet 4. Siue igitur 4 æquetur 9. − 1 N. siue 16. æquetur 21. − 1 N. fiet vtrobique idem valor numeri 5. Quare 5. est quæsitus numerus, qui ab vtroque datorum detractus relinquit quadratos 4. & 16. Hinc etiam cum Xilandro eliciemus Canonem.

Sume duos quadratos eodem distantes interuallo, quo dati numeri distant, sed minores illis. Tum à maiore numero aufer maiorem quadratum, vel à minore minorem. Residuum quod erit idem vtrobique, quæsitum exhibebit numerum.

QVÆSTIO XIV.

AB eodem numero auferre duos datos numeros, ita vt residuum vtrumque sit quadratus numerus. Constitutum sit ab eodem numero auferre 6. & 7. & vtrumque residuum facere quadratum. Ponatur quæsitus numerus 1 N. & si ab eo abstulero 6. relinquitur 1 N. − 6. æqualis quadrato. Si autem abstulero 7. relinquitur 1 N. − 7. & rursus in hoc casu duplicata æqualitas existit. Et quoniam horum interuallum, puta 1. continetur sub 2. & $\frac{1}{2}$. fiet tandem 1 N. $\frac{121}{16}$ & satisfacit proposito.

Ne verò in duplicatam æqualitatem deueniatur, sic indagabimus. Quæremus primò à quo numero 6. subtractus, relinquat quadratum. Cæterùm cuicunque quadrato adiiciamus 6. is erit qui quæritur. Esto igitur quadrato 1 Q. erit ergo qui quæritur 1 Q. + 6. & patet si ab eo auferantur 6. relinqui quadratum. Oportet igitur auferre quoque 7. ab 1 Q. + 6. & facere quadratum. Quamobrem 1. Q. − 1. æquatur quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. − 2. Ipse igitur quadratus erit 1 Q. + 4. − 4 N. Hoc æquatur 1 Q. − 1. & fit 1 N. $\frac{5}{4}$. Erit ergo qui quæritur $\frac{121}{16}$ & soluit quæstionem.

ΑΠΟ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν δύο δοθέντας ἀριθμοὺς καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. ἐπιτετάχθω ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀφελεῖν τὸν ϛ καὶ τὸν ζ. καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. τετάχθω ὁ ζητούμενος ς^ο α. καὶ ἐὰν μὲν ἀπὸ τούτου ἀφέλω μονάδας ϛ λοιπὸς ς^ο α λείψει μ^ο ϛ ἴσος τετραγώνῳ, ἐὰν δὲ μονάδας ζ. λοιπὸς ς^ο εἷς λείψει μ^ο ζ. καὶ πάλιν ὁμοίως ἐπὶ τούτου ἐστὶ ἡ διπλοϊσότης. ἐπειδὴ περ ἡ ὑπεροχὴ μονὰς οὖσα μία περιέρχεται ὑπὸ μ^ο β. καὶ μονάδος ἡμίσεος. καὶ συνάγεται ὁ ἀριθμὸς ρκα ιϛ. καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

Ινα δὲ μὴ εἰς διπλῆν ἴσωσιν ἐξέρχηται. ζητητέον οὕτως. ζητῶ πρότερον ἀπὸ τίνος ἀριθμοῦ ἐὰν ἀφέλω μ^ο ϛ ποιεῖ τετράγωνον. ᾧ δ᾽ ἂν τετραγώνῳ δηλονότι προσθῶ τὰς μ^ο ϛ. ἐκεῖνος ἔσται ὁ ζητούμενος. ἔστω δὴ δυνάμεως μιᾶς. ἔσται ἄρα ὁ ζητούμενος δύναμις α μονάδες ϛ. καὶ δῆλον ὡς ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλω μ^ο ϛ ὁ λοιπὸς ἔσται τετράγωνος. δεήσει ἄρα καὶ μονάδας ζ. ἀφελεῖν ἀπὸ τῆς δυνάμεως μιᾶς μ^ο ϛ. καὶ ποιεῖν τετράγωνον. δύναμις ἄρα μία λείψει μονάδος μιᾶς ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς^ο α λείψει μ^ο β. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δύναμις μία, μονάδες δ λείψει ςς δ. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ λείψει μονάδος μιᾶς. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε δ. ἔσται ὁ ζητούμενος ρκα. ιϛ καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XIV.

PRIMÆ operationi, in qua vtitur duplicata æqualitate Diophantus, nullam adiicit conditionem, nec adiicienda est aliqua, vt malè arbitratur Xilander. Cùm enim quadrati qui capiun-

K

tur eodem distantes interuallo quo & dati numeri, addendi sint ipsis datis numeris, minor scilicet maiori, & maior minori, patet vt additio perfici possit non referre vtrum tales quadrati maiores sint datis numeris vel, minores. Quod in duabus præcedentibus circumspiciendum erat, quia in illis substractione vtendum fuit non additione; allucinatus ergo est Xilander existimans vtendum hîc eadem cautione in huiusmodi quadratis deligendis, qua fuit vtendum in duodecima. quod & exemplo ab ipsomet allato confirmare facile est. Sint dati numeri 41. & 65. quorum interuallum 24. quod fit ex 4. in 6 vel ex 3. in 8. hos tamen binos rem expedire posse negat Xilander, idque constare experientia ait. Sed sanè constat experientia falli Xilandrum. Nam ipsorum 4. & 6. summæ & interualli semisses sunt 5. & 1. quorum quadrati 25. & 1. Quare si addas 1. ad 65. vel 25. ad 41. fiet vtroque modo quæsitus numerus 66. vt patet. Rursus ipsorum 3. & 8. summæ & interualli semisses sunt $\frac{11}{2}$ & $\frac{5}{2}$ quorum quadrati $\frac{121}{4}$ & $\frac{25}{4}$ & si addas ad 65. vel $\frac{121}{4}$ ad 41. fit vtroque modo quæsitus numerus 71 $\frac{1}{4}$ qui satisfacit proposito.

Portò vt modus hîc vtendi duplicata æqualitate perfectè demonstratus maneat, sint dati numeri A maior & B minor, horumque interuallum C. & ponatur quæsitus numerus 1 N. Igitur æquandi quadrato erunt 1 N. − A. & 1 N. − B. Sumantur itaque duo quilibet quadrati D maior & E minor, quorum interuallum sit idem C. Quia ergo ob maiorem defectum totus 1 N. − A minor est toto 1 N. − B. æquabimus illi minorem quadratum E, maiorem verò D huic. Et in prima æquatione supplendo defectum, fiet 1 N. æqualis summæ ipsorum A E. At in secunda fiet 1 N. æqualis B D. summa autem ipsorum A E æqualis est prorsus summæ ipsorum B D, quia, cùm sint arithmeticè proportionales A ad B vt D ad E, [1] est summa extremorum A E æqualis summæ mediorum B D. Quamobrem in vtraque æquatione fit idem valor Numeri. Quod demonstrandum erat. Hinc elicitur Canon à Xilandro traditus.

1 N. − A 30. 1 N. − B 6.
C 24.
E 25. D 49.

[1] 4. 1. porism.

Cape duos quadratos eodem distantes interuallo, quo & dati numeri, horum minorem adde maiori numero, & maiorem minori, vtroque modo fiet idem quæsitus numerus.

Secundæ verò operationi vt perficitur à Diophanto, limitatio quædam adiicienda erat; nam cùm numerus quadrato æquandus sit 1 Q. − 1. debet eius latus fingi ab 1 N. − tot vnitatibus, vt tandem valor quadrati inueniatur excedens 1. Quare si eodem vtaris artificio, quo vsi sumus in præcedentibus, inuenies latus illud fingendum esse ab 1 N − aliquo vnitatum numero maiore quàm 1. vel minore quàm 1. alioquin si ponatur latus illud 1 N. − 1. reperietur 1 Q. − 1 nihil esse. Ita si propositi numeri sint 30. & 6. ponatur quæsitus 1 Q. + 6. vnde auferendo 30. remanet 1 Q. − 24. æquandus quadrato. Cuius latus fingendum ab 1 N. − tot vnitatibus vt tandem 1 Q. sit maior quàm 24. Quare cùm latus proximè maius ipsius 24. sit 5. oportet 1 N. non minorem esse quàm 5. fit autem 1 N. ex quadrato vnitatum quæ ponuntur in latere fictitio, adsumente numerum 24. diuisoque per duplum sui lateris. Ponatur ergo hîc vnitatum numerus 1 N. Igitur $\frac{1 Q.}{2 N.} + \frac{24}{2 N.}$ maior est vel saltem non minor quàm 5. & omnia in 2 N. fit 1 Q. + 24. non minor quàm 10 N. Qua æquatione resoluta fit 1 N. vel 6. vel 4. Quare oportet talem poni in latere fictitio vnitatum numerum, vt sit non minor quàm 6. vel non maior quàm 4. Qua ratione excluduntur tantùm omnes numeri inter 4. & 6. fingatur ergo latus 1 N. − 4. fiet quadratus 1 Q. − 8 N. + 16. æqualis 1 Q. − 24. Vnde fiet 1 N. 5. erit ergo quæsitus numerus 31. & satisfacit proposito. Vel fingatur idem latus 1 N. − 6 fiet rursus 1 N. 5. & quotiescunque sumentur duo numeri vnus maior quàm 6. alter minor quàm 4. ita vt maior ad ipsum 6. eandem habeat rationem quam habet 4. ad minorem, eadem per vtramque æquationem continget solutio. Ita si eiusdem numeri 1 Q. − 24. latus fingas 1 N. − 2. vel 1 N. − 12. fiet idem valor Numeri 7. Itemque siue fingas idem latus 1 N. − 3. siue 1 N. − 8. fiet idem valor Numeri 5 $\frac{1}{2}$. & sic de alijs. Quod adnotasse fuit operæ pretium.

Potest tamen operatione paulum immutata, tam laboriosæ conditionis necessitas euanescere. Si videlicet, ponatur quæsitus numerus 1 Q. + maiore datorum numerorum, vt in exemplo Diophanti ponatur quæsitus numerus 1 Q. + 7. hinc ergo detracto 6. remanet 1 Q. + 1. æquandus quadrato, cuius latus fingo ab 1 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus superet 1. & manifesta est solutionis ratio. Ita si dati sint numeri 30. & 6. Pono quæsitum 1 Q. + 30. vnde auferendo 6. remanet 1 Q. + 24. æquandus quadrato, cuius latus fingo ab 1 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus superet 24. Hinc etiam licebit elegantem formare Canonem.

Datorum numerorum interuallum aufer ab aliquo quadrato, residuum diuide per duplum lateris eiusdem quadrati, quotientis quadratus additus maiori datorum numerorum, quæsitum exhibebit numerum.

QVÆSTIO XV.

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς. καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετρά-

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum,

qui vtramque partem adsumens faciat quadratum. Sit diuidendus 20. in duos numeros. Exponantur duo numeri, vt quadrati eorum simul minores sint quàm 20. puta 2. & 3. & si vtrique adiiciatur 1 N. erunt quadrati ab ipsis, hic quidem 1 Q. + 4 N. + 4. Ille verò 1 Q. + 6 N. + 9. Si ergo ab vtroque abstulero 1 Q. qui vtique quadratus est, habebo quæsitos numeros, qui adsumentes videlicet quadratum, facient quadratum. Sed si abstulero 1 Q. relinquuntur, hinc quidem 4 N. + 4. Inde vero 6 N. + 9. Oportet ergo summam istorum, nimirum 10. N. + 13. æquari 20. & fit 1 N. $\frac{7}{10}$. Est igitur hic quidem $\frac{68}{100}$ ille verò $\frac{132}{100}$. & satisfaciunt quæstioni.

γωνον ὃς προσλαβὼν ἑκάτερον τῶν διῃρημένων ποιεῖ τετράγωνον. ἔστω τὸν κ. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς. ἔκθου δύο ἀριθμοὺς ὥστε τοὺς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνους ἐλάσσονας εἶναι μ° κ. ἔστω δὴ ὁ δύο καὶ ὁ τρία. καὶ προστεθέντος ἑκατέρῳ ς^ου ἑνός, ἔσονται οἱ ἀπὸ τούτων τετράγωνοι ὃς μὲν δυνάμεως μιᾶς, ςς δ μ° δ. ὃς δὲ δυνάμεως μιᾶς ςς ϛ μ° θ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ ἑκατέρου ἀφέλω τὴν δύναμιν, τουτέστι τὸν τετράγωνον ἕξομαι τοὺς ἐπιζητουμένους, οἱ προσλαμβάνοντες δηλονότι τετράγωνον ποιοῦσι τετράγωνον ἀλλ' ἐὰν ἀφέλω δύναμιν μίαν λοιποὶ ἔσονται. ὁ μὲν ςς δ μ° δ. ὁ δὲ ςς ϛ μ° θ. δεήσει ἄρα τὴν σύνθεσιν αὐτῶν, τουτέστιν ςς^οὺς ι. μ° ιγ. ἴσους εἶναι μονάσι κ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ^ι. ἔσται ὁ μὲν ξη^ι. ὁ δὲ ρλβ^ι. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XV.

IN hac quæstione nulla est difficultas. Cur velit Diophantus sumi duos numeros, quorum quadrati simul minores sint numero diuidendo nemo est qui non videat. Itaque ex operatione ipsa hunc formamus Canonem.

Sume duos numeros quorum quadrati simul minores sint numero diuidendo, horum quadratorum summam aufer à numero diuidendo, residuum diuide per duplum summæ sumptorum numerorum, orietur latus quæsiti quadrati, cuius duplum si ducas seorsim in sumptos numeros, & productis addas seorsim quadratos sumptorum numerorum, fient quæsita partes numeri diuidendi.

Vt si datus sit numerus 33. sume duos numeros 2. & 3. quorum quadrati simul faciunt 13. quo detracto de 33. supersunt 20. quæ diuisa per duplum ipsorum 2. & 3. nimirum per 10. dant 2. latus quadrati quæsiti, cuius duplum 4. ductum sigillatim in ipsos 2. & 3. facit 8. & 12. quibus si addas seorsim quadratos eorundem 2. & 3. nempe ipsi 8. quadratum 4. & ipsi 12. quadratum 9. fient 12. & 21. quæsitæ partes numeri 33. quibus addendo eundem quadratum 4. fiunt quadrati 16. & 25.

QVÆSTIO XVI.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum, à quo vterque detractus, relinquat quadratum. Numerus diuidendus iterum esto 20. Ponatur is qui quæritur quadratus à latere 1 N. cum tot vnitatibus, vt harum quadratus non superet 20. Esto ab 1 N. + 2. Quadratus ergo erit 1 Q. + 4 N. + 4. & patet si hinc auferantur 4 N. + 4. relinqui quadratum, & similiter si hinc auferantur 2 N. + 3. relinquitur quadratus, nimirum 1 Q. + 2 N. + 1. Statuo igitur, hac de causa, primum quidem 4 N. + 4. Secundum verò 2 N. + 3. Quæsitum autem 1 Q. + 4 N. + 4. & hic dempto vtroque illorum, facit quadratum. Superest vt ambo simul æquentur numero diuidendo. Sed

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον. ὃς λειπὸν ἑκάτερον ποιεῖ τετράγωνον. ἐπιτετάχθω πάλιν τὸν κ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ τετάχθω ὁ ζητούμενος τετράγωνος ἀπὸ πλευρᾶς ς^ου ἑνὸς καὶ μ° τοσούτων, ὥστε τὸν ἀπ' αὐτῶν μὴ ὑπερβάλλειν τὸν κ. ἔστω δὴ ς^ου ἑνὸς μ° β. ὁ ἄρα τετράγωνος ἔσται δυνάμεως μιᾶς ςς δ. καὶ δῆλον ὡς λοιπῶν ἀριθμοὺς δ μονάδας δ καταλείπει τετράγωνον, καὶ ὁμοίως λοιπῶν ςς^ους β μ° γ. καταλείπει τετράγωνον δυνάμεως μιᾶς, ςς β μ° α. τάσσω οὖν διὰ ταῦτα τὸν μὲν πρῶτον ςς δ μ° δ. τὸν δὲ δεύτερον ςς β μ° γ. τὸν δὲ ζητούμενον δύναμιν μίαν, ςς^ους δ μ° δ. καὶ λείψει ἑκατέρου ποιεῖ τετράγωνον. λοιπὸν δεῖ τοὺς δύο ἴσους εἶναι τῷ διαιρουμένῳ. ἀλλ' οἱ δύο ποιοῦσιν ςς^ους ϛ μ° ζ.

ταῦτα ἴσα μονάσιν κ̄. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιγ̄ ς. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ος̄ ς. ὁ δὲ δεύτερος μδ̄ ς. ὁ δὲ τετράγωνος ϡξα λς. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

ambo simul faciunt 6 N. + 7. Hoc ergo æquatur 20. Auferantur à similibus similia, & fit 1 N. $\frac{13}{6}$. erit ergo primus $\frac{76}{6}$ secundus $\frac{44}{6}$. Quadratus autem $\frac{961}{36}$. & faciunt postulata.

IN QVAESTIONEM XVI.

FRVSTRA laborat Scholiastes, vt implicatum Theorema nobis obtrudat quasi necessarium ad intelligendam operationem Diophanti, cùm illo carere possimus absque vllo artis dispendio. Etenim cùm ponat Diophantus quadratum quæsitum 1 Q. + 4 N. + 4. quem finxit à latere 1 N. + 2 Primò euidens est cur alteram partem numeri diuidendi ponat 4 N. + 4. quia scilicet, his ablatis à quadrato exposito, relinquitur quadratus, nimirum 1 Q. Deinde vt aliam partem numeri diuidendi reperiat, fingit alium quadratum ab 1 N. + certo vnitatum numero minore quàm 2. qui positus est in latere quæsiti quadrati, puta ab 1 N. + 1. fitque quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. quo detracto à quæsito quadrato 1 Q. + 4 N. + 4. remanet alia pars numeri diuidendi, nimirum 2 N. + 3. vnde etiam colligitur aliter atque aliter sumi posse partes numeri diuidendi, eodem etiam quadrato exposito manente, prout ab eo detrahentur alij atque alij minores quadrati.

Quod autem attinet ad limitationem quam præscribit Diophantus circa latus quæsiti quadrati, illud scilicet fingendum esse ab 1 N. + tot vnitatibus quarum quadratus non superet numerum diuidendum, hanc ego nec sufficientem puto, nec omnino necessariam. Sufficiens quidem non est, quia etsi obseruetur deueniri poterit ad absurdum. Nam ponatur latus quæsiti quadrati 1 N. + 4. erit ipse quadratus 1 Q. + 8 N. + 16. cuius vnitates minores sunt numero diuidendo 20. vnde constat obseruatam esse limitationem præscriptam. Si tamen ponatur pars vna numeri diuidendi 8 N. + 16. altera verò 2. N. + 7. quæ habetur si ab exposito quadrato auferatur quadratus à latere 1 N. + 3. nimirum 1 Q. + 6 N. + 9. erit summa duarum partium 10 N. + 23. æqualis 20. Quod est impossibile. Non est etiam necessaria huiusmodi conditio, quia quamuis non seruetur, ritè tamen perfici poterit æquatio. Etenim fingatur quadratus quæsitus à latere 1 N. + 5. erit is 1 Q. + 10. N. + 25. cuius vnitates excedunt numerum diuidendum 20. contrà id quod præcipit Diophantus. Tamen ponatur pars vna numeri diuidendi 2 N. + 9. quæ habetur si ab exposito quadrato auferatur quadratus à lateri 1 N. + 4. nimirum 1 Q. + 8 N. + 16. Rursus ponatur pars altera 1 N. + 4 $\frac{3}{4}$. quæ habetur si à quadrato exposito auferatur quadratus à latere 1 N. + 4 $\frac{1}{2}$. nimirum 1 Q. + 20. $\frac{1}{4}$. Erit partium summa 3 N. + 13 $\frac{3}{4}$. æqualis 20. Vnde fiet 1 N. $\frac{25}{12}$. Ad hypostases erunt quæsitæ partes $\frac{82}{12}$ & $\frac{158}{12}$. Quadratus quæsitus $\frac{7225}{144}$. à latere $\frac{85}{12}$. A quo quadrato si auferas sigillatim partes inuentas, remanent quadrati $\frac{6241}{144}$. & $\frac{5329}{144}$. quorum latera $\frac{79}{12}$. & $\frac{73}{12}$. Aliter igitur præscribenda est conditio huic operationi, nimirum. Ponatur quadratus quæsitus à latere 1 N. + quotlibet vnitatibus. Tum fingantur alij duo minores quadrati ab 1 N. + tot vnitatibus, vt harum quadratis sigillatim detractis à quadrato vnitatum primi quadrati, duo residua simul minora sint numero diuidendo. Hoc autem facillimum factu est, quia dato quolibet quadrato, licet inuenire infinitos minores quadratos, distantes à dato quadrato, interuallo minore quàm quilibet præscriptus numerus. Verbi gratia dato quadrato 25. si velim minores quadratos quibus sigillatim à 25. detractis, supersit minùs quàm 10. quia detrahendo 10. à 25. superest 15. oportet quæsitos quadratos minores quidem esse, quàm 25. sed maiores quàm 15. Quare cùm latus 25. sit 5. At latus proximè maius ipsius 15. sit 4. Patet quadratos omnes à lateribus inter 4. & 5. quales sunt à lateribus 4. 4 $\frac{1}{5}$. 4 $\frac{1}{4}$. 4 $\frac{1}{3}$. &c. satisfacere proposito. Hinc est cur posito quadrato quæsito 1 Q. + 10. N. + 25. quærendi erant duo quadrati, quibus sigillatim detractis à 25. residua simul minora essent quàm 20. Quia verò quolibet residuo existente minore quàm 10. sequebatur vtrumque simul minorem esse quàm 20. finxi latera quæsitorum quadratorum 1 N. + 4 & 1 N. + 4 $\frac{1}{2}$. quia singuli quadrati ipsorum 4. & 4 $\frac{1}{2}$ minores sunt quàm 10. vt ostensum est. Simili artificio rectificari poterit operatio illa qua deductione ad absurdum ostendimus insufficientiam Diophantææ limitationis. Etenim ponendo eundem quadratum quæsitum 1 Q. + 8 N. + 16. esto pars vna vt prius 8 N. + 16. Cùm ergo ex conditione præscripta constet vnitates vtriusque partis simul minores esse debere numero diuidendo 20. si in vna parte sint 16. vnitates, patet in alia debere esse minùs quàm 4. Oportet igitur fingere quadratum ab 1 N. + tot vnitatibus, vt earum quadratus detractus de 16. relinquat minus quàm 4. Oportet ergo quadratum illarum vnitatum maiorem esse quàm 12. minorem quàm 16. Quare cùm latus ipsius 16. sit 4. & latus proximè maius ipsius 12. sit 3. $\frac{1}{2}$ sumendus erit quilibet vnitatum numerus à 3 $\frac{1}{2}$ inclusiuè vsque ad 4. exclusiuè, quales sunt 3 $\frac{1}{2}$. 3 $\frac{3}{5}$. 3 $\frac{3}{4}$. & alij infiniti. Ita si fingas quadratum ab 1 N. + 3 $\frac{1}{2}$. erit quadratus 1 Q. + 7 N. + 12 $\frac{1}{4}$. quo detracto à quæsito quadrato 1 Q. + 8 N. + 16. superest secunda pars numeri diuidendi, nimirum 1 N. + 3 $\frac{3}{4}$. Quare summa partium fit 9 N + 19 $\frac{3}{4}$ æqualis 20. Qua æquatione resoluta, optimè satisfit proposito.

Ex dictis apparet quàm infinitis variis modis positiones institui possint, & solutiones diuersæ reperiri, nam primò quæsitus quadratus variè fingi potest. Deinde eodem manente quadrato quæsito, partes numeri diuidendi diuersimodè fingi possunt. Sed & Diophantus rursus lib. 3. quæst. 23. hanc ipsam retractans quæstionem alia operatione negotium absoluit, quam ibi explicabimus.

QVÆSTIO XVII.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt vterque cum quadrato qui proponetur faciat quadratum. Constitutum sit maiorem minoris esse triplum, vtrumque autem adscito 9. facere quadratum. Hîc a quocunque quadrato cuius latus sit multitudo quælibet numerorum + vnitatum 3. detraxero 9. residuum erit alter quæsitorum. Esto igitur minor 1 Q. + 6 N. erit ergo maior 3 Q. + 18 N. Oportet itaque & hunc adsumpto 9. facere quadratum. Sed facit 3 Q. + 18. N. + 9. Hoc ergo quadrato æquale est. Fingo quadratum a 2 N. − 3. & fit 1 N. 30. Erit igitur minor 1080. maior verò 3240. & vterque adiecto 9. facit quod postulatur.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μετὰ τοῦ ἐπιταχθέντος τετραγώνου ποιεῖ τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα, ἑκάτερον δ' αὐτῶν μετὰ μο θ ποιεῖν τετράγωνον. ἀφ' οὗ δ' ἂν τετραγώνου ἀπὸ πλήθους ςς καὶ μο γ ἀφέλω μο θ, τὸ λοιπὸν ἔσται εἷς τῶν ζητουμένων. ἔστω οὖν ὁ ἐλάσσων δυνάμεως α ςς ϛ. ὁ ἄρα μείζων ἔσται δυνάμεων γ ςς ιη. δεήσει ἄρα καὶ τοῦτον προσλαβόντα μο θ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ γίνονται δυνάμεις γ ςς ιη μο θ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ςς δύο λείψει μο τριῶν, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο λ. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μο ωπ. ὁ δὲ μείζων ͵γσμ. καὶ ποιοῦσι μετὰ μονάδων θ τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XVII.

OPERATIO Diophanti facilis est, & ei qui superiorum omnium quæstionum artificium perfectè comprehenderit, nihil hîc obscurum videbitur. Vnum moneo numeri 3 Q. + 18 N. + 9. latus non solùm fingi posse à quolibet Numerorum numero cuius quadratus superet 3 Q. cùm defectu vnitatum 3. lateris scilicet ipsius 9. vt faciat Diophantus qui ponit hoc latus 2 N. − 3. sed etiam fingi posse à numero Numerorum cuius quadratus superet 3. & cuius sextuplum sit minus quàm 18. adiectis tot vnitatibus quot sunt in latere quadrati dati 9. nimirum 3. Idcirco fingi potest hoc latus 2 N. + 3. vel 2 ½ N. + 3. & sic ad + 3. adiungi potest quilibet numerus Numerorum qui cadat inter 2. & 3. Hac ratione fingendo huiusmodi latus 2 N. + 3. fit quadratus 4 Q. + 12 N. + 9. æqualis 3 Q. + 18 N. + 9. & fit 1 N. 6. suntque numeri quæsiti 72. & 216. qui satisfaciunt postulatis.

Sed & sine magna perplexitate, quicquid dicat Xilander, per duplicatam æqualitatem solui quæstio potest. Nam ponatur minor numerus 1 N. est ergo maior 3 N. Quare vtrique adiiciendo 9. sunt quadrato æquandi 1 N. + 9. & 3 N + 9. Horum interuallum est 2 N. Sumendi ergo sunt duo numeri quorum mutuo ductu fiant 2 N. ita tamen vt tam in semisse summæ quàm in semisse interualli eorum reperiatur 3. latus quadrati adiecti 9. vt scilicet in æquationis vtraque parte reperiantur 9. vnitates, quibus vtrumque ablatis, maneat æquatio inter numeros & quadratos. Oportet ergo inuenire duos numeros, quorum mutuo ductu fiant 2. N. ita vt in eorum summa, & in eorum interuallo reperiantur vnitates 6. Quare sunt huiusmodi numeri 6. & ⅓ quorum interualli semissis 3 − ⅙ N. cuius quadratus 9 − 1 N. + $\frac{1}{36}$ Q. æquatur 1 N. + 9. & fit 1 N. 72. suntque quæsiti numeri vt supra 72. & 216. Sed sanè hac ratione operando vnica tantum reperiri potest solutio, cùm alii numeri præter 6. & ⅓ N. sumi non possint, quorum mutuo ductu fiant 2 N. ob causam allatam. Quare maluit Diophantus aliam inire viam, qua infinitæ solutiones contingunt. Cæterùm ex hac vltima operatione formari potest Canon satis expeditus.

Denominatorem rationis vnitate multatum diuide per quadruplum lateris propositi quadrati, per quotientis quadratum diuide rursus semissem denominatoris vnitate aucti, orietur minor quæsitorum numerorum.

Quoniam verò hîc desiderari videntur aliquot quæstiones non inelegantes, & ad hanc tractationem pertinentes, placet illas subnectere.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros in data ratione, cuius denominator ſit quadratus numerus: vt vterque cum numero qui proponetur faciat quadratum.

Sit maior minoris quadruplus, & vterque adſcito 10. faciat quadratum. Fingatur quadratus ab 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus ſuperet 10. puta ab 1 N. + 4. fiet quadratus 1 Q. + 8 N. + 16. vnde auferendo 10. reſiduum 1 Q. + 8 N. + 6. ſtatuatur pro minore quæſitorum numerorum, is enim adſcito 10. quadratum facit. Itaque maior erit 4 Q. + 32. N. + 24. qui adſcito 10. fiet 4 Q. 32. N. + 34. æquandus quadrato, quod facilè fiet, quia quadratorum numerus eſt quadratus, fingatur enim latus eius 2 N. − tot vnitatibus quarum quadratus ſuperet 34. puta 2 N. − 6. & fiet 1 N. $\frac{1}{28}$. Ad hypoſtaſes Minor numerus eſt $\frac{4929}{784}$. maior $\frac{19716}{784}$ & vtrique addendo 10 fiunt quadrati $\frac{12769}{784}$ & $\frac{27556}{784}$ quorum latera $\frac{113}{28}$ & $\frac{166}{28}$. Poſſet etiam hæc quæſtio per duplicatam æqualitatem ſolui, ſed vtendum eſſet eo modo duplicatæ æqualitatis quem tradit Diophantus quæſtione decima octaua tertij, cuius hic explicandi locus non eſt. Quare ipſam operationem hîc non afferam, ſed Canonem pulcherrimum qui ab ea elicitur non diſſimulabo.

Ducito denominatorem rationis vnitate multatum in datum numerum, Tum cape duos quadratos hoc producto differentes, ab horum minore ſi auferas datum numerum, relinquetur maior quæſitorum.

Vt in noſtra hypotheſi ducito 3. in datum numerum 10. fit 30. Cape duos quadratos quorum interuallum ſit 30. per Canonem vndecimæ huius; ita tamen vt minor illorum excedat 10. Infinitos tales reperies, quales ſunt $\frac{169}{4}$. & $\frac{49}{4}$. Igitur ſi à minore auferas 10. relinquitur $\frac{9}{4}$. maior quæſitorum numerorum, quare patet minorem eſſe $\frac{9}{16}$ & vtrique ſi addas 10. fiunt quadrati $\frac{49}{4}$. & $\frac{169}{16}$.

QVAESTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros in data ratione, cuius denominator ſit quadratus numerus, vt vterque multatus dato numero relinquat quadratum.

Sit maior minoris quadruplus, & vterque detracto 5. relinquat quadratum. Ponatur minor 1 Q. + 5. nam detracto 5. relinquet quadratum, erit ergo maior 4 Q. + 20. vnde auferendo 5. relinquitur 4 Q. + 15. æquandus quadrato, fingatur eius latus 2. N. + tot vnitatibus, quarum quadratus ſit minor quàm 15. vel etiam 2 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus ſuperet 15. Fingatur ergo 2. N. + 3. erit quadratus 4 Q. + 12. N. + 9. æqualis 4 Q. + 15. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. ſunt ergo quæſiti numeri 5 $\frac{1}{4}$. & 21. qui ſatisfaciunt propoſito. Poteſt etiam ſicut & præcedens per duplicatam æqualitatem ſolui quæſtio. Sed ob cauſam allatam omiſſa ipſa operatione, canonem inde depromptum afferre ſufficiet, nimirum.

Denominatorem rationis vnitate multatum ducito in datum numerum; Tum cape duos quadratos hoc producto differentes, maiori adde datum numerum, fiet maior quæſitorum;

QVAESTIO TERTIA.

Inuenire duos numeros in data ratione cuius denominator ſit quadratus numerus, vt vterque detractus à dato numero relinquat quadratum.

Sit maior minoris quadruplus, & vterque detractus à 20. relinquat quadratum. Ponatur minor 20 − 1 Q. hic enim detractus à 20. relinquit quadratum. Ergo maior erit 80 − 4 Q. quem ſi à 20. detrahas, relinquitur 4 Q. − 60. æquandus quadrato, fingatur eius latus à 2 N. − tot vnitatibut, vt hypoſtaſis quadrati reperiatur minor quàm 20. quia ſcilicet alter quæſitorum numerorum poſitus eſt 20 − 1 Q. Cùm igitur in huiuſmodi æquatione valor Numeri fiat ex quodam quadrato adſciſcente 60. & diuiſo per quadruplum ſui lateris, valor autem numeri debeat eſſe minor quàm latus ipſius 20. putà quàm 4 $\frac{1}{2}$. eò redacti ſumus vt inueniamus quadratum, qui auctus numero 60. & diuiſus per quadruplum ſui lateris det quotientem minorem quàm 4 $\frac{1}{2}$. Eſto is 1 Q. ergo $\frac{1 Q. + 60}{4 N}$ minor eſt quàm 4 $\frac{1}{2}$. & omnia in 4 N. fit 1 Q. + 60. minor quàm 18 N. qua reſoluta æquatione fit 1 N. 9 + ℞. 21. vel 9 − ℞. 21. ſeu per radicis approximationem 13 $\frac{3}{5}$. vel 4 $\frac{2}{5}$. Hinc ergo patet latus quadrati qui quæritur cadere neceſſariò inter 4 $\frac{2}{5}$. & 13 $\frac{3}{5}$. Ponatur igitur 10. & fingatur quadratus à latere 2 N. − 10. erit is 4 Q. − 40. N. + 100. æqualis 4 Q. − 60. & fit 1 N. 4. ſuntque quæſiti numeri 4 & 16.

Non ſecus etiam ac præcedentes ſoluetur hæc quæſtio per duplicatam æqualitatem, & Canon huiuſmodi ex illa operatione formabitur.

Datum numerum ducito in denominatorem rationis vnitate multatum. Tunc cape duos quadratos hoc producto differentes, & minorem aufer à dato numero. Reſiduum erit maior quæſitorum.

QVÆSTIO XVIII.

INVENIRE tres numeros, vt si quisque proximè ipsum sequenti partem sui quæ imperatur tribuat, & præterea datum numerum, dantes & accipientes æquales fiant. Imperetur vt primus det secundo sui quintantem, & adhuc vnitates 6. secundus tertio sui sextantem, & præterea 7. Tertium primo sui septantem & vnitates 8. Ponatur primus 5 N. secundus similiter 6 N. & secundus accipiens à primo 1 N. + 6. fit 7 N. + 6. Dans autem tertio sui sextantem, puta 1 N. & præterea 7. remanent 6 N. − 1. Superest vt & reliqui datis acceptisque quæ imperantur fiant 6 N. − 1. sed primus dans sui quintantem, & præterea vnitates 6. relinquitur 4 N. − 6. Oportet ergo vt accipiendo à tertio septantem, & vnitates 8. fiat 6 N. − 1. sed si 4 N. − 6. accipiant 2 N. + 5. fiunt 6 N. − 1. Igitur 2 N. + 5. est pars septima tertij, & præterea 8. Si ergo à 2 N. + 5. abstulero 8. residuum 2 N. − 3. est pars septima tertij. Ipse igitur tertius est 14 N. − 21. Superest vt & hic accipiens à medio sextantem, & vnitates 7. dans autem sui septantem & vnitates 8. fiat 6 N. − 1. sed dando sui septantem & vnitates 8. residuum est 12 N. − 26. accipiendo verò sextantem medij & vnitates 7. fit 13 N. − 19. Hoc igitur æquatur 6 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{18}{7}$. Erit ergo primus $\frac{90}{7}$ secundus autem $\frac{108}{7}$. Tertius denique $\frac{105}{7}$. & hi soluunt quæstionem.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς ἑαυτοῦ διδῷ μέρος τὸ ἐπιταχθὲν, καὶ ἔτι δοθέντα ἀριθμὸν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν πρῶτον τῷ δευτέρῳ διδόναι τὸ πέμπτον, καὶ ἔτι μονάδας ϛ. τὸν δὲ δεύτερον τῷ τρίτῳ τὸ ἕκτον καὶ μονάδας ζ. τὸν δὲ τρίτον τῷ πρώτῳ τὸ ἕβδομον καὶ μ° η. τετάχθω ὁ μὲν πρῶτος ςς ε. ὁ δὲ δεύτερος παρὰ μὲν τοῦ πρώτου λαβὼν ςς ἕνα μ° ϛ. ἀριθμοὶ ζ. μονάδες ϛ. δοὺς δὲ τὸ τρίτῳ τὸ ἕκτον ς ἕνα, καὶ μ° ζ. γίνονται ἀριθμοὶ ϛ λείψει μονάδος μιᾶς. λοιπόν ἐστι καὶ τοὺς λοιποὺς δόντας καὶ λαβόντας γίνεσθαι ςς ϛ λείψει μονάδος μιᾶς. ἀλλὰ δοὺς μὲν ὁ πρῶτος τὸ ἑαυτοῦ πέμπτον καὶ ἔτι μονάδας ϛ. γίνεται ςς δ λείψει μ° ϛ. δεήσει ἄρα καὶ λαβόντα αὐτὸν παρὰ τοῦ τρίτου τὸ ἕβδομον καὶ μ° η. γίνεσθαι ςς ϛ λείψει μονάδος μιᾶς. ἀλλ' ἐὰν ςς δ λείψει μ° ϛ προσλάβωσιν ςς β μ° ε. γίνονται ςς ϛ λείψει μονάδος μιᾶς. ἀριθμοὶ ἄρα β μ° ε. μέρος ἕβδομόν εἰσι τοῦ τρίτου καὶ ἔτι μονάδες η. ἐὰν ἄρα ἀπὸ ςς β μ° ε. ἀφέλω μονάδας η. λοιποὶ ςς β λείψει μ° γ. ἕβδομον μέρος εἰσὶ τοῦ τρίτου. αὐτὸς ἄρα ἔσται ςς ιδ λείψει μ° κα. λοιπὸν ἄρα δεήσει καὶ τοῦτον λαβόντα παρὰ μὲν τοῦ μέσου τὸ ἕκτον καὶ μ° ζ. δόντα δὲ τὸ ἕβδομον καὶ μ° η. γίνεσθαι ἀριθμοὺς ϛ λείψει μονάδος μιᾶς. ἀλλὰ δοὺς μὲν τὸ ἕβδομον καὶ μ° η. λοιπός ἐστι ςς ιβ λείψει μ° κϛ. λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ μέσου τὸ ἕκτον, καὶ μ° ζ. γίνονται ςς ιγ, λείψει μ° ιθ. ταῦτα ἴσα ἀριθμοῖς ϛ λείψει μονάδος μιᾶς, καὶ γίνεται ὁ ς° ιη ζ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ϙ ζ. ὁ δὲ δεύτερος ρη ζ. ὁ δὲ τρίτος ρε ζ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XVIII.

HÆC quæstio parum differt à vigesimaquinta primi, vt iam ibi monuimus. Nam quæruntur eo loco tres numeri, quorum quisque vbi proximè sequenti dederit certam sui partem, inter dantes & accipientes fiat æqualitas. Hîc vero præterea requiritur, vt præter certam sui partem quilibet det sequenti certum etiam numerum, quod parum aut nihil difficultatis adiicit operationi. Cæterùm quid de hac quæstione, & decima nona sentiam, dicam ad sequentem.

QVÆSTIO XIX.

DATVM * numerum diuidere in tres numeros, quorum quisque vbi proximè sequenti dederit partem sui quæ

ΤΟΝ * δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς ἀριθμοὺς τρεῖς ὅπως ἕκαστος τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως τῷ ἑξῆς αὐτοῦ διδῷ μέρος τὸ ἐπιτα-

χθὲν, καὶ ἔτι δοθέντα ς̅ ἵνα δόντες, καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν π̅. διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ πρῶτος τῷ δευτέρῳ, διδῷ τὸ πέμπτον, καὶ ἔτι μονάδας ς̅. ὁ δὲ δεύτερος τῷ τρίτῳ τὸ ἕκτον, καὶ μο ζ̅. ὁ δὲ τρίτος τῷ πρώτῳ τὸ ἕβδομον, καὶ μο η̅ ἵνα μετὰ τὴν ἀντίδοσιν γένωνται ἴσοι. * Τετάχθω ὁ πρῶτος ςς̅ ε̅. καὶ ὁ δεύτερος μο ιβ̅. καὶ μένει ὁ δεύτερος λαβὼν παρὰ μὲν τοῦ πρώτου πέμπτον ςς̅ ἕνα καὶ μο ς̅ γινόμενος ςο α̅. μο ιη̅. δοὺς δὲ τῷ τρίτῳ τὸ ἕκτον, καὶ ἔτι μο ζ̅. γίνεται ςο. α̅. μο θ̅. λοιπόν ἐστι, καὶ τοὺς λοιποὺς δόντας καὶ λαβόντας γίνεσθαι ςο ἑνὸς μο θ̅. ἀλλὰ δοὺς μὲν ὁ πρῶτος ἑαυτοῦ τὸ πέμπτον καὶ μο ς̅ λοιπός ἐστι ςς̅ δ̅ λείψει μο ς̅. δεήσει ἄρα καὶ αὐτὸν λαβόντα τὸ ἕβδομον τοῦ τρίτου καὶ μο. η̅. γίνεσθαι ςο ἑνὸς μο θ̅. καὶ ἐὰν λάβῃ μο ιε̅ λείψει ςς̅ γ̅. γίνεται ςο α̅ μο θ̅. μονάδες ἄρα ιε̅ λείψει ἀριθμῶν γ̅. ἕβδομον μέρος εἰσι τοῦ τρίτου, καὶ ἔτι μονάδες η̅. ἐὰν ἄρα ἀπὸ μονάδων ιε̅ λείψει ἀριθμῶν γ̅. ἀφέλωμεν μο η̅. ἕξομεν τὸ τοῦ τρίτου ἕβδομον μο ζ̅. λείψει ςς̅ γ̅. αὐτὸς ἄρα ἔσται μο μθ̅ λείψει ςς̅ κα̅. λοιπόν ἐστι καὶ τοῦτον λαβόντα μὲν παρὰ τοῦ μέσου τὸ ἕκτον καὶ μο ζ̅. δόντα δὲ τῷ πρώτῳ τὸ ἕβδομον, καὶ μο η̅. γίνεσθαι ςς̅ α̅ μο θ̅. ἀλλὰ δοὺς καὶ λαβὼν γίνεται μο μδ̅ λείψει ςς̅ ιη̅. ταῦτα ἴσα ςο ἑνὶ μονάσι θ̅. καὶ γίνεται ὁ ςο λγ̅ ιθ̅. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρο̅ ιθ̅. ὁ δὲ δεύτερος σκη̅ ιθ̅. ὁ δὲ τρίτος σιζ̅ ιθ̅.

imperatur, & præterea datum numerum, inter eos exiſtat æqualitas. Inſtitutum ſit numerum 80. diuidere in tres numeros, vt primus ſecundo det ſui quintantem, & præterea 6. Secundus tertio det ſui ſextantem, & vnitates 7. Tertius primo det ſui ſeptantem, & vnitates 8. & poſt mutuam contributionem, fiant ęquales. * Ponatur primus 5 N. ſecundus 12. & ſecundus accipiens à primo quintantem, puta 1 N. & præterea 6. fit 1 N. + 18. dans autem tertio ſextantem ſui & adhuc 7. relinquitur 1 N. + 9. Reſtat vt & reliqui datis & acceptis quæ imperantur, fiant 1 N. + 9. ſed primus cùm dedit ſui quintantem & vnitates 6. remanet 4. N. — 6. Oportet ergo vt accipiens ſeptantem tertij, & vnitates 8. fiat 1 N. + 9 ſed ſi accipiat 15 — 3 N. fit 1 N. + 9 Igitur 15 — 3 N. eſt ſeptima pars tertij, & præterea 8. Quamobrem ſi à 15 — 3 N. ſubducamus vnitates 8. habebimus tertij ſeptantem, nimirum 7 — 3. N. Ipſe igitur tertius erit 49 — 21 N. Supereſt vt & hic accipiens quidem à medio ſextantem & vnitates 7. dans autem primo ſui ſeptantem & vnitates 8. fiat 1 N. + 9. ſed datis acceptiſque quæ imperantur, fit 43 — 18. N. Hæc ergo æquantur 1 N. + 9. & fit 1 N. $\frac{34}{19}$. Erit igitur primus $\frac{170}{19}$. Secundus $\frac{228}{19}$. Tertius $\frac{217}{19}$.

IN QVÆSTIONES XVIII. ET XIX.

PEDIBVS eo in Xilandri ſententiam ſuſpicantis hanc & præcedentem quæſtionem huic quadratorum tractationi temerè inſertas eſſe, ſiue ab imperito librario vt putat ille, ſiue potius vt reor à ſciolo quopiam qui è tredecim libris Diophanti nonnullas in vnum colligens quæſtiones, eos quos habemus præ manibus Arithmeticorum libros conſarcinauit. Sanè ſi Diophanto tribuendæ ſunt, hæ duæ quæſtiones, in primum librum retrahendæ videntur, & collocandæ poſt vigeſimam quintam, à qua parum differunt, vt iam indicauimus; iſta præſertim, quæ illius operationem quàm proximè imitatur. Quidquid ſit, certiſſimum eſt totam huius propoſitionem adulterinam eſſe, & verba illa omnia quæ aſteriſcis incluſimus, eſſe penitus eliminanda, ſufficitque ſi loco propoſitionis ei præfigatur Ἄλλως. Verè enim à præcedenti non differt hæc quæſtio, ſed eſt eadem prorſus aliter tractata, quod familiare eſt Diophanto, vt conſtat ex decima octaua & decima nona primi, ex vigeſima & vigeſima prima, & rurſus ex vigeſima-tertia & vigeſima-quarta eiuſdem. Ac etiam ex octaua & nona huius. Sed & ipſam hanc operationem non conuenire numero 80. vel etiam alij certo & determinato numero optimè Xilander conuincit, ex eo quod Diophantus ſecundum quæſitorum ponit 12. quod nequaquam ritè in tali caſu fieri poſſet, niſi iam cognito numero ipſo qui quæritur, quod eſt abſurdum. Cæterùm omiſſa propoſitione, cætera bene habent, neque vno corrupto vocabulo vel numero aliquo deficiente, & ita benè & ad amuſſim præcedenti propoſitioni cuncta conueniunt, vt mirum ſit quomodo græculus ille tantum frontis habuerit, qui huic corpori caput alienum imponere tentauit.

Quod ſi quis fateatur quidem propoſitionem tractationi reliquæ non reſpondere, ſed contendat nihilominus, ab alia quæſtione quæ librariorum incuria exciderit, huc tranſlatam huiuſmodi

propoſitionem

propositionem, non valdè repugnabo, cùm simile quid accidisse libro quinto certissimis argumentis compertum habeam. Huic ergo vt satisfiat, quæstionem quoque, vt in Græco proposita est, soluemus cum Xilandro, quem sanè immeritò recentiorum quidam arguere conati sunt, & de analyseos inscitia criminari, quia scilicet calculi errore lapsus, falsos exhibuit solutionis numeros. Cùm tamen optimo vtatur logismo, quo saluo calculi error viris doctis non debet imputari. Itaque vt tanto viro debita seruetur reuerentia, in huius quæstionis tractatione ipsamet eius verba referre non pigebit, à mendis duntaxat numerorum, vt par est, expurgata. Cùm tres numeri qui quæruntur, 80. summam conficiant, neque dum eorum partes adduntur detrahunturque, huic summæ quicquam decedat, cùm quod vni aufertur, alteri adjiciatur, & nihil excidat amittaturue; intelligere licet, æqualitatem trium numerorum vltimò existentem eam fore, vt quiuis sit triens ex 80. hoc est 26. $\frac{2}{3}$. Hoc animaduerso ponamus primum esse 1 N. ab eoque auferamus quæ dat secundo $\frac{1}{5}$ N. + 6. relinquitur $\frac{4}{5}$ N. − 6 hoc cum septante tertij & 8. æquabitur 26 $\frac{2}{3}$. Ergo à 26 $\frac{2}{3}$ auferas $\frac{4}{5}$ N − 6. relinquuntur 32 $\frac{2}{3}$ − $\frac{4}{5}$ N. quod est 8. & septans tertij. Aufer 8. relinquitur septans tertij 24 $\frac{2}{3}$ − $\frac{4}{5}$ N. Ergo tertius est 172 $\frac{2}{3}$ − $\frac{28}{5}$ N. Huius & primi summa 172. $\frac{2}{3}$ − 4 $\frac{3}{5}$ N. detracta à 80. vt pote summà trium numerorum, relinquet scilicet secundum 4 $\frac{3}{5}$ N. − 92 $\frac{2}{3}$. Huic sextantem suum & 7. adimemus, nimirum $\frac{23}{30}$ N. − 8. $\frac{4}{9}$ relinquentur $\frac{23}{6}$ N. − 84. $\frac{2}{9}$. His si addamus $\frac{1}{5}$ N. + 6. quod ei à primo accedebat fient $\frac{121}{30}$ N. − 78. $\frac{2}{9}$ æqualia 26. $\frac{2}{3}$ ob causam suprà demonstratam, adde vtrobique 78. $\frac{2}{9}$ erunt $\frac{121}{30}$ N. æquales $\frac{944}{9}$. hoc est 363 N. æquantur 9440. (alterum per 30. alterum per 9. erat multiplicandum, pro his sume minimos 10. & 3. vt alibi docui) fit 1 N. $\frac{9440}{363}$ primus. Secundus $\frac{9786}{363}$. Tertius ergo $\frac{9814}{363}$ quorum summa $\frac{29040}{363}$ idest 80. Cætera omnia congruere ad postulata quæstionis experiendo deprehendes. Hucusque Xilander.

Verùm longè faciliùs ad vitandas fractionum molestias instituentur positiones hac arte. Esto tertius 7 N. hic ergo dando sui septantem + 8. remanebit 6. N. − 8. quod cum sextante secundi & 7. æquatur 26 $\frac{2}{3}$. Quare à 26. $\frac{2}{3}$ auferenda 6 N. − 1. remanet sextans secundi nimirum 27. $\frac{2}{3}$ − 6 N. ergo secundus 166. − 36 N. qui amisso sextante & 7. remanet 131 $\frac{1}{3}$ − 30 N. quod cum quintante primi & 6. æquatur 26 $\frac{2}{3}$. Quare si à 26 $\frac{2}{3}$ detrahas 137. $\frac{1}{3}$ 30 N. remanet quintans primi, nimirum 30 N. − 110. $\frac{2}{3}$. est ergo primus 150 N. 553. $\frac{1}{3}$. Restat vt trium summa conficiat 80. at conficit 121 N. − 387. $\frac{1}{3}$. Hæc ergo æqualia sunt 80. & fit 1 N. $\frac{1402}{363}$. Igitur tertius qui positus erat 7 N. erit $\frac{9814}{363}$. & alij qui prius.

QVÆSTIO XX.

INVENIRE tres quadratos, vt interuallum maximi & medij, ad interuallum medij & minimi datam habeat rationem. Statutum sit interuallum interualli triplum esse. Ponatur minor 1 Q. Medius verò 1 Q. + 2 N. + 1. à latere nimirum 1 N. + 1. Maximus igitur erit 1 Q. + 8 N. + 4. Oportet igitur 1 Q. + 8 N. + 4. æquari quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. (vt habeam 1 Q.) & præterea à tot vnitatibus, vt reliquæ species quæ in hoc quadrato reperientur, numerorum videlicet & vnitatum, non vtraque sua multitudine superent 8 N. & 4. vnitates, sed altera deficiat, altera excedat. Esto itaque à 3. vnitatibus. Ipse ergo quadratus erit 1 Q. + 6 N. + 9. æqualis vtique 1 Q. + 8 N. + 4. & fit 1 N. 2. $\frac{1}{2}$. Ad positiones. Erit maximus 30 $\frac{1}{4}$. minimus 6 $\frac{1}{4}$. Medius 12 $\frac{1}{4}$. & satisfaciunt quæstioni.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ μέσου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν τῆς ὑπεροχῆς εἶναι τριπλασίονα. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων δυνάμεως μιᾶς. ὁ δὲ μέσος δυνάμεως μιᾶς, ςς β. μονάδος μιᾶς, ἀπὸ πλευρᾶς δηλονότι ς ἑνὸς μονάδος μιᾶς. ὁ ἄρα μέγιστος ἔσται δυνάμεως μιᾶς ςς η μο δ. δεήσει ἄρα καὶ δύναμιν μίαν ςς η μο δ ἴσα εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον. ἀπὸ ς ἑνὸς ἵνα ἔχω τὴν δύναμιν, καὶ ἔτι μο τοσούτων ὥστε τὰ λοιπὰ ἐν τῷ τετραγώνῳ γινόμενα εἴδη τῶν ςς καὶ τῶν μο μὴ ὑπερβάλλειν κατὰ τὸ πλῆθος τοὺς ςς η. καὶ μο δ. ἑκάτερα. ἀλλ' ὃ μὲν ἐλλείπειν, τὸ δὲ πλεονάζειν. ἔστω δὲ μο γ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεως μιᾶς ςς ς. μο θ. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ ςς η μονάσι δ. καὶ γίνεται ὁ ς μο β καὶ ἥμισυ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μέγιστος μο λ. α δ. ὁ δὲ ἐλάχιστος μο ς. α δ. ὁ δὲ μέσος μο ιβ. α δ.

καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

L

IN QVAESTIONEM XX.

OPERATIO Diophanti satis est facilis, & ad docendum accommodata. Quod ait numeri quadrato æquandi 1 Q. + 8 N. + 4. latus fingendum esse ab 1 N. + tot vnitatibus, vt species quæ reperientur in quadrato fictitio non vtraque sua multitudine excedant 8 N. + 4. sic accipiendum est, vt talis statuatur in latere vnitatum numerus, cuius quadratus superet 4. sed cuius duplum sit minus quàm 8. Nam quod ait Xilander non inueniri temerè exemplum, vbi pauciore vnitates, pluresque sint Numeri, non solùm id temerè non inuenietur, sed nec vnquam poterit inueniri. Etenim vt numeri alicuius quadratus sit minor quàm 4. oportet ipsum numerum esse minorem quàm 2. vt verò eiusdem numeri duplum sit maius quàm 8. oportet ipsum numerum esse maiorem quam 4. At omnino impossibile est eundem numerum esse simul minorem quàm 2. & maiorem quàm 4. superest igitur, vt talis in latere fictitio ponatur vnitatum numerus, cuius quadratus sit maior quàm 4. & cuius duplum sit minus quàm 8. seu quod idem est, debet ille vnitatum numerus esse maior quàm 2. minor quàm 4. quales infiniti reperiuntur inter 2. & 4. sed Diophantus more suo ad vitandas fractiones, sumpsit 3. & finxit hoc latus 1. N. + 3. facilius tamen fingi potest huiusmodi latus absque tali circonspectione, si ponatur 1 N. − tot vnitatibus quarum quadratus superet 4. vt si ponatur 1 N. − 6. fiet quadratus 1 Q. − 12. N. + 36. æqualis 1 Q. + 8 N. + 4. vnde fit 1 N. 2 $\frac{1}{2}$ vt prius. Cæterùm inuentis semel tribus quadratis proposito satisfacientibus, licebit absque noua operatione infinitos alios reperire idem præstantes, si iam inuenti quadrati ducantur in quemlibet quadratum, nam fient alij quadrati in iisdem rationibus cum iam inuentis quadratis. Quamobrem & eorum interualla eandem inter se rationem habebunt, quam habent interualla iam inuentorum quadratorum. Ita si inuentos quadratos 5 $\frac{1}{4}$. 12 $\frac{1}{4}$. & 30 $\frac{1}{4}$. ducas in quadratum 4. fient tres alij 25. 49. 121. idem præstantes, nam maiorum interuallum 72. triplum est interualli minorum, quod est 24. & sic alios infinitos eiusdem naturæ licebit inuenire.

Per hanc etiam quæstionem reperientur tres quadrati in Arithmetica medietâte. Hoc enim nil aliud est quàm reperire tres quadratos, vt maiorum interuallum sit æquale interuallo minorum. Quare ponatur minimus 1 Q. medius 1 Q. + 2 N. + 1. erit igitur maximus 1 Q. + 4 N. + 2. cuius latus fingetur 1 N. − tot vnitatibus quarum quadratus superet 2. Verbi gratia 1 N. − 2 fiet quadratus 1 Q. − 4 N. + 4. æqualis 1 Q. + 4 N. + 2. & fiet 1 N. $\frac{1}{4}$. erunt ergo quæsiti quadrati $\frac{1}{16}$ $\frac{25}{16}$ $\frac{49}{16}$. & si eos per eundem quadratum 16. multiplices, fient alij 1. 25. 49. quos si rursus per eundem quadratum 4 multiplices, fient rursus alij 4. 100. 196. & sic infiniti reperientur. Sed & alia operatione subtili sanè & iucunda solui potest huiusmodi quæstio, etiamsi requiratur præterea vt medius quæsitorum quadratorum sit quilibet datus quadratus. Sint enim inueniendi tres quadrati in Arithmetica medietate, quorum medius sit 25. sume duplum ipsius 25. nempe 50. Quia ergo 50. componitur ex duobus quadratis 25. & 25. diuidatur rursus idem 50. in duos alios quadratos per decimam huius, sintque hi 1. & 49. dico istos esse minimum & maximum quæsitorum, quorum 25.
5. 1. porif. est medius arithmeticè proportionalis, quia enim summa ipsorum 1. & 49. ex constructione, dupla est ipsius 25.¹, erit 25. inter eos medius in arithmetica medietate. Quod erat propositum. Vnde cùm idem 50. rursus diuidi possit in duos alios quadratos infinitis varijs modis, constat infinitos alios duos quadratos reperiri posse, inter quos 25. sit medius arithmeticè proportionalis.

QVÆSTIO XXI.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν τὸν λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ς^ο ἑνός. ὁ δὲ δεύτερος μονάδος μιᾶς ςς β. ἵν᾽ ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνος προσλαβὼν τὸν δεύτερον ποιῇ τετράγωνον. λοιπόν ἐστι, καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ᾽ ὁ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνος προσλαβὼν τὸν πρῶτον. ποιεῖ δυνάμεις δ ἀριθμοὺς ε μονάδα μίαν. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς β λείψει μ^ο β. αὐτὸς ἔσται δυνάμεων δ, μ^ο δ λείψει ςς η. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ ιγ^ν. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος γ ιγ^ν. ὁ δὲ δεύτερος ιθ ιγ^ν καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros, vt vtriusque quadratus altero numero adiecto, faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. secundus 1 + 2 N. vt quadratus primi absumens secundum, quadratum faciat. Superest vt & quadratus secundi primo adiecto faciat quadratum, sed quadratus secundi adiecto primo efficit 4 Q. + 5 N. + 1 Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à 2 N. − 2. nempe 4 Q. + 4 − 8 N. & fit 1 N. $\frac{3}{13}$. Erit igitur primus $\frac{3}{13}$. secundus $\frac{19}{13}$. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO XXII.

INVENIRE duos numeros vt vtriusque quadratus, altero numero dempto quadratum faciat. Ponatur minor 1 N. & quotquot libuerit vnitatum, esto itaque 1 N. + 1. Maior autem sit quadratus minoris dempto 1 Q. vt minoris quadratus detracto maiore relinquat quadratum. Quia ergo minoris quadratus est 1 Q. + 2 N. + 1. vtique maior dempto 1 Q. erit 2 N. + 1. & patet minoris quadratum dempto maiore facere quadratum. Oportet itaque & maioris quadratum, puta 4 Q. + 4 N. + 1. detracto minore facere quadratum; sed facit 4 Q. + 3 N. Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à 3. N. & fit 1 N. $\frac{3}{5}$. erit igitur minor $\frac{8}{5}$. Maior $\frac{11}{5}$. & satisfaciunt proposito.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος λείψει τοῦ λοιποῦ ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς α. καὶ μ° ὅσων δή ποτε, ἔστω δὴ μονάδος μιᾶς. ὁ δὲ μείζων τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετραγώνου παρὰ δύναμιν μίαν, ἵν' ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος λείψει τοῦ μείζονος ποιεῖ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνός ἐστι δυνάμις α ςς^{οἱ} β μονὰς α. ὁ ἄρα μείζων ἔσται τῶν μὲν τὴν δύναμιν ςς β μ° μιᾶς, καὶ μένει ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τετράγωνος λείψει τοῦ μείζονος ποιῶν τετράγωνον. δεῖ δὴ καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ μείζονος δυνάμεις δ ςς^{οὺς} δ μονάδα μίαν, λείψει τοῦ ἐλάττονος ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ ποιεῖ δυνάμεις δ ςς^{οὺς} γ· ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάττω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς γ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ^{ε}. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων η^{ε}. ὁ δὲ μείζων $\iota\alpha^{\varepsilon}$. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVÆSTIONEM XXI ET XXII.

NIHIL hîc notatu dignum, quod non satis tum à Scholiaste, tum à Xilandro sit animaduersum.

QVÆSTIO XXIII.

INVENIRE duos numeros, vt vtriusque quadratus adscita numerorum summa faciat quadratum. Ponatur minor 1 N. Maior verò 1 N. + 1. vt quadratus minoris, nimirum 1 Q. adsumens vtrumque puta 2 N. + 1. faciat quadratum. Superest vt & quadratus maioris adsumens vtriusque summam faciat quadratum. Sed maioris quadratus adiecta vtriusque summa fit 1 Q. + 4 N. + 2. Hoc ergo æquale est quadrato. Formo quadratum ab 1 N. − 2. ipse igitur quadratus erit 1 Q. + 4 − 4 N. & fit 1 N. $\frac{2}{8}$. Esto ergo minor $\frac{2}{8}$. maior $\frac{10}{8}$. & soluunt quæstionem.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν συναμφότερον ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς ἑνός. ὁ δὲ μείζων ς α μονάδος α. ἵνα ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος, τουτέστι δύναμις μία προσλαβοῦσα συναμφότερον, τουτέστιν ςς^{οὺς} β μονάδα α ποιεῖ τετράγωνον. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνον προσλαβόντα συναμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνος προσλαβὼν συναμφότερον γίνεται δύναμις α ςς^{οὶ} δ μ° β. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς α λείψει μ° β. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δύναμις α μ° δ λείψει ςς δ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς β^{η}. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων β^{η} ὁ δὲ μείζων ι^{η}. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXIII.

OBSCVRVM fortassis alicui videatur, quanam arte suas positiones ita instituat Diophantus, vt summa vtriusque numeri addita quadrato minoris faciat quadratum. Id autem sic consequitur, fingit quadratum ab 1 N. + quotlibet vnitatibus, verbi gratia ab 1 N. + 1. fitque quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. Quare si ponamus summam numerorum 2 N. + 1. petet eam additam ad 1 Q. facere quadratum. Sed tunc vt satisfiat vni postulatorum, oportet 1 Q. esse quadratum vnius nu-

merorum quæsitorum. Is ergo erit 1 N. quo detracto ex vtriusque summa quæ posita est 2 N. + 1. manet alter 1 N. + 1. Vnde patet priorem illum quadratum fingi potuisse à quolibet numero Numerorum + quotlibet vnitatibus. Verbi gratia fingatur à 2 N. + 3. fiet quadratus 4 Q. + 12 N. + 9. Quare ponemus summam numerorum quæsitorum 12 N. + 9. ac proinde alterius quadratus cùm debeat esse 4 Q. erit alter ille 2 N. quo detracto à summa remanet alter 10 N. + 9. Itaque si hac operatione quæstionem absoluere libet, restat vt maioris quadratus, nimirum 100. Q. + 180 N. + 81. adscita vtriusque summa nempè 12 N. + 9. faciat quadratum, facit autem 100. Q. + 192 N. + 90. Hoc ergo æquatur quadrato, cuius latus formo abs 10 N. − 30. & fit 1 N. $\frac{45}{44}$ sunt ergo quæsiti numeri $\frac{45}{22}$. & $\frac{423}{22}$.

Quod si velimus vti proprietate numerorum vnitate differentium, quibus accidit vt eorum summa æquetur interuallo quadratorum eorundem (quia scilicet ex summa numerorum in eorum differentiam, ' fit interuallum quadratorum, & posita differentia numerorum 1. productum ex summa in differentiam æquatur ipsi summæ) longè minore negotio rem expediemus. Etenim ponatur minor quæsitorum quilibet Numerorum numerus, puta 2 N. Tum ponatur maior idem Numerorum numerus + 1, puta 2 N + 1. patet ex demonstratis vtriusque summam additam minoris quadrato efficere quadratum maioris. Restat igitur solùm vt eadem summa cum quadrato maioris faciat quadratum, &c. Et ad hanc numerorum proprietatem fortasse respexit Diophantus, cùm ponat minorem numerum 1 N. maiorem 1 N. + 1 vnde sanè ex illius operatione facillimum elicio Canonem.

Quemlibet quadratum binario multatum diuide per duplum sui lateris auctum quaternario, orietur minor quæsitorum, & addita vnitate fiet maior.

QVÆSTIO XXIV.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος λείψει συναμφοτέρου ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ϛ̄ ᾱ. ὁ δὲ μείζων ϛ̄ ᾱ, μονάδος μιᾶς. ἵνα ὁμοίως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνος λείψει συναμφοτέρου ποιῇ τετράγωνον. δεήσει ἄρα καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον λείψει συναμφοτέρου ποιεῖν τετράγωνον. ἔσται ἄρα δύναμις μία λείψει ϛ̄ β̄ μονάδος μιᾶς. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ϛ̄ ᾱ λείψει μ° γ̄. δύναμις ἄρα μία, μ° θ̄ λείψει ϛ̄ ϛ̄. ἴσα εἰσὶ δυνάμει μιᾷ λείψει ϛ̄ β̄ μονάδος μιᾶς. καὶ γίνεται ὁ ϛ̄ μ° β̄ καὶ ἥμισυ. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ° β̄ καὶ ἥμισυ, ὁ δὲ μείζων μ° γ̄ καὶ ἥμισυ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros vt vtriusque quadratus dempta vtriusque numeri summa faciat quadratum. Ponatur minor 1 N. maior 1 N. + 1. vt similiter maioris quadratus dempta vtriusque summa faciat quadratum. Oportet igitur & minoris quadratũ dempta summa vtriusque facere quadratum. Facit autem 1 Q. − 2 N. − 1. hoc æquatur quadrato. Formo quadratum à latere 1. N. − 3. Igitur 1 Q. + 9 − 6 N. æquatur 1 Q. − 2 N. − 1. & fit 1 N. 2 ½. erit igitur minor 2 ½. maior 3 ½. & satisfaciunt proposito.

IN QVÆSTIONEM XXIV.

HIC etiam euidens est Diophantum vsum proprietate numerorum quorum interuallum est vnitas, quibus, vt ostensum est, accidit summam ipsorum æquari interuallo quadratorum ab ipsis, vnde si quæsiti numeri ponantur vnitate differentes, patet eorum summam à maioris quadrato detractam relinquere quadratum minoris. Porro ex ipsa operatione elicitur huiusmodi Canon.

Quadratum quemlibet vnitate auctum diuide per duplum sui lateris binario multatum, orietur minor quæsitorum, cui addita vnitate fiet maior.

Possunt tamen etiam aliter institui positiones nulla habita ratione numerorum vnitate differentium. Nam ponatur primus Numerorum numerus quilibet + quotlibet vnitatibus. Verbi gratia, ponatur 1 N. + 3. erit eius quadratus 1 Q. + 6 N. + 9. Quare statuatur summa vtriusque 6 N. + 9. vt detracta à primi quadrato relinquat quadratum. Igitur cùm primus sit 1 N. + 3. hunc auferendo à 6 N. + 9. remanebit secundus 5 N. + 6. Restat vt ab huius quadrato qui est 25 Q. + 60 N. + 36. detrahendo summam vtriusque, nimirum 6 N. + 9. relinquatur quadratus, at remanent 25. Q. + 54 N. + 27. Hæc ergo æquantur quadrato sit eius latus 5. N. − 9. fiet 1 N. ⅜. eruntque quæsiti numeri 3. ⅜ & 7 ⅞.

QVÆSTIO XXV.

INVENIRE duos numeros, vt summæ illorum quadratus, adiecto alterutro quadratum faciat. Quandoquidem 1 Q. siue ei adiicias 3 Q. siue 8 Q. quadratum facit. Pono quæsitorum numerorum alterum 3 Q. alterum 8 Q. quadratum vero summæ 1 Q. sic enim quadratus summæ adiecto alterutro facit quadratum. Et quia summa vtriusque est 11 Q. quadratus summæ erit 121 QQ. sed est quoque 1 Q. Igitur 121 QQ. æquantur 1 Q. Quamobrem & latus lateri æquale est. Proinde 1 N. æqualis est 11. Q. Omnia per numerum diuidantur. 11 N. æquales erunt 1. & fit 1 N. $\frac{1}{11}$. Ad positiones erit alter $\frac{3}{121}$. alter $\frac{8}{121}$. Quadratus verò summæ $\frac{121}{14641}$. Et satisfit quæstioni.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συναμφοτέρου προσλαβὼν ἑκάτερον ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ δύναμις μία ἐάν τε προσλάβῃ δυνάμεις $\bar{\gamma}$. ἐάν τε δυνάμεις $\bar{\eta}$ ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τῶν ἐπιζητουμένων ἀριθμῶν τὸν μὲν δυνάμεις γ. τὸν δὲ δυνάμεις $\bar{\eta}$. τὸν δὲ ἀπὸ συναμφοτέρου δυνάμεως μιᾶς, καὶ μένει ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου προσλαβὼν ἑκάτερον ποιῶν τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ συναμφότερός ἐστι δυνάμεις $\bar{\iota\alpha}$. ὁ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου ἔσται δυναμοδυνάμεων $\bar{\rho\kappa\alpha}$. ἀλλ᾽ ἔστι καὶ δύναμις μία. δυναμοδυνάμεις ἄρα $\bar{\rho\kappa\alpha}$ ἴση δυνάμει μιᾷ, ὥστε καὶ πλευρὰ ἴση. ἀριθμὸς ἄρα εἷς ἴσος δυνάμεσιν $\bar{\iota\alpha}$. καὶ πάντα παρὰ ἀριθμόν. ἀριθμοὶ ἄρα $\bar{\iota\alpha}$. ἴσοι μονάδι μιᾷ, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς, $\bar{\alpha}^{\iota\alpha}$. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν $\bar{\gamma}^{\rho\kappa\alpha}$. ὁ δὲ ἕτερος $\bar{\eta}^{\rho\kappa\alpha}$. ὁ δὲ ἀπὸ συναμφοτέρου $\bar{\rho\kappa\alpha}^{\alpha\chi\mu\alpha}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXV.

POTERAT analysis Diophantæa breuius explicari sic. Quandoquidem 1 Q. siue ei addicias 3 Q. siue 8 Q. quadratum facit. Pono quæsitorum numerorum alterum 3. Q. alterum 8. Q. Quadratum verò summæ 1 Q. erit ergo ipsa summa 1 N. Sed etiam 11 Q. Igitur 1 N. æquatur 11 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{11}$ Porro manifestum est loco 3. & 8. sumi posse quoslibet alios quadratos vnitate multatos, veluti 15. 24. 35. quorum duo quilibet nota Quadrati affecti, statui possunt pro quæsitis numeris, posito scilicet summam illorum esse semper 1 N. & eius quadratum 1 Q. Nam & quadratus summæ variari potest, & loco 1 Q. poni quilibet quadratorum numerus quadratus, vt 4 Q. 9 Q. 16 Q. Sed tunc oportet quæsitos numeros, statui quadratos multatos eodem ipso quadrato qui ponitur pro quadrato summæ, vt si ponatur quadratus summæ 4 Q. Ponentur quæsiti numeri 5 Q. & 12 Q. & sic de aliis. Præterea dignum est animaduersione hanc quæstionem non ad duos tantùm, sed ad quotlibet numeros extendi posse, eodem prorsus artificio. Quærantur enim quatuor numeri vt summæ illorum quadratus quolibet ex ipsis adiecto quadratum faciat. Pone quæsitos numeros, 3 Q. 8 Q. 15 Q. 24 Q. & quadratum summæ 1 Q. erit ergo summa 1 N. sed est quoque 50 Q. Igitur fit 1 N. $\frac{1}{50}$ & sunt quæsiti numeri $\frac{3}{2500}$ $\frac{8}{2500}$ $\frac{15}{2500}$ $\frac{24}{2500}$. quorum summa $\frac{1}{50}$ cuius quadratus quolibet illorum adiecto quadratos facit, vt patet. Ex his demum Canonem eliciemus.

Sume tot quadratos, eodem aliquo quadrato multatos, quot petuntur numeri, hos ducito sigillatim in ablatitium quadratum, producta seorsim diuisa per quadratum summæ sumptorum numerorum quæsitos exhibent numeros.

QVÆSTIO XXVI.

INVENIRE duos numeros vt summæ illorum quadratus, vtroque dempto faciat quadratum. Primùm accipio aliquem quadratum, à quo auferendo duos aliquos numeros, superfit quadratus. Esto 16. is enim detractus siue 12, siue 7. relinquit quadratum. Statuo ergo illos in quadrato, alterum quidem pono 12 Q. alte-

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου λείψει ἑκατέρου ποιῇ τετράγωνον. λαμβάνω πρῶτον τινὰ τετράγωνον. ἀφ᾽ οὗ ἀφελὼν δύο τινὰς ἀριθμοὺς καταλείπω τετράγωνον. ἔστω δὲ ὁ $\bar{\iota\varsigma}$. αὐτὸς γὰρ ἐάν τε λείψῃ μονάδας $\bar{\iota\beta}$ γίνεται τετράγωνος. ἐάν τε πάλιν $\mu^{\circ}\ \bar{\zeta}$. γίνεται τετράγωνος. τάσσω οὖν πάλιν αὐτοὺς ἐν δυνάμει, καὶ τὸν μὲν δυνάμεων

ιβ. τῶν δὲ δυνάμεων ζ. τὸν δὲ ἀπὸ συναμφοτέρου δυνάμεων ιϛ. καὶ μένει ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου λείψει ἑκατέρου ποιῶν τετράγωνον. δεήσει λοιπὸν τὸν ἀπὸ συναμφοτέρου ἴσον γίνεσθαι δυνάμεσι ιϛ. ὥστε καὶ τὴν πλευρὰν τῇ πλευρᾷ, τουτέστι δυνάμεις ιθ ἴσας ἀριθμοῖς δ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ ιθ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρϞβ τξα. ὁ δὲ δεύτερος ριβ τξα. καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

alterum 7 Q. At summæ quadratum 16 Q. sic enim summæ quadratus, vtroque dempto relinquit quadratum. Oportet itaque summæ quadratum æqualem esse 16 Q. Quare & latus lateri, hoc est 19 Q. æquari oportet 4 N. & fit 1 N. $\frac{4}{19}$. erit igitur primus $\frac{192}{361}$. secundus $\frac{112}{361}$. & satisfaciunt proposito.

IN QVAESTIONEM XXVI.

VARIARI possunt hic positiones sicut in præcedente. Nam posito quadrato summæ 16 Q. statuemus pro quæsitis duos quoslibet numeros, qui detracti à 16. sigillatim relinquant quadratos, quales infiniti reperiuntur, si ponas eos 7 Q. & 15 Q. fiet eorum summa 22 Q. æqualis 4 N. & erit 1 N. $\frac{2}{11}$. & quæsiti numeri $\frac{28}{121}$ & $\frac{60}{121}$. Rursus autem loco 16. Q. statui potest quadratus summæ quilibet alius quadratus, puta 25 Q. 36. Q. & sic in infinitum. Vnde sanè diuersarum solutionum ampla seges suppetit.

Potest etiam huiusmodi quæstio ad quotlibet extendi numeros. Vt si petantur quatuor numeri vt summæ quadratus quolibet illorum detracto relinquat quadratum. Ponatur summæ quadratus 25 Q. ipsi verò sint 21 Q. 16. Q. 9. Q. 24 Q. horum summa fit 70 Q. æqualis 5 N. est ergo 1 N $\frac{1}{14}$ suntque quæsiti numeri $\frac{21}{196}$ $\frac{16}{196}$ $\frac{9}{196}$ $\frac{24}{196}$. quorum summa $\frac{5}{14}$ à cuius quadrato si auferantur sigillatim inuenti numeri semper relinquitur quadratus. Hinc quoque fiet huiusmodi Canon.

Sume quadratum numerum, à quo aufer sigillatim tot alios quadratos, quot petuntur numeri, residua ducito sigillatim in sumptum quadratum, producta seorsim diuisa per quadratum summa eorundem residuorum, quæsitos exhibent numeros.

Cæterùm hic desiderari videtur huiusmodi quæstio, quæ soluitur eodem artificio.

Inuenire duos numeros, vt summæ illorum quadratus à quolibet illorum detractus, quadratum relinquat.

Ponatur summæ quadratus 1 Q. quem auferendo tum à 5 Q. tum à 10 Q. cùm relinquantur quadrati, ponantur quæsiti numeri 5 Q. & 10 Q. Erit igitur illorum summatum 1 N. tum 15 Q. Quare fit 1 N. $\frac{1}{15}$. suntque quæsiti numeri $\frac{1}{45}$. & $\frac{2}{45}$. & satisfaciunt proposito. Variari positiones possunt iisdem modis, quibus & præcedentium quæstionum. Et eodem modo ad plures numeros extendetur quæstio, & demum formabitur iste Canon.

Quadratum quemlibet adde totidem aliis quadratis, quot petuntur numeri. Aggregata ducito sigillatim in addititium quadratum, producta seorsim diuisa per quadratum eorundem aggregatorum, quæsitos exhibent numeros.

QVÆSTIO XXVII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν προσλαβὼν ἑκάτερον ποιῇ τετράγωνον. τῶν δὲ τετραγώνων αἱ πλευραὶ συντεθεῖσαι ποιῶσι τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν. ἐπιτετάχθω δὴ ποιεῖν τὸν ϛ. ἐπεὶ οὖν ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὧν ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονός ἐστι τετραπλασίων παρὰ μονάδα, ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν προσλαβὼν τὸν ἐλάττονα ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τὸν μὲν ἐλάσσονα ςου ἑνός, τὸν δὲ μείζονα ςς δ λείψει μονάδος μιᾶς, καὶ συμβαίνει τὸν ὑπ᾽ αὐτῶν προσλαβόντα τὸν ἐλάσσονα ποιεῖν τετράγωνον. δεήσει ἄρα καὶ ὁμοίως τὸν ἐπ᾽ αὐτῶν προσλαβόντα τὸν μείζονα τουτέστιν ςςοὺς δ λείψει μονάδος μιᾶς, ποιεῖν τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ ἢ μονάδων ϛ λείψει τῶν τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐλάσσο-

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione adscito alterutro quadratum faciat, quadratorum autem latera iuncta datum conficiant numerum. Imperetur vt faciant 6. Iam cùm duo sunt numeri, quorum maior est quadruplum alterius vnitate deminutum, productus eorum multiplicatione adscito minore facit quadratum. Pono ergo minorem 1 N. maiorem verò 4 N. — 1. & contingit productum multiplicationis addito minore fieri quadratum. Oportet ergo similiter eundem productum adscito maiore, puta 4 N. — 1. fieri quadratum, cuius latus sit 6. cum defectu numerorum qui sunt latus mino-

ris quadrati, vt ſcilicet (quod requirit quæſtio) duorum latera coniuncta faciant 6. ſed productum multiplicationis adiecto maiore facit 4 Q. + 3 N. − 1. Quadratus autem à latere 6 − 2 N. eſt 4 Q. + 36 − 24 N. Hæc ergo æquantur inter ſe, & fit 1 N. $\frac{37}{27}$. Ad poſitiones. Poſueram minorem 1 N. erit ergo $\frac{37}{27}$. maiorem verò poſueram 4 N. − 1. erit igitur $\frac{121}{27}$. & conſtat propoſitum.

νος ἀριθμῶν, ἵνα μὴ τὸ πρόβλημα συντεθεῖσαι τῶν δύο αἱ πλευραὶ ποιῶσι μονάδας ϛ ἀλλ᾽ ὁ μὲν ὑπ᾽ αὐτῶν προσλαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ δυνάμεις δ̅ ϛϛ γ̅ λείψει μονάδος μιᾶς. ὁ δὲ ἀπὸ μονάδων ϛ̅ λείψει ἀριθμῶν β̅. δυνάμεις δ̅ μονάδας λϛ̅ λείψει ϛϛ κδ̅. ταῦτα ἴσα ἀλλήλοις. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς λζ κζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν ἐλάσσονα ἀριθμοῦ ἑνός, ἔσται λζ κζ. τὸν δὲ μείζονα ϛϛ δ̅ λείψει μονάδος α. ἔσται ρκα κζ. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVÆSTIONEM XXVII.

BENE' monet Scholiaſtes lemma quod aſſumit Diophantus, non de ſolis quadruplis, ſed de omnibus numeris intelligendum eſſe qui ſint plani ſimiles. Quare ſic vniuerſaliter proponendum eſt & demonſtrandum.

Datis duobus numeris, quorum maiori de ſit vnitas, quo minus ad minorem habeat rationem quadrati ad quadratum, productus ex mutua datorum multiplicatione adſumpto minore illorum quadratus fit.

Sint duo numeri A B & D. tales vt addita vnitate B C maiori A B, fiant plani ſimiles A C. & D. dico productum ex A B in D adſcito ipſo D fieri quadratum.

A . . . . B . C
D 2.

Quia enim A C. & D ſunt plani ſimiles, [1] productus ex A C in D quadratus eſt. At productus ex A C in D [2] æquatur productis ex A B & ex B C in D. productus. autem ex vnitate B C in D. æqualis eſt ipſi D. Igitur productus ex A B in D adſumpto ipſo D. quadratus eſt. Quod demonſtrandum erat.

1. noni.
2. ſecundi.

Hinc patet poſitiones infinitis aliis modis inſtitui potuiſſe. Nam poſito minore 1 N. poni poterat maior non ſolùm 4 N. − 1. vt fecit Diophantus, ſed etiam 9 N. − 1. 16 N. − 1. & ſic in infinitum. Vel etiam poſito minore 3 N. poni poſſet maior 12 N. − 1. vel 27 N. − 1. &c. & poſito rurſus minore 9 N. poneretur maior 16. N. − 1. vel 25 N. − 1. &c. Ex ipſa autem operatione elicietur iſte Canon.

Quadratum quemlibet vnitate multatum adde duplo producti ex latere ipſius in ſummam datam laterum, per aggregatum diuide quadratum ſumma laterum vnitate auctum, orietur minor quæſitorum, quem ſi ducas in quadratum initio ſumptum, productus vnitate multatus erit maior quæſitorum.

Sit data ſumma laterum 7. Cape quemlibet quadratum vnitate multatum, puta 8. cui adde 42 qui fit bis ex 7. in latus quadrati ſumpti, erit aggregatum 50. per quod diuide quadratum ipſius 7. vnitate auctum, puta 50. fiet 1. minor quæſitorum, quem ſi ducas in quadratum 9. initio ſumptum, productus vnitate multatus, nimirum 8. erit maior numerus. Itaque 1. & 8. ſatisfaciunt propoſito. Quamobrem in huiuſmodi Canone tradendo allucinatus eſt Raphael Bombellius lib. 3. Problemate 88. & è falſo Canone falſos elicuit ſolutionis numeros $\frac{50}{47}$ & $\frac{403}{48}$. quos minimè ſoluere quæſtionem experiendo deprehendes.

Cæterùm ſicut per ſuum lemma Diophantus ſic ſuas inſtituit poſitiones, vt productus adſcito minore numero faciat quadratum, ſic poterimus eas rurſus ita inſtituere, vt productus adſcito maiore numero faciat quadratum, tali præmiſſo lemmate.

Datis duobus numeris, quorum minori deſit vnitas quo minus ad maiorem, habeat rationem quadrati ad quadratum, productus ex datorum multiplicatione adſumpto maiore quadratum facit.

A 9.
B . . . C . D

Sit maior A, & B C minor, cui addita vnitate C D fiant A. & B D. plani ſimiles, dico productum ex A in B C adſumpto ipſo A facere quadratum. Etenim ex A in B D fit quadratus. Sed productus ex A in B D æquatur productis ex A in B C. & in C D. & productus ex A in C D æquatur ipſi A. Igitur productus ex A in B C. addito ipſo A. fit quadratus. Quod demonſtrandum erat,

Hoc ſuppoſito ſtatuatur maior 4 N. minor 1 N. − 1. ſic enim productus 4 Q. − 4. N. adſcito maiore facit quadratum 4 Q. reſtat vt idem productus adſcito minore, faciat quadratum, cuius latus ſit 6 − 2 N. facit autem 4 Q. − 3 N. − 1. Hoc ergo æquatur quadrato 4 Q. − 24 N. + 36. & fit 1 N. $\frac{37}{21}$ ſuntque quæſiti numeri $\frac{148}{21}$ & $\frac{16}{21}$. Hinc elicietur Canon alter.

Quadratum quemlibet vnitate multatum aufer à duplo producti ex latere ipſius in ſummam laterum

datam, per residuum diuide quadratum summa laterum vnitate auctum, oritur minor quæsitorum vnitate auctus, quem sic vnitate auctum si ducas in sumptum ab initio quadratum, fiet maior quæsitorum,

Sit data summa laterum 7. vt prius. Sume quadratum 9. vnde ablata vnitate, residuum 8. aufer à 42. qui fit ex ipso 7. bis in latus ipsius 9. relinquitur 34. per quem diuide quadratum ipsius 7. vnitate auctum, nimirum 50. fiet $\frac{25}{17}$ vnde ablata vnitate relinquitur $\frac{8}{17}$ minor quæsitorum; At ducto $\frac{25}{17}$ in quadratum 9. fit maior $\frac{225}{17}$.

Sed & multò vniuersalius proponi potest hæc quæstio, nimirum sic.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, adscito quolibet alterutrius multiplice quadratum faciat, & quadratorum latera iuncta datum conficiant numerum.

Soluetur autem eadem arte auxilio eorundem lemmatum, quæ & ipsa in vnum contracta sic proponentur vniuersalius.

Datis duobus numeris quorum vni desint quotlibet vnitates, quo minus ad alium rationem habeat quadrati ad quadratum, productus ex datorum multiplicatione adsumpto alterius multiplice secundum vnitates quæ alteri desunt, fit quadratus.

Quærantur ergo duo numeri, vt productus eorum multiplicatione adscito alterutrius duplo quadratum faciat, & latera quadratorum conficiant 6. Ponatur minor 1 N. maior per lemma præcedens esto 4 N. − 2. sic enim productus 4 Q. − 2 N. adscito minoris duplo facit quadratum 4 Q. Restat vt idem productus adscito duplo maioris faciat quadratum à latere 6 − 2 N. facit autem 4 Q. + 6 N. − 4. Hoc ergo æquatur 4 Q. − 24 N. + 36. & fit 1 N. $\frac{4}{3}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{4}{3}$ & $\frac{10}{3}$ quorum productus $\frac{40}{9}$ adscito sigillatim vtriusque duplo quadratos facit $\frac{64}{9}$ & $\frac{100}{9}$. quorum latera $\frac{8}{3}$. & $\frac{10}{3}$. quorum summa $\frac{18}{3}$ seu 6.

Rursus. Quærantur duo numeri vt productus eorum multiplicatione adscito primi duplo, tum secundi triplo quadratum faciat, & latera quadratorum conficiant 6. Ponatur primus 1 N. secundus 4 N. − 2. sic enim productus 4 Q. − 2 N. adscito primi duplo facit quadratum 4 Q. Restat vt idem productus ascito secundi triplo faciat quadratum à latere 6 − 2 N. facit autem 4 Q. + 10 N. − 6. Hoc ergo æquatur 4 Q. − 24. N. + 36. & fit 1 N. $\frac{21}{17}$ sunt ergo quæsiti numeri $\frac{21}{17}$ & $\frac{50}{17}$ quorum productus $\frac{1050}{289}$ adscito primi duplo & secundi triplo, quadratos facit $\frac{1764}{289}$ & $\frac{3600}{289}$ quorum latera $\frac{42}{17}$ & $\frac{60}{17}$ quorum summa $\frac{102}{17}$ seu 6. Hinc etiam Canon elici potest, quod exercitationis gratia tibi faciendum relinquo.

QVÆSTIO XXVIII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει ἑκατέρου ποιῇ τετράγωνον. τῶν δὲ τετραγώνων αἱ πλευραὶ συντεθεῖσαι ποιῶσι τὸν δοθέντα ἀριθμόν. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ε. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὧν ὁ μείζων τοῦ ἐλάττονός ἐστι τετραπλασίων, καὶ μονὰς μία, ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει τοῦ ἐλάττονος ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τὸν μὲν μείζονα ϛϛ δ͞ μο α͞. τὸν δὲ ἐλάττονα ϛ ἑνός. καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει, τοῦ ἐλάττονος ποιεῖ τετράγωνον δυνάμεις δ͞ οὗ ἡ πλευρὰ ϛϛ β͞. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψει τοῦ μείζονος ποιεῖν τετράγωνον, καὶ τῶν τετραγώνων πλευρὰς συνάγειν τὰς ἐπιταχθείσας μονάδας ε͞. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει τοῦ μείζονος γίνεται δυνάμεις δ͞ λείψει, ϛϛ γ͞. μονάδος μιᾶς. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μονάδων ε͞ λείψει ϛϛ β͞. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς κϛ ιζ. ἔσται ὁ ἐλάττων κϛ ιζ. ὁ δὲ μείζων ρκα ιζ καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione detracto alterutro quadratum faciat. At quadratorum latera coniuncta faciant datum numerum. Faciant itaque 5. & quoniam si duo sint numeri, quorum maior sit minoris quadruplum auctum vnitate, productus eorum multiplicatione, detracto minore facit quadratum. Pono maiorem 4 N. + 1. minorem verò 1 N. & productus eorum multiplicatione detracto minore facit quadratum 4 Q. cuius latus 2 N. Superest vt idem productus detracto maiore faciat quadratum, & vt quadratorum latera coniuncta conficiant imperatas vnitates 5. sed productus ex multiplicatione illorum dempto maiore, facit 4 Q. − 3 N. − 1. hoc ergo æquatur quadrato à latere 5 − 2 N. & fit 1 N. $\frac{26}{17}$. Erit igitur minor $\frac{26}{17}$. maior $\frac{121}{17}$. & satisfaciunt quæstioni.

IN

IN QVAESTIONEM XXVIII.

LEMMA, quo vtitur Diophantus sic vniuersaliter proponendum est.

Datis duobus numeris quorum maior vnitate multatus, ad minorem sit in ratione quadrati ad quadratum, productus ex datorum mutuo ductu, detracto minore quadratum relinquit.

A........B C.
D 2.

Sit maior A C. & D minor, & à maiori auferendo vnitatem B C. supersit A B qui ad D sit in ratione quadrati ad quadratum, dico productum ex D in A C detracto ipso D relinquere quadratum. Etenim productus ex D in A C ' æquatur productis ex D in A B & in B C. At productus ex D in vnitatem B C æquatur ipsi D. Igitur productus ex D in A C detracto D relinquit productum ex D in A B. Sed productus ex D in A B quadratus est, ' cùm A B & D ponantur plani similes. Ergo constat propositum. *1. secundi.* *1. noni.*

Hinc etiam patet positiones infinitis modis variari posse. Nam posito minore 1 N. maior poni poterit non solùm 4 N. + 1. vt fecit Diophantus, sed etiam 9 N. + 1 vel 16 N. + 1 &c. & si minor ponatur 3 N. ponetur maior 12 N. + 1. vel 27 N. + 1 &c. Rursus si ponatur minor 4 N. ponetur maior 9 N. + 1. vel 16 N. + 1. vel 25 N. + 1 &c. Ex ipsa quoque operatione formabitur huiusmodi Canon.

Quadratum quemlibet vnitate multatum aufer à duplo producti ex latere ipsius in summam datam laterum; per residuum diuide quadratum summa laterum vnitate auctum, orietur minor quæsitorum, quem si ducas in quadratum initio sumptum, productus vnitate auctus, erit maior.

Sit data summa laterum 5. & sumpto quadrato 9. aufer ab eo vnitatem superest 8. quem aufer à 30. duplo producti ex 5. in 3. superest 22. per quem diuide quadratum ipsius 5. vnitate auctum puta 26. fiet $\frac{13}{11}$ minor quæsitorum, quo ducto in quadratum 9. fit $\frac{117}{11}$ cui addendo vnitatem fit maior quæsitorum $\frac{128}{11}$ & satisfaciunt proposito.

Possumus etiam ita instituere positiones, vt productus detracto maiore numero relinquat quadratum, tali præmisso lemmate.

Datis duobus numeris, quorum minor vnitate multatus, ad maiorem sit in ratione quadrati ad quadratum, productus eorum multiplicatione, detracto maiore quadratum relinquit.

Quod demonstratur eodem prorsus modo quo præcedens demonstratum est. Hoc autem præmisso. Ponatur maior 4 N. minor 1 N. + 1. Sic enim productus, nimirum 4 Q. + 4 N. detracto maiore quadratum relinquit 4 Q. cuius latus 2 N. Superest igitur, vt idem quadratus detracto minore quadratum relinquat à latere 5 − 2 N. relinquit autem 4 Q. + 3 N. − 1 hoc ergo æquatur quadrato 25. − 20 N. + 4 Q. & fit 1 N. $\frac{26}{23}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{104}{23}$ & $\frac{49}{23}$. Hinc etiam elicietur alius Canon.

Quadratum quemlibet vnitate multatum adde duplo producti ex latere ipsius in summam datam laterum, per aggregatum diuide quadratum summa laterum, vnitate auctum, orietur minor quæsitorum vnitate multatus, quem sic multatum ducito in quadratum initio sumptum, fiet maior quæsitorum.

Potest & vniuersalius proponi quæstio.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, detracto quolibet alterutrius multiplice, quadratum relinquat, & quadratorum latera iuncta, datum conficiant numerum.

Et soluetur eodem prorsus artificio, auxilio lemmatum traditorum, quæ & ipsa in vnum contracta proponentur vniuersalius, hoc pacto.

Datis duobus Numeris quorum vnus quotlibet vnitatibus superat numerum, qui ad alterum rationem habet quadrati ad quadratum, productus ex datorum multiplicatione, detracto alterius multiplice, secundum vnitates quibus alter abundat, quadratum relinquit.

Quærantur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione detracto primi duplo, & secundi triplo, quadratum relinquat, & laterum summa esto 5. Ponatur primus 1 N. secundus 1 N. + 2. sic enim productus 1 Q. + 2 N. detracto primi duplo relinquit quadratum 1 Q. cuius latus 1 N. Restat igitur vt idem productus detracto secundi triplo faciat quadratum, cuius latus sit 5 − 1 N. facit autem 1 Q. − 1 N. − 6. Hoc ergo æquatur 1 Q. − 10 N. + 25. & fit 1 N. $\frac{31}{9}$. suntque quæsiti numeri $\frac{31}{9}$ & $\frac{49}{9}$.

Cæterùm hîc desiderari videtur huiusmodi quæstio.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, detractus à quolibet ipsorum, quadratum relinquat.

Ponatur minor 1 N. maior quilibet Numerorum numerus qui ad minorem rationem habeat quadrati ad quadratum, puta 4 N. erit productus 4 Q. qui detractus à quolibet ipsorum, relinquet 1 N. – 4 Q. & 4 N. – 4 Q. æquales quadrati, & quia Numerorum numeri sunt plani similes, ducatur denominator rationis eorum, in minorem vt Numeri æquentur, fient ergo 4 N. – 16 Q. & 4 N. – 4 Q. æquandi quadratis, horum interuallum est 12 Q. quare sumendi sunt duo numeri, quorum mutuo ductu fiant 12 Q. & horum summæ semissis quadratus æquabitur maiori, vel interualli semissis quadratus æquabitur minori, sunto hi 2 N. & 6 N. erit summæ semissis quadratus 16 Q. æqualis 4 N. – 4 Q. & fiet 1 N. $\frac{1}{5}$. Sunt ergo numeri $\frac{1}{5}$ & $\frac{4}{5}$. horum productus $\frac{4}{25}$ detractus ab ipsis numeris relinquit quadratos quæsitos $\frac{1}{25}$ & $\frac{16}{25}$. Quod si cui forte modus iste vtendi duplicata æqualitate obscurior videbitur, legat quæ adnotauimus ad quadragesimam tertiam quarti, vbi fusiùs à nobis explicatur.

QVÆSTIO XXIX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς τετραγώνους ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν ἑκάτερον ποιεῖ τετράγωνον. ἐὰν οὖν τάξω ἕνα τῶν τετραγώνων δυνάμεως μιᾶς, τὸν δὲ ἕτερον μονάδα, ἔσται ὁ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνος, δύναμις α. δεήσει ἄρα τοῦτον προσλαβόντα ἑκάτερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ ζητῆσαι τίς τετράγωνος προσλαβὼν μονάδα ποιεῖ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ τετράγωνος ὃν θέλω εἶναι ὑπ' αὐτῶν, δύναμις μία ἐὰν ἄρα οὗτος προσλάβῃ μονάδα μίαν. γίνεται δύναμις μία, μονὰς μία, τοῦτον δεήσει ἴσον εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς, ςº α. λείψει μº β. ἔσται ἴσος δυνάμει μιᾷ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ. δ^ων ἔσται ὁ μὲν ἐννέα ιϛ^ων, ὁ δὲ ιϛ ιϛ^ων καὶ συμβαίνει τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα τὴν μονάδα ποιεῖν τετράγωνον. δεήσει ἄρα καὶ τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα τὸν δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστιν θ ιϛ^ων ὑποκείσθω νῦν ἐν δυνάμει, τουτέστι δυνάμεις θ ιϛ^ων μονάδες θ ιϛ^ων. καὶ πάντα ἑκκαιδεκάκις. δυνάμεις ἄρα θ. μονάδες θ. ἴσαι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ςς γ λείψει μº δ. αὐτὸς ἄρα τετράγωνος ἔσται δυνάμεων θ μº ιϛ λείψει ςς κδ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμός ζ κδ^ων ἔσται ὁ μὲν πρῶτος τκδ. φοϛ^ων. ὁ δὲ δεύτερος μθ φοϛ^ων. καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros quadratos, vt productus eorum multiplicatione adscito alterutro faciat quadratum. Si ergo posuero vnum quadratorum 1 Q. alterum vero 1. erit productus eorum multiplicatione quadratus 1 Q. Oportet igitur hunc adscito vtroque facere quadratum. Quamobrem res eo deducta est vt quæramus qui quadratus adiecta vnitate faciat quadratum. Ponatur quadratus quem volo esse productum multiplicationis 1 Q. si ergo is adsumat vnitatem, fit 1 Q. + 1. hunc oportet æquari quadrato. Formo quadratum à latere 1 N. – 2. hic æqualis erit 1 Q. + 1. & fit 1. N. $\frac{3}{4}$. est ergo alter $\frac{9}{16}$ alter $\frac{16}{16}$. & accidit productum multiplicatione illorum adsumpta vnitate fieri quadratum. Oportet ergo eundem productum adsumpto altero fieri quadratum. Et quandoquidem productus ille est $\frac{9}{16}$. Ponatur nunc in quadrato, nimirum $\frac{9}{16}$ Q. + $\frac{9}{16}$ & omnia sedecies. Igitur 9 Q. + 9. æquantur quadrato. Formo quadratum à latere 3 N. – 4. ipse igitur quadratus erit 9 Q. + 16 – 24 N. & fit 1 N. $\frac{7}{24}$. Erit ergo primus $\frac{324}{576}$. secundus $\frac{49}{576}$. & soluunt quæstionem.

IN QVAESTIONEM XXIX.

OBSCVRE' loquitur Diophantus, nec tamen à Scholiasta vel à Xilandro satis explicatur. Itaque nos huic quæstioni sic lucem afferemus.

Posito altero quadratorum 1 Q. ponitur alter ad libitum, puta 1 quorum producto, si ipsi sigillatim addantur, fient tum 2 Q. tum 1 Q. + 1. æquandi quadratis, quæ duplicata æqualitas inexplicabilis est. Quamobrem posito primo 1 Q. secundus non est ad libitum ponendus, sed vt saltem vni propositi parti satisfiat per ipsas positiones, talis deligendus est secundus vt ductus in 1 Q. & producto addendo 1 Q. fiat quadratus. Quia verò primus est 1 Q. & vnitas non immutat numerum quem multiplicat, patet eò nos reduci, vt inueniamus quadratum, cui addendo 1. fiat quadratus. Id ergo fiet per aliam operationem, hoc pacto. Statuatur quæsitus quadratus 1 Q. is adscita vnitate fiet 1

1 Q. + 1 æquandus quadrato, cuius latus modo in superioribus quæstionibus sæpe vsitato fingetur ab 1. N. + tot vnitatibus quarum quadratus superet 1. Fingit illud Diophantus 1 N. − 2. & fit 1 N. $\frac{3}{4}$. & quæsitus quadratus $\frac{9}{16}$. Itaque ad propositam quæstionem redeuntes ponamus primum 1 Q. secundum $\frac{9}{16}$. Sic enim productus $\frac{9}{16}$ Q. adsumpto primo facit quadratum $\frac{25}{16}$ Q. Restat igitur vt idem productus adsumpto secundo quadratum faciat, facit autem $\frac{9}{16}$ Q. + $\frac{9}{16}$. Hoc ergo æquatur quadrato. Sed ad vitandas fractiones, omnia per eundem quadratum 16. multiplicantur, & fit 9 Q. + 9 æquandus quadrato. Nec immutatur per hanc multiplicationem æqualitatis ratio, quia enim quadrato per quadtatum multiplicato seu diuiso, semper fit quadratus, patet si 9 Q. + 9. æquetur quadrato, & eius partem decimam sextam, quadratum fore, & è conuerso. Huius igitur latus fingamus à 3 N. − tot vnitatibus quarum quadratus superet 9. puta à 3 N. − 4. fiet 1 N. $\frac{7}{24}$ & solutio est manifesta. Hinc formatur Canon.

Cape duos quadratos quadratum simul conficientes, altero per alterum diuiso, fiet alter quæsitorum. Tum diuisum quadratum aufer à tertio alio quouis quadrato, residui quadratus diuisus per quadruplum producti ex tertio eodem quadrato in quadratum initiò diuisum, alterum exhibebit.

Verbi gratia. Cape quadratos 16. & 9. fiet alter quæsitorum $\frac{16}{9}$. Tum aufer 16. à quouis alio quadrato 36. restat 20. cuius quadratum 400. diuide per quadruplum producti ex 16. in 36. nimirum per 2304. fiet alter quæsitorum $\frac{25}{144}$.

Diuersitas autem tum operationis, tum solutionis è triplici capite oriri potest.

Primò enim vtriusque numeri positione eadem manente, primo scilicet posito 1 Q. & secundo $\frac{9}{16}$ vltimi numeri quadrato æquandi, nimirum ipsius 9 Q. + 9. latus diuersimodè fingi potest, videlicet 3 N. − 4. vel 3 N. − 6. & sic in infinitum.

Secundo. Quamuis primus maneat 1 Q. potest secundus aliter atque aliter poni cùm inueniri possint infiniti quadrati diuersi ab ipso $\frac{9}{16}$ qui adsumpta vnitate quadratum faciant, quales sunt $\frac{16}{9}$ $\frac{25}{144}$ &c.

Denique primus quoque numerus diuersimodè poni potest, nimirum quilibet quadratorum numerus quadratus, puta 4 Q. 9 Q. 16 Q. &c. Sed tunc pro secundo sumendus erit quadratus aliquis numerus, quo ducto in primum & producto addendo ipsum primum, quadratus fiat. Vnde prius soluenda erit huiusmodi quæstio.

Dato quadrato, alium inuenire, vt productus horum multiplicatione adsciscens datum quadratum, faciat quadratum.

Datus esto 4. Quæsitus quadratus ponatur 1 Q. horum productus est 4. Q. qui adscito 4. facit 4 Q. + 4. quadrato æquandum, cuius latus esto 2 N. − 3. fiet 1 N $\frac{5}{12}$. & est quæsitus quadratus $\frac{25}{144}$. quo ducto in 4. & producto addendo 4. fit quadratus $\frac{169}{36}$ à latere $\frac{13}{6}$. Hinc, si libet, facilem elicies Canonem.

Datum quadratum aufer à quolibet quadrato, & per quadruplum producti horum quadratorum diuide residui illius quadratum, vel è conuerso. Vtroque modo orietur quæsitus quadratus.

Vt in hypothesi aufer 4. à 9. & residui 5. quadratum 25. diuide per quadruplum producti ex 4. in 9. nimirum per 144. fiet quæsitus quadratus $\frac{25}{144}$. vel diuide 144. per 25. fiet etiam quæsitus quadratus $\frac{144}{25}$. Nam hîc semper duplex contingit solutio.

Hac præmissa quæstione soluetur Diophantæum problema, hoc pacto. Ponatur primus 4 Q. secundus $\frac{25}{144}$ sic enim satisfit vni parti postulati. Restat vt productus horum multiplicatione, nimirum $\frac{100}{144}$. adscito secundo faciat quadratum, facit autem $\frac{100}{144}$. Q. + $\frac{25}{144}$. Hoc ergo æquatur quadrato, & omnia ducendo in 144. tum diuidendo per 25. fiunt 4 Q. + 1. æquales quadrato, cuius latus esto 2 N − 3. & fiet 1 N. $\frac{2}{3}$. erunt ergo quæsiti quadrati $\frac{16}{9}$ & $\frac{25}{144}$.

QVÆSTIO XXX.

INVENIRE duos numeros quadratos, vt productus eorum multiplicatione dempto alterutro faciat quadratum. Et si posuero primum 1 Q. alterum 1. erit productus eorum multiplicatione 1 Q. Oportet ergo illum dempta vnitate fieri quadratum, est autem 1 Q. quadratus. Eò itaque redacti sumus, vt quæramus quis quadratus dempta vnitate remaneat quadratus. Est autem huiusmodi

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς τετραγώνους ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει ἑκατέρου ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐὰν τάξω τὸν μὲν πρῶτον δύναμιν μίαν, τὸν δὲ ἕτερον μονάδα μίαν. ἔσται ὁ ὑπ' αὐτῶν δύναμις μία. δεήσει ἄρα αὐτὴν λείψει μονάδος μιᾶς ποιεῖν τετράγωνον, καὶ ἔστιν ἡ δύναμις τετράγωνος. ἀπῆκται ἄρα εἰς τὸ ζητῆσαι τίς τετράγωνος λείψει μονάδος μιᾶς ποιεῖ τετράγωνον. ἔστι δὲ τετράγωνος ὁ κε ιϛ´. οὗτος γὰρ λείψει τῆς ᾱ μονάδος ιϛ´. ποιεῖ τε-

τράγωνον τὸν ς̄ ις^{ων}. τάσσω οὖν τὸν μὲν δύναμιν μίαν, τὸν δὲ κε̄ ις^{ων}. καὶ ὑπ' αὐτῶν λεῖψει δυνάμεως μιᾶς ποιεῖ τετράγωνον. δεήσει ἄρα καὶ τὸν ὑπ' αὐτῶν λεῖψει μ° κε̄ ις^{ων} ἴσον εἶναι τετραγώνῳ. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν λεῖψει μ° κε̄ ις^{ων}, γίνεται δυ κε̄ ις^{ων} λεῖψει μ° κε̄ ις^{ων}. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πάντα ἑκκαιδεκάκις. * πλάσσω τὸν τετράγωνον. ἀπὸ ς^{ου} ᾱ λεῖψει μ° δ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται δύναμις ᾱ μονάδες ις̄ λεῖψει ςς η̄. ἴσος δυ κε̄ λεῖψει μ° κε̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιζ^{η}. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος σπθ ξδ^{ων}. ὁ δὲ δεύτερος ρ ξδ^{ων}. καὶ ποιεῖ τὰ τοῦ προβλήματος.

quadratus $\frac{25}{16}$. Hic enim demptis $\frac{16}{16}$ relinquit quadratum $\frac{9}{16}$. Pono igitur alterum 1 Q. alterum $\frac{25}{16}$. & productus multiplicationis dempto 1 Q. relinquit quadratum. Superest vt idem productus demptis $\frac{25}{16}$ fit æqualis quadrato. Sed productus demptis $\frac{25}{16}$ fit $\frac{25}{16}$ Q. $-$ $\frac{25}{16}$. Hoc ergo æquatur quadrato. Omnia per sedecim multiplicentur, tum diuidantur per 25. fit 1 Q. $-$ 1. æquandus quadrato. Formo quadratum ab 1 N. $-$ 4. Ipse igitur est 1. Q. $+$ 16. $-$ 8 N. æqualis 1. Q. $-$ 1. & fit 1 N. $\frac{17}{8}$. Erit ergo primus $\frac{289}{64}$. secundus $\frac{100}{64}$. & satisfaciunt postulatis.

IN QVAESTIONEM XXX.

EXTREMA verba huius propositionis, in Græco monstrosè deprauata sunt, vt ex ipsa æquatione manifestum fit, qua numeri 25 Q. $-$ 25. latus fingitur 1 N. $-$ 4. vnde contingit 1 Q. $+$ 16 $-$ 8 N. æquari 25 Q. $-$ 25. & in complexam æquationem deuenitur cùm tandem 41. maneat æqualis 24 Q. $+$ 8 N. & fit solutio irrationalis. Quare nescio quomodo sibi persuadere potuerit Scholiastes hanc esse mentem Diophanti. Nam quod ipse ait valorem Quadrati esse 1. atque adeo 24 Q. idem esse atque 24. sunt meræ nugæ, & puerilius etiam nugatur Xilander, cùm mirificam appellat rationem hanc inueniendæ simplicis æquationis. Si enim 1 Q. est 1. nonne etiam 1 N. debuit esse 1 non autem $\frac{17}{8}$? Si verò modus iste quo vtitur Scholiastes admitendus est, nonne licet etiam ponere latus quadrati 1 N. $-$ 2. & æquare 1 Q. $-$ 4 N. $+$ 4. numero 25 Q. $-$ 25? Sed hac ratione tandem 29. æquatur 24 Q. $+$ 4 N. Quod si, vt somniat Scholiastes 1 Q. est 1. & 24. Q. sunt 24. fiet valor Numeri $\frac{5}{4}$ eritque alter quæsitorum quadratorum $\frac{25}{16}$ alter rursus $\frac{25}{16}$ qui nequaquam satisfaciunt postulatis, & sic aliis infinitis exemplis pronum est ostendere futilem esse hanc operandi rationem. Nec mihi obiiciat aliquis, valorem Numeri à Scholiaste inuentum nempe $\frac{17}{8}$ satisfacere proposito, nam ex falso verum inferri potest, & ex vno aut altero exemplo non ritè colligitur regula generalis. Falsitatis etiam manifestè arguitur hæc æquatio, ex eo quod per valorem numeri resoluendo hypostases 1 Q. $-$ 8 N. $+$ 16. non reperitur æqualis 25 Q. $-$ 25. Nam 1. Q. $-$ 8 N. $+$ 16. fit $\frac{225}{64}$ At 25 Q. $-$ 25 fit $\frac{5625}{64}$. Valeat ergo ridiculum Scholiastæ commentum, quo non calceus ad pedem, sed pes ad calceum accomodatur.

Porrò tribus modis corrigi potest textus Diophanti. Primo numeri 25 Q. $-$ 25. ponendo latus non 1 N $-$ 4. Sed 5 N. $-$ 1 vnde fiet 1 N. $\frac{13}{5}$ eruntque quæsiti quadrati $\frac{169}{25}$ & $\frac{25}{16}$ Qua ratione numeri solutionis omnes mutandi erunt. Secundò concipiendo Diophantum, numerum $\frac{25}{16}$ Q. $-$ $\frac{25}{16}$ priùs multiplicare per 16. vnde fit 25 Q. $-$ 25. & hunc deinde diuidere per $\frac{25}{16}$ vnde fit 16 Q. $-$ 16. æquandus quadrato, cuius latus fingitur non 1 N. $-$ 4. Sed 4 N. $-$ 1 & fit 1 N. $\frac{17}{8}$ & solutionis numeri non mutantur. Denique, quod maximè mihi arridet, & mea in versione sequutus sum, dici potest Diophantum non solum multiplicare per 16. numerum $\frac{25}{16}$ Q. $-$ $\frac{25}{16}$ vnde fit 25 Q. $-$ 25. Sed hunc præterea diuidere per 25. vnde fit tandem 1 Q. $-$ 1. æquandus quadrato, quod familiare Diophanto est, vt in minimis numeris facilior sit operatio; & vt iam monuimus quadratus per quadratum multiplicatus & diuisus, quadratus manet. Tum numeri 1 Q. $-$ 1 latus fingit 1 N. $-$ 4. & omnia optimè cohærent, & solutionis numeri omnes congruunt. Non ausus sum tamen in textu Græco tantam inducere mutationem, sed satis habui verba deprauata asteriscis includere, quæ si quis velit ex nostra versione corrigere, id ita commodè fiet. Πάντα ἑκκαιδεκάκις, καὶ παρὰ τὸν κε̄. γίνεται δυ ᾱ. λεῖψει μονάδος ᾱ ἴσαι τετραγώνῳ, πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς^{ου} ᾱ λεῖψει μ° δ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται δύναμις ᾱ. μονάδες ις̄ λεῖψει ςς η̄. ἴσος δυ ᾱ. λεῖψει μονάδος ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιζ^{η}.

Variari autem potest operatio & solutio, totidem modis, quot ad præcedentem explicauimus, & pari ratione dato quadrato, inuenietur alius, vt productus eorum mutuo ductu multatus dato quadrato, relinquat quadratum. Et tandem ex operatione Diophanti elicietur huiusmodi Canon.

Cape quadratum ex duobus quadratis compositum; cui adiice alium quemuis quadratum, summa quadratum diuide per quadruplum producti quadratorum simul additorum; orietur alter quæsitorum, alterum habebis si diuidas quadratum initio sumptum per vtrumlibet eorum ex quibus componitur.

Verbi gratia cape 25. compositum ex 9. & 16. cui adde quadratum 1. fit 26. cuius quadratum 676. diuide per 100. qui fit ex 1 in 25. quater, fiet alter quæsitorum $\frac{169}{25}$. Alter vero est $\frac{25}{4}$ vel $\frac{1}{25}$. Nam hic semper duplex contingit solutio.

Cæterùm hic desiderari videtur huiusmodi quæstio.

Inuenire duos quadratos, vt vterque multatus producto multiplicationis eorum quadratum relinquat.

Ponatur alter 1 Q. alter quadratus aliquis, qui ab vnitate detractus relinquat quadratum, puta $\frac{9}{25}$. sic enim productus $\frac{9}{25}$ Q. detractus ab 1 Q. relinquit quadratum $\frac{16}{25}$ Q. Restat vt idem productus detractus à $\frac{9}{25}$ Q. $\frac{9}{25}$ relinquat quadratum. Relinquit autem $\frac{9}{25} - \frac{9}{25}$ Q. Hoc ergo æquatur quadrato Omnia per 25. multiplicentur fit $9 - 9$ Q. æquandus quadrato. Fingatur eius latus $3 - 4$ N. fit 1 N. $\frac{24}{25}$. Est ergo primus $\frac{576}{625}$. secundus $\frac{9}{25}$. & soluunt quæstionem. Hinc fit iste Canon.

Cape duos quadratos quadratum conficientes, horum alterum diuide per eorum summam, fiet alter quæsitorum. Eundem quadratum diuisum adde cuilibet tertio quadrato, & per aggregati quadratum diuide quadruplum producti ex mutuo ductu quadratorum simul additorum, fiet alter quæsitorum.

Verbi gratia cape 9. & 16. & alterum 9. diuide per summam 25. fiet alter quæsitorum $\frac{9}{25}$. Tum eidem 9. adde alium quadratum 4. fiet 13. per huius quadratum 169. diuide quod fit ex 4. in 9. quater, nimirum 144. fiet alter quæsitorum $\frac{144}{169}$.

QVÆSTIO XXXI.

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione summa illorum siue addita, siue detracta quadratum faciat. Iam cùm duorum quorumlibet numerorum quadrati simul iuncti, siue detracto duplo producti multiplicationis eorum, quadratum faciant, exponamus duos numeros 2. & 3 & patet quod summa quadratorum ab ipsis addito duplo producti multiplicationis facit quadratum 25. Et rursus ab eadem summa quadratorum detracto eodem duplo producti multiplicationis relinquitur quadratus 1. Pono ergo productum ab iis 13 Q. Ipsorum alterum 1 N. alterum 13 N. & fit ex eorum multiplicatione 13 Q. Atqui 13 Q. siue additis siue detractis 12 Q. faciunt quadratum. Oportet ergo 12 Q. æquari summæ amborum. Sed amborum summa est 14 N. Igitur 12. Q. æquantur 14 N. & fit 1 N. $\frac{14}{12}$. seu $\frac{7}{6}$. erat itaque primus 1 N. erit ergo $\frac{7}{6}$. Ad secundus qui erat 13 N. erit iam $\frac{91}{6}$. & soluunt quæstionem.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λείπῃ, ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ πάντων δύο ἀριθμῶν οἱ ἀπ᾽ αὐτῶν συντεθέντες, ἐάν τε προσλάβωσι τὸν δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν, ἐάν τε λείπωσι, ποιοῦσι τετράγωνον. ἐκτίθεμεν δύο ἀριθμοὺς τὸν β καὶ τὸν γ, καὶ δῆλον ὡς ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μετὰ τοῦ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν συνάγουσα ποιεῖ τετράγωνον μονάδας κε. καὶ πάλιν ἀπὸ τῆς συνθέσεως τοῦ ὑπ᾽ αὐτῶν ἀφαιρουμένου τοῦ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν καταλείπεται τετράγωνος ἡ μονάς. τάσσω νῦν τὸν ὑπ᾽ αὐτῶν δυνάμεις ιγ, τετάχθω νῦν ὁ μὲν ϛ^ος ἑνός, ὁ δὲ ἀριθμῶν ιγ. καὶ γίνεται ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν δυνάμεις ιγ. δυνάμεις ἄρα ιγ ἐάν τε προσλάβωσι δυνάμεις ιβ, ἐάν τε λείπωσι, ποιοῦσι τετράγωνον. δεήσει ἄρα δυνάμεις ιβ ἴσας εἶναι συναμφοτέρῳ. ἀλλὰ συναμφότερός ἐστιν ϛϛ ιδ. δυνάμεις ἄρα ιβ ἴσαι εἰσὶν ϛϛ^οις ιδ. καὶ γίνεται ἀριθμὸς ιδ^ων ιβ. τουτέστι ζ ϛ^ων. ἔστιν οὖν ὁ μὲν πρῶτος ϛ^ος ἑνός. ἔσται ζ ϛ^ων. ὁ δὲ δεύτερος ϛϛ ιγ. ἔσται ϟα ϛ^ων. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXXI.

LEMMA quod assumit Diophantus, nil aliud continet quàm quod ostensum est quarta secundi Euclidis, & quarta secundi porismatum. Nam altera illarum propositionum demonstratur duplum producti additum summæ quadratorum, efficere quadratum summæ numerorum; altera verò concluditur duplum producti detractum à summa quadratorum, relinquere quadratum interualli numerorum. Cæterùm tota operationis & solutionis varietas pendet à duplici capite. Primò enim loco 2. & 3. sumi possunt alii duo quilibet numeri, & aggregatum quadratorum ab ipsis statui pro producto multiplicationis; & duplum producti, pro summa ipsorum numerorum. Vt

ſi ſumas 2. & 4. Pones productum multiplicationis 20. Q. ſummam numerorum 16 Q. Secundo, manente eadem primà poſitione, ipſi numeri variè poni poſſunt, vt in hypotheſi Diophanti poſito producto 13 Q. & ſumma 12 Q. Ipſi numeri poni poſſunt duo quilibet quorum mutuo ductu fiant 13 Q. author ad vitandas fractiones poſuit 1 N. 13. N. ſed poni poſſent 2 N. & $6\frac{1}{2}$ N. vel 3. N. & $4\frac{1}{3}$ N. & ſic in infinitum. At poſito producto 20 Q. poni poterunt ipſi numeri 2 N. & 10 N. vel 4 N. & 5 N. vel duo quilibet alij numeri quorum mutuo ductu fiant 20 Q. Canon quoque hinc facilè formabitur, ſed parum in eo erit compendij ſimili quoque artificio ſoluetur huiuſmodi quæſtio.

Inuenire duos numeros, vt ſumma eorum, producto multiplicationis ſiue addito, ſiue dempto quadratum faciat.

Ponatur ſumma 13 Q. productum 12 Q. ipſi vero numeri 1 N. & 12 N. fiet ergo ſumma 13 N. æqualis 13 Q. & fit 1 N. 1. ſuntque quæſiti numeri 1 & 12.

QVÆSTIO XXXII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λείψῃ, ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ οὖν ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὧν ὁ ἕτερος τοῦ ἑτέρου ἐστὶ διπλασίων, καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν δὶς τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἀπ' αὐτῶν συντεθέντες ἐάν τε λείπωσι τὸν δὶς ἀπ' αὐτῶν. ἐάν τε προσλάβωσι, ποιοῦσι τετράγωνον. ἐκτίθεμεν τὸν δ. καὶ τὸν β. καὶ δῆλον ὡς ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ποιεῖ τετράγωνον τὸν ιϛ. καὶ ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν κ. ἐάν τε προσλάβῃ τὸν ιϛ ἐάν τε λείπῃ ποιεῖ τετράγωνον τόν τε λϛ καὶ τὸν δ. τετάχθωσαν οὖν ἐν δυνάμει. καὶ ἔστω ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν δυνάμεις κ. ὁ δὲ συναμφότερος δυνάμεις ιϛ. [illegible] ὁ μὲν ϛϛ β, ὁ δὲ ϛϛ ι. συναμφότερος δὲ ϛϛ ιβ. ἀλλὰ καὶ δυνάμεις ιϛ. δυνάμεις ἄρα ιϛ. ἴσαι ϛϛοῖς ιβ καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸν. ιβ ιϛ. τουτέστι γ δ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ϛ δ. ὁ δεύτερος λ δ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros æquales quadrato, vt productus eorum multiplicatione ſiue addita, ſiue dempta amborum ſumma quadratum faciat. Quoniam ſi ſint duo numeri in dupla ratione, & duplum producti multiplicationis eorum, quadratus eſt, & ſumma quadratorum ab ipſis, ſiue addito, ſiue detracto duplo producti quadratum facit, exponamus 4. & 2. & patet quod duplum producti eorum facit quadratum 16. & ſumma quadratorum ab ipſis puta 20. ſiue addito 16. ſiue dempto facit quadratos 36. & 4. Ponantur ergo in quadrato. & eſto productum multiplicationis 20 Q. ſumma verò numerorum 16. Q. ſit autem alter 2 N. alter 10 N. ergo vterque ſimul 12 N. ſed & 16. Q. Proinde 16 Q. æquantur 12 N. & fit 1 N. $\frac{12}{16}$ hoc eſt $\frac{3}{4}$. eritque primus $\frac{6}{4}$. ſecundus $\frac{30}{4}$. & ſoluunt quæſtionem.

IN QVÆSTIONEM XXXII.

LEMMA hîc aſſumptum idem ferè eſt cum illo quod in præcedente explicatum eſt, cui tamen ſuperaddit, expoſitos numeros debere eſſe in ratione dupla, vt duplum producti eorum ſit quadratus numerus, cuius rei ratio euidens eſt, quia ducere numerum aliquem bis in ſuum duplum, idem eſt atque ducere eundem numerum in ſuum quadruplum; At numeri in ratione quadrupla ſunt plani ſimiles. Quare patet ex eorum mutuo ductu fieri quadratum. Variari autem poteſt operatio & ſolutio totidem modis, quot & præcedentis, & eaſdem ob cauſas vt manifeſtum eſt.

1. noni.

Cæterùm etiam aliter operari poſſumus, hac arte. Sumantur duo numeri qui ſint latera circa rectum trianguli rectanguli, ſeu quorum quadrati ſimul quadratum conficiant, quod fiet per tertiam tertij poriſmatum, ſintque hi 3. & 4. Eritque ſumma quadratorum 25. duplum producti 24. Et ſtatuantur in Quadratis, ponaturque productum 25 Q. ſumma numerorum 24 Q. Ipſi verò numeri 1 N. & 25 N. vel alij duo quilibet quorum mutuo ductu fiant 25 Q. erit ergo ſumma 26 N. æqualis 24 Q. & fit 1 N. $\frac{24}{26}$. ſuntque quæſiti numeri $\frac{24}{26}$ & $\frac{600}{26}$.

Hîc etiam deſiderari videtur huiuſmodi quæſtio.

Inuenire duos numeros, æquales quadrato, vt ſumma eorum, producto multiplicationis ſiue addito ſiue dempto, quadratum faciat.

Ponatur summa numerorum 25 Q. productum 24 Q. ipsi verò numeri statuatur duo quilibet, quorum mutuo ductu fiant 24 Q. puta 4 N. & 6 N. fiet summa 10 N. æqualis 25. Q. & fit 1 N. $\frac{2}{5}$. sunt ergo quæsiti numeri $\frac{8}{5}$. & $\frac{12}{5}$.

Cæterùm huc quoque pertinere videtur talis quæstio.

Inuenire quadratum cui siue addatur, siue adimatur suum latus, fiat quadratus.

Ponatur quæsitus quadratus 25 Q. latus illius 24 Q. igitur 24 Q. æquantur 5 N. & fit 1 N. $\frac{5}{24}$. Est ergo quæsitus quadratus $\frac{625}{576}$.

Eodem artificio reperietur quadratus, cui addendo & adimendo suum latus quoties quis iusserit, fiat quadratus. Vt si quæratur quadratus, cui addendo & adimendo quater suum latus, fiat quadratus. Ponatur quæsitus quadratus 25 Q. Tum ipsius 24. sumpto quadrante, statuatur latus 6 Q. Nam eius quadruplum 24 Q. additum vel ademptum ipsi 25 Q. quadratum facit. Igitur 6 Q. æquantur 5 N. fitque 1 N. $\frac{5}{6}$. Est ergo quæsitus quadratus $\frac{625}{36}$.

QVÆSTIO XXXIII.

INVENIRE tres numeros, vt cuiusuis illorum quadratus adscito proximè subsequente numero, faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. & quoniam si numerus numeri duplus fuerit, & adhuc vnitate maior, quadratus minoris adscito maiore facit quadratum, ponatur secundus primi duplus & vnitate maior, erit itaque 2 N. + 1. Rursumque tertius huius duplus & vnitate maior, erit vtique 4 N. + 3. & accidit quadratum primi adscito secundo fieri quadratum 1 Q. + 2. N. + & similiter secundi quadratum adsumpto tertio facere quadratum 4 Q. + 8 N. + 4. Oportet ergo & tertij quadratum adiecto primo facere quadratum. Sed tertij quadratus adiecto primo facit 16 Q. + 25 N. + 9. Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à latere 4 N. − 4. Ipse igitur erit 16 Q. + 16. − 32 N. & fit 1 N. $\frac{7}{57}$. Erit ergo primus $\frac{7}{57}$. secundus $\frac{71}{57}$. tertius. $\frac{199}{57}$. & soluunt quæstionem.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ μὲν πρῶτος ςʸ α. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ᾖ ἀριθμὸς ἀριθμοῦ διπλασίων, καὶ μονάδι μείζων, ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος προσλαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ δεύτερος τοῦ πρώτου διπλασίων, καὶ μονάδι μείζων, καὶ ἔσται δηλονότι ςʸ β. μονάδος μιᾶς. καὶ ἔτι ὁ τρίτος τούτου διπλασίων, καὶ μονάδι μείζων, καὶ ἔσται ςʸ δ. μº γ. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν δεύτερον, γίνεσθαι τετράγωνον δυνάμεως μιᾶς ςʸ β μονάδος μιᾶς. καὶ ὁμοίως τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου προσλαβόντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον δʸ δ ςʸ η μº δ. δεήσει ἄρα καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ τρίτου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ᾽ ὁ ἀπὸ τοῦ τρίτου προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιεῖ δʸ ιϛ ςʸ κε μº θ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ςʸ δ λείψει μº δ. αὐτὸς ἄρα ἔσται δυνάμεις ιϛ. μονάδες ιϛ λείψει ςʸ λβ καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ νζ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ζ νζ. ὁ δὲ δεύτερος οα νζ. ὁ δὲ τρίτος ρϟθ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXXIII.

LEMMA Diophanti prorsus idem est cum decima octaua propositione primi porismatum, vt euidens est. Operatio & solutio dupliciter variari potest. Primò enim ipsi numeri poni possunt ad libitum, dum sequens contineat semper duplum præcedentis vnitate auctum, ita primo posito 2 N. ponetur secundus 4 N. + 1. tertius 8 N. + 3. & sic in infinitum. vel etiam primo posito 1 N. + 1. erit secundus 2 N. + 3. tertius 4 N. + 7. &c. Deinde vltimi numeri quadrato æquandi latus diuersimodè fingi potest, vt in hypothesi Diophanti, numeri 16 Q. + 25 N. + 9. latus fingi potest 4 N. − quotlibet vnitatibus quarum quadratus superet 9. vt 4 N. − 4. 4 N. − 5. 4 N. − 6. &c. Immo in eadem hypothesi quia numerus vnitatum 9. quadratus est, posset idem latus fingi 3 − quotlibet Numeris, quorum quadratus superet 16 puta 3 − 5 N. 3 − 6 N. &c.

QVÆSTIO XXXIV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος λείψει τοῦ ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ᾖ διπλασίων παρὰ μονάδα ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος λείψει τοῦ μείζονος ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τὸν μὲν πρῶτον ϛ ἑνὸς μ° α. τὸν δὲ δεύτερον ὁμοίως ϛϛ β. μ° α. τὸν δὲ τρίτον ϛϛ δ μ° α. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον λείψει τοῦ δευτέρου ποιεῖν τετράγωνον. καὶ ἔτι τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου λείψει τοῦ τρίτου ποιεῖν τετράγωνον. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ τρίτου λείψει τοῦ πρώτου ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ τρίτου τετράγωνος λείψει τοῦ πρώτου, ποιεῖ δυνάμεις ιϛ ϛϛ ζ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ϛϛ ε. δυνάμεις ἄρα κε ἴσαι δυνάμεσι ιϛ ἀριθμοῖς ζ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ θ'. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ιϛ θ'. ὁ δὲ δεύτερος κγ θ'. ὁ δὲ τρίτος λζ θ'. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE tres numeros, vt cuiusuis quadratus detracto proximè se sequente numero, faciat quadratum. Quandoquidem si numerus numeri duplo vnitate minor sit, quadratus minoris dempto quadrato maioris, facit quadratum: statuo primum 1 N. + 1. secundum 2 N. + 1. Tertium similiter 4 N. + 1. & accidit quadratum primi dempto secundo facere quadratum, & adhuc quadratum secundi dempto tertio facere quadratum. Restat vt & tertij quadratus dempto primo quadratum faciat. Sed tertij quadratus dempto primo facit 16 Q. + 7 N. Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à 5 N. Proinde 25 Q. æquantur 16 Q. + 7 N. & fit 1 N. $\frac{7}{9}$ Erit igitur primus $\frac{16}{9}$. secundus $\frac{23}{9}$. tertius $\frac{37}{9}$. & constat propositum.

IN QVÆSTIONEM XXXIV.

LEMMA quod assumit Diophantus nil aliud dicit, quàm quod ostensum est propositione decima nona primi porismatum. Operatio & solutio totidem modis variari potest, quot & præcedentis, vt diutius immorandum non sit in re manifesta.

QVÆSTIO XXXV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν προσλαβὼν τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀριθμὸς ἀπὸ τινὸς ἀριθμοῦ μετρῆται, καὶ λάβωμεν καθ' ὃν μετρῆται, καὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος τοῦ μετροῦντος, καὶ καθ' ὃν μετρεῖ, ἀφέλωμεν τὸν ἐλάττονα, ὁ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ λοιποῦ τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ἐξ ἀρχῆς ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τὸν μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ἀπὸ δυνάμεων τινῶν ἐχουσῶν μετροῦντας τρεῖς. ἔστω δὲ ιβ. μετρεῖ γὰρ αὐτὸν μονὰς α κατὰ τὸν ιβ καὶ μονάδες β κατὰ τὸν ϛ. καὶ μονάδες γ. κατὰ τὸν δ. καὶ ἐὰν ἀφέλω τὸν μετροῦντα ἀπὸ τοῦ καθ' ὃν μετρεῖ, καὶ τῶν λοιπῶν λάβω τὰ ἥμισυ. Τάσσω τοὺς τρεῖς, τὸν μὲν πρῶτον μ° ε καὶ ἥμισυ. τὸν δὲ δεύτερον μ° β τὸν δὲ τρίτον μ° τὸ ἥμισυ, καὶ δῆλον ὡς ἀπὸ ἑκάστου τούτων τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ιβ. ποιεῖ

INVENIRE tres numeros, vt vniuscuiusque quadratus adscita summa omnium faciat quadratum. Quandoquidem si numerus numerum metiatur, & sumamus eum per quem metitur; & duorum (metientis scilicet, & eius per quem metitur) minorem de maiore auferamus, residui semissis quadratus adsumpto proposito initio ad metiendum numero, quadratum facit. Pono summam quidem trium aliquem quadratorum numerum, qui habeat tres ipsum metientes. Esto itaque 12. Nam ipsum metitur vnitas per 12. & 2. per 6. & 3. per 4. & si detraxero metientem ab eo per quem metitur, & residuorum semisses sumpsero; Ponam tres numeros primum quidem 5 $\frac{1}{2}$. secundum verò 2. tertium autem $\frac{1}{2}$. & patet horum vniuscuiusque quadratum

dratum adſcito 12. facere quadratum, nimirum $12\frac{1}{4}$ & 16. & $42.\frac{1}{4}$. Statuo igitur illos in numero primum $5\frac{1}{2}$ N. ſecundum 2 N. tertium $\frac{1}{2}$ N. Oportet autem trium ſummam æqualem eſſe 12 Q. ſed trium ſumma eſt 8 N. Proinde 8 N. æquantur 12 Q. & fit 1 N. $\frac{8}{12}$ ſeu $\frac{2}{3}$. Erit ergo primus $\frac{11}{3}$ ſecundus $\frac{4}{3}$. tertius $\frac{1}{3}$ & conſtat propoſitum.

τετράγωνον. ὃν μὲν ιβ̅ καὶ α̅ δ˜. ὃν δὲ ιϛ˜ ὃν δὲ μβ̅. α̅ δ˜. Τάσσω οὖν αὐτοὺς ἐν ἀριθμῷ τὸν μὲν πρῶτον ϛϛ̅ ε̅ καὶ ἥμισυ. τὸν δὲ δεύτερον ϛϛ̅ β̅. τὸν δὲ τρίτον ϛ̅ ἡμίσεως. δεῖ δὴ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ἴσον εἶναι δυνάμεσι ιβ̅. ἀλλ' ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμοί εἰσιν η̅. ἀριθμοὶ ἄρα η̅ ἴσοι δυνάμεσι ιβ˜. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς η̅ ιβ˜ ἤτοι δ˜ ϛ˜. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κβ̅ ϛ˜. ὁ δὲ δεύτερος η̅ ϛ˜. ὁ δὲ τρίτος β˜ ϛ˜. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXXV.

LEMMA Diophanti coincidit prorſus cum quinta ſecundi Euclidis, vel cum ſecunda ſecundi poriſmatum. Solutionis varietas à duplici pendet capite. Primò enim ſumma numerorum poni poteſt non ſolùm 12 Q. ſed & quilibet alius quadratorum numerus. Deinde poſita eadem ſumma 12 Q. ipſi numeri diuerſimodè poni poſſunt, prout ſumentur ſemiſſes interuallorum duorum quorumlibet numerorum, quorum mutuo ductu fiat 12. Nam quod metientes ſumendos eſſe ait Diophantus, id facit facilitatis gratia, ad vitandas fractionum moleſtias. Cæterùm quinta ſecundi cui innititur hæc operatio, abſtrahit à numeris integris, & à fractis, vt liquet ex ipſius demonſtratione.

Hîc ſi placet formabis huiuſmodi Canonem.

Sume quemlibet numerum, tum cape ter duos numeros, quorum mutuo ductu is fiat, interuallorum ſemiſſes ſimul additos diuide per ſumptum numerum, quotientem ducito ſigillatim in eoſdem ſemiſſes, fient quæſiti numeri.

Verbi gratia ſume 48. qui fit tum ex 2. in 24 tum ex 4. in 12. tum ex 6 in 8. interuallorum ſemiſſes ſunt 11. 4. 1. quorum ſumma 16. qua diuiſa per 48. fit $\frac{1}{3}$ quo ducto ſigillatim in ipſos 11. 4. 1. fiunt quæſiti numeri $\frac{11}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{1}{3}$.

QVÆSTIO XXXVI.

INVENIRE tres numeros, vt vniuſcuiuſque quadratus, multatus ſumma omnium, faciat quadratum. Pono ſimiliter aliquem numerum qui tres ipſum metientes habeat. Eſto rurſus 12. additoque metiente ad eum per quem metitur, & ſemiſſe ſummæ capto, ſtatuo tres numeros, primum $6\frac{1}{2}$ N. ſecundum 4 N. tertium $3\frac{1}{2}$ N. & contingit horum vniuſcuiuſque quadratum demptis 12 Q. facere quadratum. Supereſt vt trium ſumma ſit æqualis 12 Q. ſed tres ſimul iuncti faciunt 14 N. Igitur 14 N. æquantur 12 Q. & fit 1 N. $\frac{7}{6}$. Erit ergo primus $\frac{45\frac{1}{2}}{6}$. ſecundus $\frac{28}{6}$. tertius $\frac{24\frac{1}{2}}{6}$. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος λοιπὸν τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ποιῇ τετράγωνον. τάσσω ὁμοίως ἀριθμόν τινα ὃς μετροῦντας ἔχει τρεῖς. ἔστω πάλιν τὸν ιβ̅. καὶ προσθεὶς τὸν μετροῦντα τῷ καθ' ὃν μετρεῖ, καὶ ἥμισυ λαβὼν, τάσσω τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς, τὸν μὲν ϛϛ̅ ϛ̅ καὶ ἥμισυ. τὸν δὲ ἀριθμῶν δ̅. τὸν δὲ ϛϛ̅ γ̅ καὶ ἥμισυ. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ ἑκάστου τετράγωνον λιπόντα δυνάμεις ιβ̅ ποιεῖν τετράγωνον. λοιπὸν δεῖ τοὺς τρεῖς εἶναι ἴσους δυνάμεσι ιβ̅. ἀλλ' οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσιν ϛϛ̅ ιδ̅. ἀριθμοὶ ἄρα ιδ̅ ἴσοι εἰσὶ δυνάμεσι ιβ̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ˜ ϛ˜. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος με̅ ϛ˜ καὶ ἥμισυ ὁ δὲ δεύτερος κη̅ ϛ˜. ὁ δὲ τρίτος κδ̅ ϛ˜ καὶ ἥμισυ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXXVI.

LEMMA hîc aſſumptum iiſdem innititur fundamentis, quibus & lemma præcedentis, vt manifeſtum eſt. ſolutio quoque totidem modis variari poteſt. Et ex ipſa operatione formabitur huiuſmodi Canon.

Sume quemlibet numerum, tum cape ter duos numeros, quorum mutuo ductu is fiat, aggregatorum semisses simul additas diuide per sumptum numerum, quotientem ducito sigillatim in eosdem semisses, fient quæsiti numeri.

Verbi gratia, sume 48. qui fit tum ex 2. in 24. tum ex 4. in 12. tum ex 6. in 8. Aggregatorum semisses sunt 13. 8. 7. quorum summa 28. qua diuisa per 48. fit $\frac{7}{12}$ quo ducto sigillatim in ipsos 13. 8. 7. fiunt quæsiti numeri $\frac{91}{12}$. $\frac{56}{12}$. $\frac{49}{12}$.

Cæterùm Diophantus more Græcorum vtendo fractionibus fractionum. Primum quidem exhibuit $\frac{45}{6}$. $\frac{1}{2}$. id est $\frac{45}{6}$. & dimidium $\frac{1}{6}$. hoc est $\frac{91}{12}$. Tertium verò $\frac{24}{6}$ $\frac{1}{2}$. id est $\frac{24}{6}$. & dimidium $\frac{1}{6}$. seu $\frac{49}{12}$.

Patet autem eodem prorsus artificio, & hanc & præcedentem ad quotlibet numeros extendi posse, quod vnico exemplo docuisse sufficiet. Quæruntur quatuor numeri, vt vniuscuiusque quadratus multatus summa omnium, quadratus remaneat. Vtendo Canone allato, sumatur 48. qui fit ex 2. in 24. tum ex 3. in 16. tum ex 4. in 12. tum ex 6. in 8. Aggregatorum semisses sunt 13. 9. $\frac{1}{2}$. 8. 7. quorum summa 37. $\frac{1}{2}$. qua diuisa per 48. fit $\frac{25}{32}$. quo ducto sigillatim in ipsos 13. 9. $\frac{1}{2}$. 8 & 7. & omnibus ad eandem reductis denominationem, fiunt quæsiti numeri $\frac{650}{64}$. $\frac{475}{64}$. $\frac{400}{64}$. $\frac{350}{64}$.



DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM

LIBER TERTIVS.

QVÆSTIO I.

INVENIRE tres numeros, vt vniuſcuiuſque eorum quadratus à ſumma trium numerorum detractus, faciat quadratum. Expone duos quadratos, alterum ab 1 N. alterum à 2 N. & fit ſumma quadratorum ab ipſis 5 Q. Pono ergo ſummam trium numerorum 5 Q. & quæſitorum primum 1 N. ſecundum verò 2 N. Ita duabus propoſiti partibus eſt ſatisfactum. Et quoniam habemus 5. qui diuiditur in duos quadratos, nimirum 1. & 4. diuidatur idem rurſus, vt ſupra demonſtratum eſt, in alios duos, quadratos, videlicet in $\frac{4}{25}$. & $\frac{121}{25}$. Pono igitur tertium latus vnius horum, puta $\frac{2}{5}$ N. & enim illius quadratus à ſumma omnium detractus facit quadratum $\frac{121}{25}$. Q. ſupereſt vt tres ſimul æquentur 5 Q. ſed tres ſimul efficiunt $3\frac{2}{5}$ N. Igitur 1 N. fit $\frac{85}{125}$. Erit ergo primus $\frac{85}{125}$. ſecundus $\frac{170}{125}$. tertius $\frac{34}{125}$. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος λειφθεὶς ἀπὸ τῶν συγκειμένων ἐκ τῶν τριῶν ποιῇ τετράγωνον. ἐκτίθου δύο τετραγώνους, τὸν μὲν ἀπὸ ς° ἑνὸς. τὸν δὲ ἀπὸ ςς β. καὶ γίνονται οἱ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνοι δυ ε. τάσσω τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν δυ ε. καὶ τῶν ἐπιζητουμένων ἀριθμῶν, τὸν μὲν πρῶτον ς ἕνα, τὸν δὲ δεύτερον ςς β. καὶ ἔστι δύο τῶν ἐπιταγμάτων λελυμένα. καὶ ἐπεὶ ἔχομεν τὸν ε. διαιρούμενον εἰς δύο τετραγώνους τήν τε μονάδα καὶ τὴν τετράδα, ἔστω μὲν τὸ διελεῖν αὐτὸν ὡς προδέδεικται εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους εἰς τε δ κε$^{\omega\nu}$. καὶ ρκα κε$^{\omega\nu}$. τάσσω νῦν τὸν τρίτον τῆς πλευρᾶς ἑνὸς τούτων. ἔστω β ε$^{\omega\nu}$ ἀριθμοῦ καὶ μένει πάλιν ὁ ἀπ᾽ αὐτοῦ λειφθεὶς ἀπὸ συναμφοτέρου ποιῶν τετράγωνον τὸν ρκα κε$^{\omega\nu}$. δέησει τοὺς τρεῖς λοιπὸν ἴσους εἶναι δυνάμεσι ε. ἀλλ᾽ οἱ τρεῖς εἰσιν ςς γ. καὶ β ε$^{\omega\nu}$. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς πε ρκε$^{\omega\nu}$. ὁ δὲ δεύτερος ρο ρκε$^{\omega\nu}$. ὁ δὲ τρίτος λδ ρκε$^{\omega\nu}$. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

In III. Librum Diophanti Commentarij.

IN QVAESTIONEM I.

OPERATIO Diophanti facilis eſt. Numerus ex duobus quadratis compoſitus, puta 5. rurſus diuiditur in alios duos quadratos per decimam ſecund. Vnde patet hanc quæſtionem ad quotlibet numeros extendi poſſe. Etenim quærantur quatuor Numeri, vt cuiuſlibet eorum quadratus à ſumma numerorum demptus, relinquat quadratum. Ponatur ſumma 5 Q. Primus verò 1 N. ſecundus 2 N. Diuiſoque 5. rurſus in duos alios quadratos, quorum latera $\frac{2}{5}$ & $\frac{11}{5}$ ponatur tertius $\frac{2}{5}$ N. Quartus $\frac{11}{5}$ N. erit ſumma omnium $5\frac{3}{5}$ N. æqualis 5 Q. & fit 1 N. $\frac{28}{25}$. Sunt ergo quæſiti numeri $\frac{140}{125}$. $\frac{280}{125}$. $\frac{56}{125}$. $\frac{308}{125}$. Diuerſitas porrò operationis & ſolutionis è duplici capite oritur. Primò enim ſumma numerorum poni poteſt, quilibet quadratorum numerus ex duobus quadratis compoſitus, puta 10 Q. 13 Q. 17 Q. &c. Deinde manente eadem ſumma numerorum

puta 5 Q. possunt ipsi numeri poni diuersimodè, prout 5. diuidetur in alios atque alios quadratos.

Hinc etiam elicietur Canon vniuersalissimus.

Sume quemlibet numerum ex duobus quadratis compositum, quem rursus diuide toties in duos alios quadratos, donec habeas tot quadratorum latera, quot petuntur numeri. Horum laterum summam diuide per numerum initio sumptum, quotientem ducito sigillatim in ipsa latera, fient quæsiti numeri.

Vt si petantur 4. numeri. Sume 65. quem diuide bis in duos quadratos, erunt horum latera 1. 8. 4. 7. quorum summa 20. qua diuisa per 65. fit $\frac{4}{13}$. quo ducto sigillatim in supradicta latera, fiunt quæsiti numeri $\frac{4}{13}$ $\frac{32}{13}$ $\frac{16}{13}$ $\frac{16}{13}$.

QVÆSTIO II.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τετράγωνος προσλαβὼν ἕκαστον αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν δυνάμεως α. τάσσω τὸν μὲν πρῶτον δυνάμεων τριῶν. τὸν δὲ δεύτερον δυνάμεων η. τὸν δὲ τρίτον δυνάμεων ιε. ἵνα ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τουτέστιν ἡ δύναμις μία προσλαβοῦσα ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. ὃν μὲν δυνάμεων δ. ὃν δὲ δυνάμεων θ. ὃν δὲ δυνάμεων ιϛ. καὶ δεήσει τοὺς τρεῖς συντεθέντας ἴσους γίνεσθαι τῇ πλευρᾷ ἀπὸ τῶν τριῶν, τουτέστιν ἀριθμοῦ ἑνός. ἀλλ' οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσι δυνάμεων κϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α κϛ^{ων}. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος γ χοϛ^{ων} ὁ δὲ δεύτερος η χοϛ^{ων}. ὁ δὲ τρίτος ιε χοϛ^{ων}. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

Invenire tres numeros, vt quadratus summæ ipsorum, quouis ipsorum adiuncto quadratum faciat. Ponatur quadratus summæ trium numerorum 1 Q. Tunc statuam primum 3 Q. secundum 8 Q. tertium 15 Q. vt quadratus summæ trium, nimirum 1 Q. adscito quolibet ipsorum faciat quadratum, hunc quidem 4 Q. illum verò 9. Q. illum denique 16 Q. Oportet autem & tres coniunctos æquari lateri quadrati summæ omnium, hoc est 1 N. sed tres coniuncti efficiunt 26 Q. fit igitur 1 N. $\frac{1}{26}$ erit ergo primus $\frac{3}{676}$ secundus $\frac{8}{676}$ tertius $\frac{15}{676}$ & soluunt quæstionem.

IN QVÆSTIONEM II.

Hic etiam duplici de causa variari potest & operatio & solutio. Primò enim quadratus summæ numerorum statui potest quilibet quadratorum numerus quadratus, puta 1 Q. 4 Q. 9 Q. &c. Deinde quadrato summæ manente eodem, ipsi numeri ponentur diuersimodè, prout quadratus summæ auferetur à diuersis quadratis, & residua ponentur pro quæsitis numeris. Sit posito quadrato summæ 1 Q. poni possunt ipsi numeri, non solùm vt fecit Diophantus 3 Q. 8. Q. 15 Q. sed etiam 24 Q. 35 Q. 48. Q. & sic in infinitum. Vnde patet eadem arte quæstionem ad quotlibet numeros extendi posse. Et hinc quoque formatur Canon vniuersalis.

Sume quemlibet quadratum, quem aufer à totidem quadratis, quot petuntur numeri, per summam residuorum diuide latus sumpti ab initio quadrati, quotientis quadratum ducito sigillatim in ipsa eadem residua, fient quæsiti numeri.

QVÆSTIO III.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν λείψας ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμῶν δ. ὁ δὲ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος δυνάμεων ιϛ. ὃς λείψας δυνάμεις ζ. καὶ δυνάμεις ιβ. καὶ δυνάμεις ιε ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον δυνάμεις ζ τὸν δὲ δεύτερον δυνάμεις ιβ. τὸν δὲ τρίτον δυνάμεων ιε. λοιπόν ἐστι τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ἴσον εἶναι τοῖς τρισίν. ἀλλ' ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ὑπόκειται ἀριθμῶν δ. οἱ δὲ τρεῖς εἰσι δυνάμεων λδ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς β ιζ^{ων}. ἡ δὲ δύναμις

Invenire tres numeros, vt eorum summæ quadratus, quouis ipsorum detracto, faciat quadratum. Ponatur summa trium 4 N. erit illius quadratus 16 Q. qui detractis tum 7 Q. tum 12 Q. tum 15 Q. facit quadratum. Statuo ergo primum 7 Q. secundum 12 Q. tertium 15 Q. Reliquum est compositum ex tribus æquari summæ illorum. Sed summa trium posita est 4 N. Compositus autem ex tribus est 34 Q. Proinde fit 1 N. $\frac{2}{17}$. Quadratus $\frac{4}{289}$. erit ergo primus $\frac{28}{289}$. se-

cundus $\frac{48}{289}$. tertius $\frac{60}{289}$. & soluunt quæstionem.

δ^{ων} $\frac{}{σπθ}$. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κη^{σπθ}. ὁ δὲ δεύτερος μη^{σπθ}. ὁ δὲ τρίτος ξ^{σπθ}. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

QVÆSTIO IV.

INVENIRE tres numeros, vt quadratus compositi ex tribus, detractus à quolibet ipsorum faciat quadratum. Ponatur, compositus ex tribus 1 N. Quadratus autem illius 1 Q. & sunto tres numeri; hic quidem 2 Q. ille verò 5 Q. tertius 10. Q. Nam horum quilibet detracto quadrato compositi ex tribus, hoc est 1 Q. facit quadratum. Et quia quadratus compositi ex tribus, latus habet, patet hoc esse compositum ex tribus. Summa igitur trium est 1 N. sed est quoque 17 Q. Fit igitur 1 N. $\frac{1}{17}$. quadratus $\frac{1}{289}$. eritque primus $\frac{2}{289}$. secundus $\frac{5}{289}$. tertius $\frac{10}{289}$. & satisfaciunt quæstioni.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τετράγωνος ληφθεὶς ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ς^{ου} ἑνός. ὁ δὲ ἀπὸ τούτου τετράγωνος δ^{υ} α. καὶ ἔστωσαν οἱ τρεῖς ὃς μὲν δ^{υ} β. ὃς δὲ δ^{υ} ε. ὃς δὲ δ^{υ} ι. καὶ μένει ἕκαστος αὐτῶν λείψας τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τουτέστι τὴν δ^{υ} α. ποιῶν τετράγωνον, καὶ ἐπεὶ ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν πλευρὰν ἔχει, δῆλον ὅτι ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν. ἡ ἄρα σύνθεσις τῶν τριῶν ἐστιν ς^{ου} ἑνός, ἀλλὰ καὶ δυνάμεων ιζ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α^{ιζ} ἡ δὲ δύναμις α^{σπθ}. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος β^{σπθ}. ὁ δὲ δεύτερος ε^{σπθ}. ὁ δὲ τρίτος ι^{σπθ}. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONES III. ET IV.

NVLLA in his difficultas. Eadem ferè hic dici possunt, quæ ad duas præcedentes sunt adnotata, & Canones eadem facilitate formabuntur. Cæterùm his quatuor quæstionibus idem agit Diophantus in tribus numeris, quod fecit in duobus, libro secundo quæstionibus 23. 24. 25. 26. vnde etiam colligere licet huiusmodi quæstiones ad quotlibet numeros eadem arte extendi.

QVÆSTIO V.

INVENIRE tres numeros, quadrato æquales, quorum bini reliquum superent quadrato numero. Ponantur tres simul æquales quadrato ab 1 N. + 1. hoc est 1 Q. + 2 N. + 1. Quorum primus & secundus superent tertium vnitate. Erit ergo tertius $\frac{1}{2}$ Q. + 1 N. sic enim primus & secundus superabunt illum vnitate. Rursus secundus & tertius superent primum quadrato, nimirum 1 Q. erit similiter primus 1 N. + $\frac{1}{2}$. Reliquum ergo habemus secundum $\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{2}$. superest vt primus & tertius superent secundum quadrato numero. Sed quo primus & tertius superant secundum sunt 2 N. Hoc ergo æquatur quadrato, puta 16. & fit 1 N. 8. erit igitur primus 8 $\frac{1}{2}$. secundus 32 $\frac{1}{2}$. tertius 40 & satisfaciunt proposito.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ ὅπως συνδύο λαμβανόμενοι, τοῦ λοιποῦ ὑπερέχωσι τετραγώνῳ. Τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ἴσοι τετραγώνῳ ἀπὸ ς^{ου} α μ^{ο} α. τουτέστι δ^{υ} α ςς β μ^{ο} α. ὧν ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ὑπερεχέτωσαν μ^{ο} α. ὁ ἄρα τρίτος ἔσται δ^{υ} ἡμίσεος ς^{ου} α. ἵνα καὶ ὁ δεύτερος ὑπερέχωσι τοῦ τρίτου τῇ μ^{ο}. πάλιν ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος τοῦ πρώτου ὑπερέχουσι τετραγώνῳ. ὑπερεχέτωσαν δ^{υ} α. ἔσται ὁμοίως ὁ πρῶτος ς^{ου} α μ^{ο} ἡμίσεος. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν δεύτερον ἔχομεν δυνάμεως ἡμίσεος μ^{ο} ἡμίσεος. λοιπὸν δεῖ τὸν πρῶτον μετὰ τοῦ τρίτου ὑπερέχειν τοῦ δευτέρου τετραγώνῳ. ἀλλ' ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου τοῦ μὲν δευτέρου ὑπερέχει ςς β. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ, τουτέστι μ^{ο} ιϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^{ο} η. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ^{ο} η καὶ ἡμίσεος. ὁ δὲ δεύτερος μ^{ο} λβ καὶ ἡμίσεος. ὁ δὲ τρίτος μ^{ο} μ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM V.

QVOD supponit hîc Diophantus, tale eſt.

Datis tribus numeris, ſi interuallum quo duo ex illis ſuperant tertium auferatur à ſumma trium numerorum, remanet duplum tertij.

Hoc ipſum verò iam demonſtratum eſt ad decimam octauam primi. Dupliciter autem variari poſſunt tam operatio quàm ſolutio. Primo enim quadratus qui ponitur pro ſumma trium numerorum fingi poteſt non ſolùm à latere 1 N. + 1. ſed à quotcunque Numeris + quotcunque vnitatibus. Deinde interuallum primi & tertij ſupra ſecundum, quod in hypotheſi Diophantæa reperitur 2 N. poteſt æquari cuilibet vnitatum numero quadrato, vt manifeſtum eſt.

QVAESTIO VI.

Ἄλλως.

ΖΗΤΩ πρότερον εὑρεῖν ἀριθμοὺς τετραγώνους, ἴσους τετραγώνῳ. ἐὰν δὲ συνθῶ β τετραγώνους οἷον τὸν δ καὶ τὸν θ. καὶ ζητήσω τίς τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ιγ. ποιεῖ τετράγωνον. εὑρήσω τὸν λϛ. καὶ ἔσονται οἱ τρεῖς τετράγωνοι ἴσοι ἑνὶ τετραγώνῳ. λοιπὸν ἀπῆκται εἰς τὸ ζητῆσαι εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως συνδύο τοῦ λοιποῦ ὑπερέχωσι δοθέντι ἀριθμῷ, ὁ μὲν πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου, τοῦ τρίτου, μο δ. ὁ δὲ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου, τοῦ πρώτου, μο θ ὁ δὲ τρίτος μετὰ τοῦ πρώτου, τοῦ δευτέρου μονάσι λϛ. τοῦτο δὲ προδέδεικται καὶ ἔστι ὁ μὲν πρῶτος μο κ. ὁ δὲ δεύτερος μο ϛ καὶ ἡμίσεος. ὁ δὲ τρίτος μονάδων κβ καὶ ἡμίσεος. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

Aliter.

QVÆRO primùm tres numeros quadratos æquales quadrato. Si autem duos quadratos compoſuero, vt 4. & 9. & quæſiuero quis quadratus adſcito 13. faciat quadratum, inueniam 36. & erunt tres quadrati æquales vni quadrato. Reſtat vt quæramus tres numeros, vt bini iuncti reliquum ſuperent dato numero, primus ſcilicet & ſecundus, tertium ſuperent vnitatibus 4. ſecundus & tertius primum excedant vnitatibus 9. tertius & primus ſecundo ſuperaddant vnitates 36. Hoc autem ſupra demonſtratum eſt. Et eſt primus 20. ſecundus $6\frac{1}{2}$. tertius $22\frac{1}{2}$. & ſatisfaciunt propoſito.

IN QVAESTIONEM VI.

DVO ſupponit Diophantus. Primum reperiri poſſe tres quadratos, quadratum ſimul conficientes, quod quidem facilè fit auxilio vndecimæ ſecundi. Nam ſumptis duobus quibuſlibet quadratis puta 4. & 9. quorum ſumma 13. Iam quæro per vndecimam ſecundi duos quadratos quorum interuallum ſit 13. & horum minor 36. eſt tertius quæſitus. Secundò ſupponit author tres exceſſus binorum ſuprà reliquum, æquari ſummæ ipſorum numerorum, quod iam à nobis eſt demonſtratum ad decimam octauam primi. Porrò tum ex hac operatione, tum ex Canone decimæ octauæ primi eruitur huiuſmodi Canon.

Sume tres quadratos quadratum conficientes, ab eorum ſumma aufer ſigillatim vnumquemque ipſorum, reſiduorum ſemiſſes erunt quæſiti numeri.

Sed & non vulgari artificio quæſtio extendetur ad quatuor numeros, & ſic proponetur.

Inuenire quatuor numeros quadrato æquales, quorum terni reliquum ſuperent quadrato numero.

Ponatur ſumma numerorum quilibet numerus quadratus, puta 4. Quia ergo vt oſtenſum eſt ad vigeſimam primi, ſumma exceſſuum dupla eſt ſummæ numerorum, erit exceſſuum ſumma 8. Reſtat ergo vt 8. diuidatur in quatuor quadratos; quorum quilibet ſit minor quàm 4. Id autem facilè fiet ſi 4. diuidatur bis in duos quadratos per octauam ſecundi, eruntque hi $\frac{16}{25}$ $\frac{64}{25}$ $\frac{100}{169}$ $\frac{576}{169}$. Itaque applicando hîc Canonem vigeſimæ primi, hoc eſt à ſemiſſe exceſſuum qui eſt 4. auferendo ſingulos exceſſus, & reſiduorum capiendo ſemiſſes, fient quæſiti numeri $\frac{32}{25}$ $\frac{18}{25}$ $\frac{50}{169}$ $\frac{288}{169}$. ſic licebit quæſtionem ad quotlibet numeros extendere, ſed aliquando vtendum erit artificio quo duodecima quinti vtitur Diophantus. Vt ſi quærantur quinque numeri quadrato æquales, quorum quaterni reliquum ſuperent quadrato numero. Quare quæſtionis huius explicationem reiicimus in decimam ſeptimam quinti, vbi commodius afferetur.

QVÆSTIO VII.

INVENIRE tres numeros æquales quadrato, vt bini iuncti faciant quadratum. Statuantur tres simul æquales quadrato 1 Q. + 2 N. + 1. & esto primus cum secundo 1 Q. relinquetur ergo tertius 2 N. + 1. Esto autem secundus cum tertio 1 Q. + 1 − 2 N. à latere 1 N. − 1. Et quia tres simul sunt 1 Q. + 2 N. + 1. relinquetur vtique primus 4 N. sed primus cum secundo positus est 1 Q. erit igitur secundus 1 Q. − 4 N. Oportet itaque & primum tertio iunctum, nempe 6 N. + 1. æquari quadrato. Sit ergo is 121. & fit 1 N. 20. erit igitur primus 80. secundus 320. tertius 41. & soluunt quæstionem.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ἵνα σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ἴσοι τετραγώνῳ δυ ᾱ, ςς β̄ μο ᾱ καὶ ἔστω, ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου, δυ ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ςς β̄ μο ᾱ. ἔστω δὲ καὶ ὁ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου, δυ ᾱ μο ᾱ ⫛ ςς β̄. ἀπὸ πλευρᾶς ς ᾱ λείψει μο ᾱ. καὶ εἰσὶν οἱ τρεῖς δυ ᾱ ςς β̄ μο ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ςς δ̄. ἀλλὰ καὶ σὺν τῷ δευτέρῳ τέτακται δυ ᾱ. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται δυ ᾱ λείψει ςς δ̄. δεήσει ἄρα καὶ τὸν πρῶτον μετὰ τοῦ τρίτου συναγόμενον ςς ς̄ μο ᾱ. ἰσῶσαι τετραγώνῳ. ἔστω ἴσος μο ρκᾱ, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο κ̄. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο π̄. ὁ δὲ δεύτερος μο τκ̄. ὁ δὲ τρίτος μο μᾱ. καὶ ποιοῦσι τὸ ἐπίταγμα.

QVÆSTIO VIII.

Aliter.

PONANTVR tres simul 1 Q. + 2 N. + 1. & sint primus & secundus 1 Q. relinquitur ergo tertius 2 N. + 1. Esto rursus secundus cum tertio 1 Q. + 1. − 2 N. horum ergo tertius cùm sit 2 N. + 1. relinquitur secundus 1 Q. − 4 N. est autem & primus cum secundo 1 Q. quorum secundus est 1 Q. − 4 N Relinquitur ergo primus 4 N. & tres coniuncti faciunt imperatum quadratum 1 Q. + 2. N. + 1. & primus cum secundo, itemque secundus cum tertio faciunt quadratum. Oportet itaque & tertium cum primo iunctum, nimirum 6 N. + 1. æquari quadrato. Esto quadrato 36. & fit 1 N. $\frac{35}{6}$. Erit ergo primus $\frac{140}{6}$. hoc est $\frac{840}{36}$ secundus $\frac{385}{36}$. tertius $\frac{456}{36}$. & soluunt quæstionem.

Ἄλλως.

ΤΕΤΑΧΘΩΣΑΝ οἱ τρεῖς δυ ᾱ ςς β̄ μο ᾱ. καὶ ἔστω ὁ πρῶτος καὶ δεύτερος δυ ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ςς β̄ μο ᾱ. ἔστω δὲ καὶ ὁ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου δυ ᾱ μο ᾱ λείψει ςς β̄. ὧν ὁ τρίτος ςς β̄ μο ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται δυ ᾱ λείψει ςς δ̄. ἔστι δὲ καὶ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου δυ ᾱ. ὧν ὁ δεύτερος δυ ᾱ λείψει ςς δ̄. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ςς δ̄. καὶ οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσι τὸν ἐπιταχθέντα τετράγωνον δυ ᾱ, ςς β̄ μο ᾱ. καὶ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου, καὶ ὁ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου ποιοῦσι τετράγωνον. δεήσει ἄρα καὶ τὸν τρίτον μετὰ τοῦ πρώτου συναγόμενον ςς ς̄ μο ᾱ. ἰσῶσαι τετραγώνῳ. ἔστω μο λς̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς λε ς̄. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρμ ς̄. τουτέστι ωμ λς̄. ὁ δὲ δεύτερος τπε λς̄. ὁ δὲ τρίτος υνς λς̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVÆSTIONES VII. ET VIII.

INTER has duas propositiones nulla omnino vel perexigua est differentia ; eadem fermè est operatio aliter atque aliter explicata. Diuersitas in eo consistit, quod in septima inuenta prius tertij numeri hypostasi, inuenit deinde hypostasim primi, vnde elicit hypostasim secundi. At in octaua inuento prius tertio, inde elicit secundum, atque inde primum. Eodem tamen recidit vtraque operatio, vt manifestum est. Itaque vt omnia explicentur dilucidè, & varietas omnis tum operationis tum solutionis perfectè comprehendatur.

Aduerte primò, vt benè monet Xilander, pro quadrato quem tres numeri simul constituunt statui posse quemlibet quadratum, cuius latus constet ex quolibet Numerorum numero + quot-

libet vnitatibus. Posuit Diophantus latus illius 1 N. + 1. sed poni poterat 1 N. + 2. vel 1 N. + 3. &c. vel etiam 2 N. + 1. 2 N. + 2. 2 N. + 3. &c.

Aduerte secundò pro summa secundi & tertij statui posse quadratum quemlibet minorem quadrato, qui positus est pro summa trium numerorum. Sic Diophantus posita summa trium 1 Q. + 2 N. + 1. posuit summam secundi & tertij 1 Q. − 2 N. + 1. sed si ponatur summa trium 1 Q. + 4 N. + 4. poni poterit summa secundi & tertij 1 Q. + 2 N. + 1. vel etiam 1 Q. − 2 N. + 1. vel 1 Q. − 4 N. + 4. & sic in infinitum.

Aduerte tertiò summam primi & tertij quæ quadrato æquanda manet, æquari debere tali quadrato, vt inde auferendo vnitates quæ continentur in eadem summa, & diuidendo residuum per numerum Numerorum eiusdem summæ, prodeat quotiens maior numero Numerorum, qui reperiuntur cum signo defectus in hypostasi secundi numeri. vt in hypotesi Diophantæa, vbi summa primi & tertij 6 N. + 1. est æquanda quadrato, quia hypostasis secundi est 1 Q. − 4 N. Oportet inuenire quadratum qui vnitate multatus, & diuisus per 6. det quotientem maiorem quàm 4. Id autem vt arte certa consequamur. Ponatur huiusmodi quadratus 1 Q. vnde ablata vnitate, fiet 1 Q. − 1. quo diuiso per 6 fiet $\frac{1}{6}$ Q. − $\frac{1}{6}$. maior quàm 4. & supplendo defectum, fiet $\frac{1}{6}$ Q. maior quàm 4 $\frac{1}{6}$ & omnia per 6. multiplicando fiet 1 Q. maior quàm 25. Quamobrem æquabimus 6 N. + 1. cuilibet quadrato maiori quàm 25. In prima operatione Diophantus æquauit 6 N. + 1. quadrato 121. In secunda verò, quadrato 36. Eodemque artificio reperietur terminus suprà quem consistere debet talis quadratus, si primæ positiones aliter instituantur.

Porro ex operatione Diophanti elicio satis artificiosum Canonem.

Cape duos quadratos quorum ratio sit maior quàm 25. ad 1. horum interualli bessis constituet primum quæsitorum; Quem si auferas à quadrato quotientis qui fit diuidendo idem interuallum per sextuplum minoris lateris, orietur secundus. Denique si eiusdem interualli trienti addas minorem quadratum, fiet tertius.

Verbi gratia cape quadratos 121. & 1. horum interuallum est 120. cuius $\frac{2}{3}$ sunt 80. primus numerus. Tum diuide 120. per 6. sextuplum minoris lateris fiet 20. cuius quadratus 400. vnde auferendo 80. fit 320. secundus numerus. Denique trienti ipsius 120. qui est 40. adde minorem quadratum 1. fiet 41. tertius numerus. sunt ergo tres quæsiti numeri 80. 320. 41.

QVÆSTIO IX.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ζητῶ πρότερον τρεῖς ἀριθμοὺς τετραγώνους, ἵνα ὦσιν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὧν τὸ ἥμισυ τῆς συνθέσεως τῶν τριῶν μεῖζον ἐστὶν ἑκάστου. τετάχθω οὖν ὁ μὲν πρῶτος δυνάμεως $\bar{\alpha}$. ὁ δὲ δεύτερος δ^{υ} $\bar{\alpha}$ ς^{οὶ} $\bar{\beta}$ μ^{ο} $\bar{\alpha}$. καὶ ἔστιν αὐτῶν ἡ ὑπεροχὴ ς^{οὶ} $\bar{\beta}$ μ^{ο} $\bar{\alpha}$. ἐὰν δὲ προσθῶ τῷ δευτέρῳ τοὺς ς^{οὺς} $\bar{\beta}$ μ^{ο} $\bar{\alpha}$. γίνεται ὁ τρίτος δ^{υ} $\bar{\alpha}$ ς^{οὶ} $\bar{\delta}$ μ^{ο} $\bar{\beta}$. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς^{οῦ} $\bar{\alpha}$. λείψει μ^{ο} $\bar{\eta}$. γίνεται ὁ τετράγωνος δ^{υ} $\bar{\alpha}$ μ^{ο} $\bar{\xi\delta}$. λείψει ς^{οῖς} $\bar{\iota\varsigma}$. ἴσος δ^{υ} $\bar{\alpha}$ ς^{οῖς} $\bar{\delta}$ μ^{ο} $\bar{\beta}$. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς $\bar{\xi\beta}$ ^{κ}. τουτέστι $\bar{\lambda\alpha}$ ^{ι}. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος $\bar{\pi\xi\alpha}$. ὁ δὲ δεύτερος $\bar{\alpha\chi\pi\alpha}$. ὁ δὲ τρίτος $\bar{\beta\upsilon\alpha}$. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα τὸ ζητούμενον. τουτέστι τρεῖς τετραγώνους ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, καὶ ἔστι τῶν τριῶν τὸ ἥμισυ μεῖζον ἑκάστου αὐτῶν. νῦν ἔρχομαι ἐπὶ τὸ προβεβλημένον, τουτέστιν εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ζητῶ πρότερον τρεῖς τετραγώνους ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, τοῦτο δὲ προδέδεικται, καὶ εἰσὶν οἱ τετράγωνοι

INVENIRE tres numeros in æquali interuallo, vt bini iuncti quadratum efficiant. Quæro primùm tres quadratos numeros æqualibus interuallis distantes, quorum summæ semissis maior sit quouis ipsorum. Ponatur igitur primus 1 Q. secundus autem 1 Q. + 2 N. + 1. & est ipsorum interuallum 2 N. + 1. si autem addidero secundo 2 N. + 1. fiet tertius 1 Q. + 4 N. + 2. Hæc æquantur quadrato à latere 1 N. − 8. fitque quadratus 1 Q. + 64 − 16 N. æqualis 1 Q. + 4 N. + 2. & fit 1 N. $\frac{62}{20}$. hoc est $\frac{31}{10}$. Erit ergo primus 961. secundus 1681. tertius denique 2401. & satisfaciunt proposito, sunt enim tres quadrati æquali interuallo distantes, & semissis summæ illorum, quouis ipsorum est maior. Venio nunc ad id quod quæritur, scilicet quo pacto tres numeri inueniantur eodem interuallo se superantes, quorum bini coniuncti quadratum faciant. Primùm quæro tres quadratos in æquali interuallo, vti iam demonstratum est, & sunt huiusmodi quadrati.

Primus

Primus 961. ſecundus 1681. tertius 2401. inueniendum iam eſt quomodo primus & ſecundus facere poſſint 961. ſecundus & tertius 2401. nam ob interualli æqualitatem inuertitur ordo, tertius & primus 1681. Statuatur trium ſumma 1 N. Cùm ergo tres ſimul ſint 1 N. ſi inde detraxero ſummam primi & ſecundi nimirum 961. habebo tertium 1 N. — 961. & rurſus ſi ab 1 N. abſtulero ſummam ſecundi & tertij, nempe 1401. habebo primum 1 N. — 2401. ſi autem ab 1 N. dempſero ſummam tertij & primi, nimirum 1681. habebo ſecundum 1 N. — 1681. Reſtat vt tres ſimul iuncti æquales ſint 1 N. & fit 1. N. 25 21. ½ & factum eſt quod imperabatur.

ὁ πρῶτος πξα̅. ὁ δεύτερος ͵αχπα, ὁ τρίτος ͵βυα. νῦν δεῖ εὑρεῖν ὅπως ὁ πρῶτος, καὶ ὁ δεύτερος ποιῶσι μ° πξα̅. ὁ δὲ δεύτερος, καὶ ὁ τρίτος ͵βυα. ἐνήλλακται γὰρ διὰ τὴν ἴσην ὑπεροχήν. ὁ δὲ τρίτος, καὶ ὁ πρῶτος μ°. ͵αχπα̅. τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ς° ἑνὸς, καὶ ἐπεὶ οἱ τρεῖς εἰσιν ς° ἑνός, ἐὰν ἄρα ἀφέλω τὰς τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου μ° πξα̅. ἕξω τὸν τρίτον ς° α̅ ⋔ μ° πξα. καὶ πάλιν ἐὰν ς° ἑνὸς, ἀφέλω τὰς τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου μονάδας βυα̅. ἕξω τὸν πρῶτον ς° α̅ λείψει μ°, βυα̅. ἐὰν δὲ ς° ἑνὸς ἀφέλω τὰς τοῦ τρίτου καὶ τοῦ πρώτου μονάδας ͵αχπα̅. ἕξω τὸν δεύτερον ς° α, λείψει μ° ͵αχπα̅. λοιπὸν δεῖ τοὺς τρεῖς συντεθέντας ἴσους εἶναι ἀριθμῷ α̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ͵βφκα̅. καὶ ἥμισυ. καὶ μένει τὸ ἐπίταγμα.

IN QVAESTIONEM IX.

HIc multa obſeruanda ſunt quæ minimè attigit Xilander, ſine quibus operatio Diophanti nequit perfectè intelligi.

Primò, quærit tres quadratos æqualibus interuallis diſtantes, quorum ſummæ ſemiſſis maior ſit quolibet ipſorum, quia vult vt quæſiti numeri bini & bini conſtituant huiuſmodi quadratos. Id autem fieri non poteſt, niſi trium quadratorum ſummæ ſemiſſis quolibet ipſorum ſit maior, vt demonſtratum eſt ad decimam ſextam primi, ad quam tandem reducitur hæc quæſtio, vt liquet ex vltima operatione quæ prorſus eadem eſt cum operatione decimæ ſextæ primi. vnde etiam vti poſſes Canone ibidem tradito.

Secundò, ſumit huiuſmodi quadratos æqualibus interuallis diſtantes, quia inde ſequitur ipſos tres numeros quæſitos, qui bini hos quadratos conſtituunt, diſtare etiam inter ſe interuallis æqualibus, vt poſtulat quæſtio. Quod pendet à tali propoſitione.

Si fuerint tres numeri, qui bini conſtituant ſummas æqualibus interuallis diſtantes, & ipſi numeri æqualibus diſtabunt interuallis, & è conuerſo.

A 2. B 5. C 8.
D 7. E 10. F 13.

Sint tres A B C. quorum A B ſimul faciant D. At A C ſimul componant E, & B C. ſimul conſtituant F. ſintque D E F. æqualibus diſtantes interuallis. Dico & ipſos A B C. æqualibus interuallis diſtare, imò iiſdem prorſus quibus diſtant ipſi D E F. Etenim quia idem A. additus vtrique B & C. facit D & E. erit idem interuallum inter D & E. quod eſt inter B & C. (nam idem numerus duobus inæqualibus additus, ſummas facit eodem interuallo inæquales.) Similiter quia idem C. additus vtrique A & B. componit ipſos E & F. erit eandem ob cauſam, idem interuallum ipſorum E F. quod eſt ipſorum A B. Quare conſtat propoſitum. vnde etiam innoteſcit inuerſio illa ordinis de qua loquitur Diophantus, nam primus & ſecundus conſtituunt D. At ſecundus & tertius faciunt F. Ac demum tertius & primus componunt E. Quare & ipſe in quadratis inuentis ordinem inuertit, vult enim primum quadratum eſſe ſummam primi & ſecundi numeri. At tertium quadratum eſſe ſummam ſecundi & tertij numeri. Ac demum ſecundum quadratum eſſe ſummam tertij & primi numeri.

Tertiò numeri quadrato æquandi 1 Q. + 4 N. + 2. latus fingit Diophantus 1 N. — 8. tali arte vt reſoluendo hypoſtaſes per valorem Numeri, fiant quadrati quæſiti quales poſtulantur, nimirum vt quilibet ipſorum, minor ſit ſemiſſe ſummæ eorumdem. Id autem quomodo certa ſcientia conſequi poſſimus non ſtatim apparet. Et Xilander quidem experiendo didicit latus fictitium eſſe non poſſe 1 N. — 6. Sed non docuit modum inueniendi terminum ſupra quem conſiſtere debet vnitatum numerus in dicto latere ponendus cum defectu, quem ſanè ſi eſſe 8. exiſtimauit, allucinatus eſt, cùm optimè fingi poſſit latus illud 1 N. — 7. vt mox patebit. Itaque vt rem à fundamentis aperiamus. Quia ſi ſint tres numeri quorum quilibet minor ſit ſemiſſe ſummæ illorum, hoc idem eſt, atque ſi duo quilibet ex ipſis maiores ſint reliquo vt manifeſtum eſt. At duo quilibet maiores erunt reliquo, ſi duo minores ſimul ſuperent maximum. Eo redacti ſumus vt inueniamus tres quadratos in medietate Arithmetica, vt medius & minimus ſimul excedant maximum. eſt autem minimus 1 Q. medius 1 Q. + 2 N. + 1. Horum ergo ſumma 2 Q. +

O

2 N. + 1. debet esse maior maximo qui est 1 Q. + 4 N. + 2 & auferendo vtrinque similia, remanet 1 Q. maior quàm 2 N. + 1. qua æquatione resoluta, fit 1 N. maior quàm R. 2 + 1. seu quàm 2 $\frac{1}{2}$. Quamobrem in fingendo latere quadrati 1 Q. + 4 N + 2. curandum est vt valor numeri non sit minor quàm 2 $\frac{1}{2}$. Atqui valor Numeri fiet à quodam quadrato, multato binario, & diuiso per duplum sui lateris quaternario auctum. Inueniendus ergo est huiusmodi quadratus. Ponatur is 1 Q. Igitur $\frac{1 Q. - 2}{2 N. + 4.}$ non minor esse debet quàm 2 $\frac{1}{2}$. & omnia ducendo in 2 N. + 4. fit 1 Q. − 2 non minor quàm 5 N. + 10. & tandem 1 Q. non minor quàm 5 N. + 12. Quare æquabimus 1 Q. numero paulo maiori quàm 5 N. + 12. puta 5 N. + 14. & fiet 1 N. 7. Itaque in latere fictitio ponentur vnitates non minores quàm 7. Quod si fingatur latus illud 1 N. − 7. fiet quadratus 1 Q. − 14 N. + 49. æqualis 1 Q. + 4 N. + 2. & fiet 1 N. $\frac{47}{18}$. sunt ergo quæsiti quadrati 2209. 4225. 6241.

Hinc ad soluendum hoc lemma elicitur huiusmodi Canon.

Sume quemuis numerum non minorem quàm 7. & eius quadratum binario multatum diuide per duplum sui lateris quaternario auctum, quotientis quadratus est minimus quæsitorum. Cui si addas duplum sui lateris vnitate auctum, fiet secundus, & huic si addas idem interuallum, fiet tertius.

Semel autem inuentis tribus huiusmodi quadratus, reperientur alij infiniti idem præstantes, si iam inuenti per eundem aliquem quadratum multiplicentur vel diuidantur, nam fient quadrati æqualibus quoque interuallis distantes, vt iam monuimus ad vigesimam secundi, quæ causa est cur Diophantus omisso communi denominatore, solis vtatur numeratoribus. Denique hoc lemmate expedito, soluetur iam ipsa quæstio per Canonem decimam-sextam primi, vt euidens est. sic inuentis quadratis 2209. 4225. 6241. horum summam cape fiet 12675. cuius semissis 6337 $\frac{1}{2}$. vnde auferendo sigillatim eosdem quadratos, remanent ordine inuerso quæsiti numeri 4128 $\frac{1}{2}$. 2112 $\frac{1}{2}$. & 96 $\frac{1}{2}$.

QVÆSTIO X.

ΑΡΙΘΜΟΥ τινὸς δοθέντος προσευρεῖν ἑτέρους τρεῖς, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔτι δὲ καὶ οἱ τρεῖς συντεθέντες προσλαβόντες τὸν δοθέντα ποιῶσι τετράγωνον. ἔστω ὁ μὲν δοθεὶς μο τριῶν, ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ δύο τῶν πρώτων δυνάμεως α̅ ςς δ̅ μο α̅. ἵνα μετὰ τῶν τριῶν μονάδων ποιῇ τετράγωνον. οἱ δὲ ἑξῆς δύο δυ α̅ ςς ς̅ μο ς̅. οἱ δὲ τρεῖς δυ α̅ ςς η̅ μο ιγ̅. ἵνα καὶ οὗτοι μετὰ μο τριῶν ποιῶσι τετράγωνον, καὶ ἐπεὶ οἱ τρεῖς εἰσι δυ α̅ ςς η̅ μο ιγ̅. ὧν οἱ πρῶτοι δύο δυ α̅ ςς δ̅ μο α̅. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἐστὶ ςς δ̅ μο ιβ̅. πάλιν ἐπεὶ τρεῖς εἰσι δυ α̅. ςς η̅. μο ιγ̅. ὧν ὁ δεύτερος καὶ τρίτος δυ α̅ ςς ς̅ μο ς̅. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἐστὶ ςς β̅ μο ζ̅. ἀλλὰ καὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερός εἰσι δυνάμεως α̅ ςς δ̅ μο α̅. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται δυ α̅ ςς β̅ λείψει μο ς̅. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν πρῶτον μετὰ τοῦ τρίτου προσλαβόντα μο τρεῖς ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ᾽ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου προσλαβὼν μο γ̅. γίνονται ςς οἱ ς̅ μο κβ̅. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μονάδες λγ̅ ὁ δὲ δεύτερος μο ρπθ̅. ὁ δὲ τρίτος μο ξδ̅. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

DATO aliquo numero, inuenire tres alios, vt compositus ex binis quibuslibet adsumpto dato numero faciat quadratum; sed & summa trium dato numero adiecto faciat quadratum. Esto datus numerus 3. Compositus autem ex duobus primis sit 1 Q. + 4 N. + 1. vt adscito 3. faciat quadratum. Duo verò deinceps sint 1 Q. + 6 N. + 6. Tres autem simul 1 Q. + 8 N. + 13. vt & hi adsumpto 3. faciant quadratum. Et quoniam trium summa est 1 Q. + 8 N. + 13. quorum primi duo sunt 1 Q. + 4 N. + 1. Relinquitur vtique tertius 4 N. + 12. Rursus quoniam tres simul sunt 1 Q. + 8 N. + 13. quorum secundus & tertius sunt 1. Q. + 6. N. + 6. relinquitur vtique primus 2 N. + 7. sed & primus & secundus sunt 1 Q. + 4 N. + 1 relinquitur ergo secundus 1 Q. + 2 N − 6. Superest vt primus & tertius adscito 3. faciant quadratum. Sed primus & tertius adscito 3. faciunt 6 N. + 22. Hæc ergo æquantur quadrato. Esto is 100 fit 1 N. 13. Erit igitur primus 33. secundus 189. tertius 64. & satisfaciunt proposito.

IN QVAESTIONEM X.

QVÆ monet Xilander de positionum varietate, verissima sunt. Sed allucinatur cùm ait numerum 6 N. + 22. æquari posse cuilibet quadrato maiori quàm 22. Nam oportet talem quadratum deligi à quo auferendo 22. & residuum per 6. diuidendo fiat quotiens cuius quadratus auctus duplo sui lateris superet 6. aliter habere non posset secundus numerus qui positus est 1 Q. + 2 N. − 6. Ita si ponas 6 N. + 22 æquari quadrato 25. secundus numerus inuenietur minor nihilo. Quamobrem sumendus est quadratus 36. vel quilibet alius maior quàm 36. vt certa ratione facilè concludi potest. Etenim quia 1 Q. + 2 N. debent excedere 6. hac æquatione resoluta, fit 1 N. maior quàm ℞ 7 − 1. seu non minor quàm $1\frac{3}{4}$. fit autem valor numeri, vt dictum est à quodam quadrato auferendo 22. & residuum diuidendo per 6. quare quæratur huiusmodi quadratus, & esto 1 Q. Igitur $\frac{1}{6}$ Q. − $\frac{22}{6}$. non minor esse debet quàm $1\frac{3}{4}$. & tandem 1 Q. reperitur non minor quàm $32\frac{1}{2}$. qualis est 36. & alius quilibet suprà 36.

OBSERVATIO D. P. F.

QVomodo inueniendi sint 4 numeri vt compositus ex binis quibuslibet adsumpto dato numero conficiat quadratum inuenimus ad propositionem 3. libri 5.

QVAESTIO XI.

DATO aliquo numero, inuenire tres alios, vt compositus ex duobus quibuslibet dempto dato numero faciat quadratum, sed & trium summa detracto dato numero faciat quadratum. Esto rursus datus numerus 3. Ponatur compositus ex duobus primis 1 Q. + 3. vt detracto 3. faciat quadratum. Duo verò deinceps sint 1 Q. + 2 N. + 4. Trium verò summa 1 Q. + 4 N. + 7. vt & hi dempto 3. faciant quadratum. Et quoniam summa trium est 1 Q. + 4 N. + 7. quorum primus & secundus faciunt 1. Q. + 3. relinquitur tertius 4 N. + 4. Rursus quia secundus & tertius sunt 1 Q. + 2 N. + 4. quorum tertius est 4 N. + 4. relinquitur secundus 1 Q. − 2 N. sunt autem primus & secundus 1 Q. + 3. quorum secundus est 1 Q. − 2 N. relinquitur ergo primus 2 N. + 3 Oportet itaque tertium & primum detracto 3. facere quadratum. Sed tertius cum primo, detracto 3. facit 6 N. + 4. Hæc igitur æquantur quadrato. Esto is 64. & fit 1 N. 10. Ad positiones. Erit primus 23. secundus 80. tertius 44. & satisfaciunt quæstioni.

ΑΡΙΘΜΟΥ τινος δοθέντος προσευρεῖν ἑτέρους τρεῖς, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ δύο ὁποιωνοῦν ⋔ τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔτι δὲ καὶ οἱ τρεῖς συντεθέντες καὶ ⋔ τὸν δοθέντα ποιῶσι τετράγωνον. ἔστω πάλιν ὁ μὲν δοθεὶς μο γ̄. ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ τῶν δύο πρώτων δυ ᾱ μο γ̄. ἵνα λείψας τὰς τρεῖς μονάδας ποιῇ τετράγωνον. οἱ δὲ δύο ἑξῆς δυ ᾱ ςς β̄ μο δ̄. οἱ δὲ τρεῖς δυ ᾱ ςς δ̄. μο ζ̄ ἵνα καὶ οὗτοι λείψει μο γ̄. ποιῶσι τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ οἱ τρεῖς εἰσι δυ ᾱ ἀριθμῶν δ̄ μονάδων ζ̄. ὧν ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος δυ ᾱ μο γ̄. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἐστὶν ςς δ̄ μο δ̄. πάλιν ἐπεὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος εἰσὶ δυ ᾱ ςς β̄ μο δ̄. ὧν ὁ τρίτος ἐστὶ ςς δ̄. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται δυ ᾱ λείψει ςς β̄. ἔστι δὲ καὶ ὁ πρῶτος, καὶ ὁ δεύτερος δυ ᾱ μο γ̄. ὧν ὁ δεύτερός ἐστι δυ ᾱ ⋔ ςς β̄. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ςς β̄ μο γ̄. δεήσει ἄρα καὶ τὸν τρίτον μετὰ τοῦ πρώτου λείψει μο γ̄. ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ᾽ ὁ τρίτος μετὰ τοῦ πρώτου λείψει μο γ̄ ἐστιν ςς ς̄ μο δ̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ἔστω τῷ ξδ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο ῑ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο κγ̄. ὁ δὲ δεύτερος μο π̄. ὁ δὲ τρίτος μο μδ̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XI.

HIC quoque lapsus est Xilander cùm putauit numerum 6 N. + 4. æquari potuisse quadrato 16 sic enim secundus qui positus erat 1 Q. − 2 N. Inuenitur æqualis nihilo. Quare determinandum est de huiusmodi quadrato, hac arte. Vt 1 Q. sit maior quàm 2 N. oportet vtique 1 N. maiorem esse quàm 2. Itaque quia æquando quadrato 6 N. + 4. fit valor Numeri à quodam quadrato auferendo 4. & residuum per 6. diuidendo: Eò redacti sumus vt inueniamus quadratum qui multatus quaternario, & per 6. diuisus det quotientem maiorem quàm 2. Esto is 1 Q. Igitur $\frac{1}{6}$ Q. − $\frac{4}{6}$. maior est quàm 2. & tandem 1 Q. reperitur maior quàm 16. Quamobrem numerus 6 N. + 4. æquandus erit quadrato cuilibet maior quàm 16.

OBSERVATIO D. P. F.

Quae notauimus ad tertiam libri 5. docebunt quomodo inueniendi sint 4. numeri, quorum bini quilibet sumpti dempto dato numero conficiant quadratum.

QVÆSTIO XII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ποιῇ τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ιβ. ἐπεὶ οὖν ζητοῦμεν τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου προσλαβόντα τὸν ιβ ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω τὸν ιβ ἕξω τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου. ἔστω δὴ ὁ τετράγωνος μ̊ κε. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τούτου ἀφέλω τὸν ιβ. λοιπὸν ἕξω τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου μ̊ ιγ. ἔστω οὖν ὁ μὲν πρῶτος μ̊ ιγ. ὁ δὲ δεύτερος μ̊ α. καὶ τετάχθωσαν ἐν ἀριθμοῖς. ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν ποιεῖν μ̊ ιγ. καὶ ἔστω ὁ μὲν πρῶτος ςς ιγ. ὁ δὲ δεύτερος α^x. ἐὰν δὲ καὶ ἀπὸ ἑτέρου τετραγώνου ἄρω μ̊ ιβ. ἕξω τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου. ἔστω ἀπὸ τοῦ ις. λοιπὸς ἄρα ὁ ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου ἔσται μ̊ δ. τετάχθωσαν πάλιν ἐν ἀριθμοῖς ὥστε ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν μ̊ δ. ὧν ὁ δεύτερός ἐστι α^x. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερός ἐστι α^x. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ςς δ. δεήσει ἄρα καὶ τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου μετὰ μ̊ ιβ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου ἐστὶ δυ νβ. δεήσει ἄρα δυ νβ μετὰ μ̊ ιβ ποιεῖν τετράγωνον. καὶ εἰ εἶχον τὸ πλῆθος τῶν ιγ μετὰ τοῦ πρώτου τετράγωνον, εὐχερὴς ἂν ἦν ἡ ἴσωσις. ἀλλ' ἐπεὶ οὐ τοῦτο, ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ᾖ τετράγωνος, καὶ ἔτι ἑκάτερος μετὰ μ̊ ιβ ποιῇ τετράγωνον, ἐὰν γὰρ ἀντὶ ἀριθμῶν εὕρω τετραγώνους, ἔσται ὁ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνος. γέγονεν οὖν εὑρεῖν δύο τετραγώνους ὧν ἑκάτερος μετὰ μονάδων ιβ ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον, καὶ εὐχερὴς ὡς ἔφαμεν ποιεῖν τὴν ἴσωσιν, καὶ ἔστιν ὁ μὲν δ. ὁ δὲ ᾱ δ^x. ἑκάτερος γὰρ τούτων μετὰ μονάδων ιβ ποιεῖ τετράγωνον. τούτων εὑρεθέντων ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὸν μὲν πρῶτον ἀριθμῶν δ. τὸν δὲ δεύτερον α^x. τὸν δὲ τρίτον ςς ᾱ δ^x. καὶ λοιπόν ἐστι τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ τρίτου μετὰ μ̊ ιβ ποιεῖν τετράγωνον ἀλλ' ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου ἐστὶ δυ ᾱ. δυ ἄρα ᾱ μετὰ μ̊

INVENIRE tres numeros vt quem bini mutua multiplicatione producunt, is adscito dato numero faciat quadratum. Datus esto 12. Quoniam igitur postulatur vt productus ex primo in secundum adscito 12. faciat quadratum, si ab aliquo quadrato dempsero 12. habebo productum ex primo in secundum. Esto itaque quadratus 25. Si ergo ab eo detraxero 12. reliquum habebo productum ex primo in secundum, nempe 13. Esto igitur primus 13. secundus autem 1. & statuantur in numeris, ita tamen vt productum multiplicationis eorum sit 13. & sit primus 13 N. at secundus $\frac{1}{N}$. Itaque si ab altero quadrato detraxero 12. habebo productum ex secundo in tertium. Esto a quadrato 16. relinquitur ergo productus ex secundo in tertium 4. statuantur rursus in numeris, ita vt productum multiplicationis eorum sit 4. Cùm ergo secundus sit $\frac{1}{N}$. erit vtique tertius 4 N. Oportet igitur & productum ex primo in tertium addito 12 fieri quadratum. Sed productus ex primo in tertium est 52 Q. Proinde 52 Q. + 12. æquantur quadrato. Et si 13. numerus pro primo positus quadratus fuisset, facilis esset æquatio. Quod cùm non sit, eo res deducta est vt duo numeri sint inueniendi, vt productum multiplicationis eorum sit quadratus, & præterea vterque cum 12. faciat quadratum. Sed & si loco numerorum quadratos inueniam, ij sua multiplicatione quadratum producent. Oportet ergo inuenire duos quadratos quorum vterque adscito 12. faciat quadratum. Hoc autem facile est, & æquationem expediet, & est alter 4. alter $\frac{1}{4}$ vterque enim addito 12. facit quadratum. His repertis redeo ad id quod initio actum erat, & pono primum 4 N. secundum $\frac{1}{N}$. tertium $\frac{1}{4}$ N. Restat vt productus ex primo in tertium

adiuncto 12. faciat quadratum. Sed productus ex primo in tertium est 1 Q. Proinde 1 Q. + 12. æquatur quadrato Formo quadratum à latere 1 N. + 3 nempe 1 Q. + 6 N + 9. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. & constat propositum.

ιβ. ἴσον ἐστὶ τετραγώνῳ. πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ϛ ᾱ μ° γ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται δ ᾱ ϛϛ ϛ̄ μ° θ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ̄ ∟. καὶ μένει τὸ ἐπίταγμα.

IN QVAESTIONEM XII.

HÆC quæstio cum sequente est de earum numero quas pro deploratis reliquit Xilander, in quam cùm multa infeliciter commentus sit, textum tamen Diophanti leuiter admodum deprauatum restituere non potuit. Sanè tota deprauatio in eo est, quod fractionem Numericam $\frac{1}{1 N}$. imperitus librarius ambiguè semper expressit, nam primo loco sic eam exhibet ϛο ϛϰ. deinde passim ϛ̄. cùm tamen aliarum fractionum more potiùs fuisset sic exprimenda αϛ. Hinc erroris ansam accipiens Xilander, vertit vbique 1 N. loco $\frac{1}{1 N}$. vnde in difficultates inextricabiles seipsum coniecit.

Porrò dupliciter variari possunt positiones & solutio, nam loco ipsorum 4. & $\frac{1}{4}$. infiniti alij quadrati inueniri per vndecimam secundi, qui adscito 12. quadratum faciant. Deinde numeri quadrato æquandi 1 Q. + 12. latus diuersimodè fingi potest, videlicet ab 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus sit maior quàm 12. Diophantus æquauit quadrato à latere 1 N. + 3. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$. suntque quæsiti numeri 2. 2 $\frac{1}{8}$.

Placet etiam in artis specimen aliam tradere analysim, Diophantæa vtique non deteriorem, quàm excogitaueram priusquam mihi contigisset Græcum videre Codicem. Sit datus numerus 20. quæratur quadratus qui adsumpto 20. faciat quadratum, is erit 16. Iam ergo statuantur. Primus & secundus duo quilibet Numeri, quorum mutuo ductu fiat 16. Et sit primus 8. secundus 2. nam euidens est sic vni parti propositi satisfieri. Tum verò statuatur pro tertio certus quadratorum numerus, qui ductus in secundum 2. faciat quadratum, puta 2 Q. vel 8 Q. vel 18 Q. &c. & adiiciatur ei defectus tot vnitatum, vt hæ multiplicatæ per eundem secundum numerum 2. faciant datum numerum 20. Hunc vnitatum numerum reperies diuidendo 20. per 2 vnde fit 10. Quamobrem ponetur tertius 2 Q. − 10. sic enim eo ductu in secundum 2 fit 4 Q. − 20. cui addendo datum numerum 20. fit quadratus 4 Q. Superest vt productus primi in tertium adsumpto 20. faciat quadratum, facit autem 16 Q. − 60. Hoc ergo æquatur quadrato. Esto eius latus 4 N. − 2. fiet 1 N. 4. sunt ergo quæsiti numeri 8. 2. 22. & satisfaciunt proposito.

Hac ratione operando poni possunt primus & secundus duo quilibet numeri, quorum mutuo ductu fiat quadratus qui adsumpto dato numero quadratum faciat. Vnde iam duplex oritur variatio, tum quia huiusmodi diuersi quadrati infiniti reperientur per vndecimam secundi tum quia eodem sumpto quadrato sumentur alij atque alij duo numeri, quorum mutuo ductu is fiat. Præterea in hypostasi tertij poni potest quilibet quadratorum numerus, qui ad vnitates secundi rationem habeat quadrati ad quadratum, vt in nostra hypothesi, poni poterat tertius non solùm 2. Q. − 10. sed etiam 8 Q. − 10. 32 Q. − 10. &c. Denique vltimi quadrati latus puta ipsius 16 Q. − 60. diuersimodè fingi potest, nimirum à 4 N. − quotlibet vnitatibus. Vnde sanè infinita solutionum diuersarum suppetit sylua.

Canones ex his operationibus elici possent, sed non adeò expediti. Quare præstat duos alios elegantissimos afferre, qui ex quibusdam propositionibus libri secundi porismatum manifestè deducuntur. Primus itaque Canon esto.

Datum numerum aufer à duobus quadratis, vtrumque residuum diuide per interuallum laterum eorundem quadratorum, duo quotientes vnà cum prædicto laterum interuallo quæsitos exhibebunt numeros.

Verbi gratia datus numerus esto 12. aufer eum à quadratis 36. & 64. remanent 24. & 52. quæ si diuidas per 2. interuallum laterum, fient quotientes 12 & 26. sunt ergo quæsiti numeri 12. 26. 2. Huius Canonis demonstratio facilis est. Nam ex ipsa constructione manifestum est, ducto 2. in ipsos 12. & 26. & productis 24. & 52. addito eodem 12. fieri quadratos 36. & 64. Rursus productum ex 12. in 26. adsumpto 12. facere quadratum, demonstratum est vndecima secundi porismatum. Quamobrem ex omni parte patet propositum. Secundus autem Canon est.

Datum numerum aufer à duobus quadratis, vtrumque residuum sigillatim diuide per interuallum laterum; duo quotientes, vnà cum duplo summæ ipsorum, multato supradicto interuallo, quæsitos exhibent numeros.

Itaque duo primi numeri per hunc canonem reperti, sunt iidem cum duobus primis per superiorem Canonem inuentis, sed tertius diuersus est. Ita dato eodem 12. & sumptis iisdem quadratis 36. & 64. fient vt prius primus & secundus 12. & 26. sed erit tertius duplum summæ illorum multatum binario, nimirum 74. Huius Canonis demonstratio integra continetur propositione decima tertia

secundi porismatum. Cæterùm vtriusque Canonis simul auxilio licebit propositionem extendere ad quatuor numeros, & pulcherrimum problema à nemine hactenus tentatum enodare, nimirum.

Inuenire quatuor numeros, vt qui producitur ex binorum mutuo ductu adscito dato numero fiat quadratus. Datus esto 3.

Finge duos quadratos ab 1 N. + tot vnitatibus quarum, quadrati superent 3. ita vt interuallum earundem vnitatum sit quadratus numerus. Verbi gratia finge latera quadratorum 1 N. + 2 & 1 N. + 6. quorum interuallum est quadratus 4. erunt quadrati 1 Q. + 4 N. + 4. & 1 Q. + 12 N. + 36. à quibus aufer sigillatim datum numerum 3 & residua diuide sigillatim per interuallum laterum 4. Et statue primum quæsitorum $\frac{1}{4}$ Q. + 1 N. + $\frac{1}{4}$. Secundum $\frac{1}{4}$ Q. + 3 N. + 8 $\frac{1}{4}$. Tertium duplum summæ vtriusque multatum interuallo 4. nimirum 1 Q. + 8 N. + 13. sic enim productus ex binorum multiplicatione adscito 3. quadratus fit per secundum Canonem. Ponatur denique quartus ipsum interuallum laterum 4. sic enim primus secundus, & quartus si bini inter se ducantur, & producto addatur 3. fit quadratus per primum Canonem. Superest igitur vt producto ex tertio in quartum addendo 3. fiat quadratus. Fit autem 4. Q. + 32. N. + 55. Hoc ergo æquatur quadrato. Fingo eius latus abs 2 N. − tot vnitatibus quarum quadratus superet 55. sitque illud 2 N. − 10. fit 1 N. $\frac{5}{8}$. Ad hypostases. Erunt quæsiti numeri $\frac{249}{256}$. $\frac{2617}{256}$. $\frac{1177}{64}$ & 4. qui satisfaciunt proposito. Nam ex primo in tres reliquos qui producuntur, sigillatim adsumpto 3. faciunt quadratos $\frac{848241}{65536}$. $\frac{342225}{16384}$. $\frac{441}{64}$. quorum latera $\frac{921}{256}$. $\frac{585}{128}$. $\frac{21}{8}$. At ex secundo in tertium & quartum producti, adscito 3. faciunt quadratos $\frac{3129361}{16384}$ & $\frac{2809}{64}$ quorum latera $\frac{1769}{128}$ & $\frac{53}{8}$. Denique ex tertio in quartum qui producitur. adscito 3. quadratum facit $\frac{1225}{16}$ cuius latus $\frac{35}{4}$.

Aliter. Ex quadratis qui exponuntur initio ponatur alter quilibet quadratus numerus maior dato numero 3. puta 4. & fingatur alter ab 1 N. + latere prioris quadrati, nimirum ab 1 N. + 2. fiet quadratus 1 Q. + 4 N + 4. Tum ab vtroque quadrato auferatur 3. & residua diuidantur per interuallum laterum quod est 1 N. & statuatur primus quæsitorum $\frac{1}{1N}$. secundus 1 N. + 4 + $\frac{1}{1N}$. Tertius horum summæ duplum multatum interuallo laterum 1 N. nimirum 1 N. + 8 + $\frac{4}{1N}$. Quartus autem ipsum interuallum laterum, nimirum 1 N. Constat itaque ex vtroque Canone omnibus postulati partibus satisfieri, si productus ex tertio in quartum adscito 3. faciat quadratum. Facit autem 1 Q. + 8 N. + .7 hoc ergo æquatur quadrato. Esto latus eius 1 N. − 23. & fit 1 N. $\frac{29}{3}$ Ad hypostases. Erunt quæsiti numeri $\frac{3}{29}$. $\frac{3594}{261}$. $\frac{4719}{261}$. $\frac{29}{3}$. qui satisfaciunt postulatis. Etenim ex primo in reliquos tres qui producuntur, adsumpto 3. quadrato faciunt $\frac{3721}{841}$. $\frac{4096}{841}$. 4. quorum latera $\frac{61}{29}$. $\frac{64}{29}$. 2. At ex secundo in tertium & quartum producti, adscito 3. faciunt quadratos $\frac{1907161}{7569}$. & $\frac{1225}{9}$. quorum latera $\frac{1381}{87}$. & $\frac{35}{3}$. Denique productus ex tertio in quartum, adsumpto 3. quadratum facit $\frac{1600}{9}$. cuius latus $\frac{40}{3}$.

Vtraque operatio elegans est, & multam recipit varietatem, vt curioso lectori considerandum relinquo. Videtur ipse Diophantus in hoc problemate hæsisse, vt apparet ex vigesima prima quarti. Qua quærit quatuor Numeros, vt productus ex binorum mutuo ductu adscita vnitate quadratum faciat. Nam eius operatio cuilibet numero applicari nequit, sed solis quadratis, vt ibi docebimus.

QVÆSTIO XIII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ↑ τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ι. ἐπεὶ ζητοῦμεν τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου λείψει μ° ι. ποιεῖν τετράγωνον ἐὰν ἄρα τινὶ τετραγώνῳ προσθῶ μ° ι. ἕξω τὸν ὑπ' αὐτῶν. ἔστω τῷ δ. ἔσται ἄρα ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου μ° ιδ. ἔστω πρῶτος μ° ιδ. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται μ° α. καὶ τετάχθωσαν πάλιν ἐν ἀριθμοῖς, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν ποιεῖν μ° ιδ. καὶ ἔστω ὁ μὲν πρῶτος ςς ιδ. ὁ δὲ δεύτερος αˣ. πάλιν ἐὰν ἑτέρῳ τετραγώνῳ προσθῶ μ° ι. ἕξω τὸν ὑπὸ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου. ἔστω τῷ θ. ἔσται ἄρα ὁ ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου μ° ιθ. ὧν ὁ δεύτερός ἐστι ὁ αˣ. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ςς ιθ. δύνοσ

INVENIRE tres numeros vt quem bini mutua multiplicatione producunt, multatus dato numero faciat quadratum. Sit datus 10. Quando volumus productum ex primo in secundum dempto 10. facere quadratum, si alicui quadrato adiecero 10. habebo illum productum. Esto quadrato 4. erit ergo productus ex primo in secundum 14. sit primus 14. secundus igitur erit 1. Statuantur rursus in numeris, ita tamen vt productus multiplicationis faciat 14. & esto primus 14. N. secundus $\frac{1}{1N}$. Rursus si alteri quadrato adiecero 10. habebo productum ex secundo in tertium. Adiiciatur quadrato 9. erit ergo productus ex secundo in ter-

rium 19. proinde cùm secundus sit $\frac{1}{1N}$. relinquitur tertius 19 N. Oportet igitur & productum ex primo in tertium dempto 10. facere quadratum. Facit autem 266. Q. − 10. hæc ergo æquantur quadrato. Quare ob ea quæ in præcedenti dicta sunt, eò deuentum est vt inueniendi sint duo quadrati, quorum vterque dempto 10. faciat quadratum. Hoc autem facilè fit, inuenies enim si quæras quis quadratus dempto 10. faciat quadratum, & quoniam si cui numero additur 1. & summæ dimidium in se ducitur, & à sic facto quadrato numerus initio sumptus detrahitur, relinquitur rursum quadratus. Addo 1. ad 10. & summæ semissem nimirum 5 $\frac{1}{2}$. duco in se, & à producto 30 $\frac{1}{4}$ aufero 10. & habeo quadratum 20. $\frac{1}{4}$ à latere 4 $\frac{1}{2}$. Pono igitur primum 30 $\frac{1}{4}$. tertium autem 1 Q. Oportet ergo vt & ab 1 Q. dempto 10. remaneat quadratus. Quare 1 Q. − 10. æquatur quadrato. Formo quadratum à latere 1 N. − 2. nimirum 1 Q. + 4. − 4 N. & fit 1 N. 3 $\frac{1}{2}$. Tertius igitur qui positus erat 1 Q. erit 12 $\frac{1}{4}$. est autem & primus 30 $\frac{1}{4}$ nam vterque dempto 10. remanet quadratus. Venio ad id quod initio quærebatur. Et statuo primum 30. $\frac{1}{4}$ N. secundum $\frac{1}{1N}$. tertium 12 $\frac{1}{4}$ N. Superest itaque vt productus ex primo in tertium dempto 10. faciat quadratum. Atqui productus ille est 370 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{16}$ Q. Hic ergo dempto 10. æquatur quadrato, & vt quadrati integri sint, multiplicemus eos per 16. ergo 5929. Q. − 160. æquantur quadrato à latere 77 N. − 2. qui est 5929 Q. + 4 − 308 N. & fit 1 N. $\frac{41}{77}$. Statueram primum 30 $\frac{1}{4}$ N. erit igitur $\frac{1240}{77}$ $\frac{1}{4}$. secundum $\frac{1}{1N}$. erit igitur $\frac{77}{41}$. tertium 12. $\frac{1}{4}$ N. is erit $\frac{502}{77}$ $\frac{1}{4}$. & constat propositum.

ἄρα καὶ τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου ⋔ μο ι. ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ δυ σξϛ ⋔ μο ι. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ, καὶ διὰ τὰ ἐν τῷ πρὸ τούτου εἰρημένα, ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο τετραγώνους ὧν ἑκάτερος λεῖψει μο ι. ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον. εὑρήσεις γὰρ ἐὰν ζητήσῃς ἄν τις τετράγωνος λεῖψει μο ι. ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ἐάν τινι ἀριθμῷ προστεθῇ μονάς, καὶ τοῦ γινομένου τὸ ἥμισυ τετραγωνίσωμεν, καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου τετραγώνου ἀφέλωμεν τὸν ἐξ ἀρχῆς, ὁ λοιπὸς πάλιν τετράγωνος ἔσται. προστίθημι ταῖς μο ι μο ᾱ. καὶ τοῦ γινομένου τὸ ἥμισυ τουτέστι τὰ ε καὶ ἥμισυ. τετραγωνίσας ἀπὸ τοῦ γινομένων μο λ. ᾱ δˣ. ἀφελὼν τὰς μο ι ἕξω τετράγωνον μο κ. ᾱ δˣ. ἀπὸ πλευρᾶς δ καὶ ἥμισυ. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον λ. ᾱ δˣ. τὸν δὲ τρίτον δυ ᾱ. δεήσει ἄρα καὶ ἀπὸ δυ ᾱ ἀφαιρεθεισῶν μο ι. τὸ λοιπὸν γίνεσθαι τετράγωνον. δυ ἄρα ᾱ λεῖψει μο ι ἴση ἐστὶ τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ϛ ᾱ λεῖψει μο β̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται δυ ᾱ μο δ̄ λεῖψει ϛ δ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο γ̄ καὶ ἥμισυ. ἐπεὶ ἔταξα τὸν τρίτον δυ ᾱ. ἔσται ιβ. ᾱ δˣ. ἔστι δὲ καὶ ὁ πρῶτος λ. ᾱ δˣ. οἵτινες λεῖψει μο ι. ποιοῦσι τετραγώνους. ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς ζητούμενον, καὶ τάσσω τὸν πρῶτον ϛ λ. ᾱ δˣ. τὸν δὲ δεύτερον αˣ. τὸν δὲ τρίτον ϛ ιβ. ᾱ δˣ. λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου λεῖψει μο ι, γίνεσθαι τετράγωνον, ὁ δὲ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου ἐστὶ δυ το. ᾱ ϛˣ. ᾱ ιϛˣ. αὗται ἄρα λεῖψει μο ι ἴσος ἐστὶ τετραγώνῳ, καὶ ἵνα ὅλαι δυνάμεις ὦσι ποιῶ αὐτὰς ἑκκαιδεκάκις, δυ ἄρα ͵επκθ ⋔ μο ρξ. ἴσαι τετραγώνῳ ἀπὸ πλευρᾶς ϛ οζ λεῖψει μο β̄. τουτέστι δυνάμεις ͵επκθ μο δ λεῖψει ϛ τη. καὶ γίνεται ὁ ϛ μο μα οζ. ἔταξα τὸν πρῶτον ϛ λ. ᾱ δˣ. ἔσται ͵ασμ οζ. ᾱ δˣ. τὸν δὲ δεύτερον αˣ ἔσται οζ μα. τὸν δὲ τρίτον ϛ ιβ. ᾱ δˣ. ἔσται φβ οζ. ᾱ δˣ. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XIII.

EADEM ferè dici possunt de hac quæstione quæ de præcedente dicta sunt. Operatio & solutio totidem modis potest variari. Nam infiniti quadrati reperientur per vndecimam secundi, qui multati numero 10. quadratum relinquant. Et vltimi quadrati 5929. Q. − 160. latus diuersimodè fingi potest, nimirum à 77 N. − quotlibet vnitatibus. Cæterùm Diophantus compendium quærens ad vndecimam secundi, hoc vtitur lemmate.

Si dato numero addatur vnitas, & à summæ semissis quadrato auferatur datus numerus, relinquitur quadratus.

A. . . . , D. . . . B. C

Sit datus numerus A B. cui addatur vnitas B C. & totius A C semissis esto A D. dico quadratum ipsius A D multatum numero A B. relinquere quadratum. Etenim quadratus A D æqualis est producto ex A B in B C vnà cum quadrato ipsius D B. (5. secundi.) Sed productus ex A B in B C æquatur ipsi A B, quia B C est vnitas. Igitur A B & quadratus ex D B simul æquantur quadrato ex A D. Quare si à quadrato ex A D auferatur A B. relinquetur quadratus ex D B. Quod erat ostendendum.

Licet etiam per nostram analysim soluere quæstionem hac arte. Datus esto 20. Quæratur quadratus à quo auferendo 20. supersit quadratus, puta 36. & statuantur pro primo & secundo quæsitorum numerorum, duo quilibet quorum mutuo ductu fiat 36. sit ergo primus 9. secundus 4. Tum ponatur tertius quilibet quadratorum numerus, qui ductus in secundum 4. quadratum faciat, puta 1 Q. eique adiiciantur tot vnitates vt ductæ in eundem secundum 4. faciant datum numerum 20. Et esto totus tertius 1 Q. + 5. sic enim duabus propositi partibus satisfit. Restat vt productus ex primo in tertium detracto 20. faciat quadratum, facit autem 9 Q. + 25. hoc ergo æquatur quadrato, esto latus illius 3 N. + 1. fiet 1 N. 4. sunt ergo quæsiti numeri 9. 4. 21. & constat. Sed & geminum Canonem eliciemus ex libro secundo porismatum. Quorum primus est.

Datum numerum adde duobus quadratis, vtramque summam diuide sigillatim per interuallum laterum, duo quotientes vnà cum eodem interuallo, quæsitos exhibent numeros.

Vt si datus sit 10. adde 10. quadratis 16. & 36. fiunt summæ 26. & 46. quas si diuidas per 2. interuallum laterum, fiunt 13. & 23. duo ex quæsitis numeris, quorum tertius est ipsum interuallum laterum 2. Canonis huius demonstratio in promptu est. Nam constat per constructionem ducto 2. in ipsos 13. & 23. fieri 26. & 46. à quibus auferendo datum numerum 10. remanent quadrati 16. & 36. At productum ex 13. in 23. detracto 10. esse quadratum, ostensum est duodecima secundi porismatum. Secundus Canon erit.

Datum numerum adde duobus quadratis, vtramque summam diuide per interuallum laterum: duo quotientes vnà cum duplo summæ illorum multato eodem interuallo quæsitos exhibent numeros.

Itaque sumptis eisdem quadratis, duo primi numeri coincident cum duobus primis per præcedentem Canonem inuentis. Tertius autem diuersus erit. Nam sumptis vt prius quadratis 16. & 36. fient duo primi vt suprà 13. & 23. At tertius erit 70. Huius autem Canonis demonstratio habetur decima quarta secundi porismatum. Porrò vtriusque Canonis ope soluetur huiusmodi quæstio.

Inuenire quatuor numeros, vt productus ex binorum mutua multiplicatione detracto quouis dato numero, quadratus maneat.

Datus esto 10.

Finge duos quadratos, alterum ab 1 N. + aliquo quadrato numero, puta ab 1 N. + 4. erunt quadrati 1 Q. & 1 Q. + 8 N. + 16. His adde sigillatim datum numerum 10. & summas diuide per interuallum laterum 4. Erit ergo primus quæsitorum $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{5}{2}$. Secundus $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{13}{2}$ + 2 N. Tertius horum summæ duplum multatum eodem interuallo 4. nimirum 1 Q. + 14 + 4 N. Quartus denique erit idem interuallum, videlicet 4. Sic enim ex vtroque Canone constat quinque propositi partibus abundè satisfieri. Restat vt productus ex tertio in quartum detracto 10. relinquatur quadratus. Relinquitur autem 4 Q. + 46 + 16 N. Hoc ergo æquatur quadrato. Esto eius latus 2 N. + 6. fiet 1 N. $\frac{5}{4}$. Ad positiones. Erunt quæsiti numeri $\frac{185}{64}$. $\frac{601}{64}$. $\frac{329}{16}$. 4. qui satisfaciunt postulatis. Nam ex primo in reliquos tres qui producuntur, detracto 10. faciunt quadratos $\frac{70225}{4096}$. $\frac{50625}{1024}$. $\frac{25}{16}$. quorum latera $\frac{265}{64}$. $\frac{225}{32}$. $\frac{5}{4}$. At producti ex secundo in tertium & quartum, detracto 10. faciunt quadratos $\frac{187489}{1024}$ & $\frac{441}{16}$ quorum latera $\frac{433}{32}$ & $\frac{21}{4}$. Denique productus ex tertio in quartum, detracto 10. quadratum facit $\frac{289}{4}$ cuius latus $\frac{17}{2}$.

Aliter. Ex quadratis qui exponuntur initio ponatur alter, quilibet quadratus, puta 1. Alter verò fingatur ab 1 N. + latere prioris, nimirum ab 1 N. + 1. erit is 1 Q. + 2 N. + 1. Tum vtrique quadrato addatur datus numerus 10. & summæ diuidantur sigillatim per interuallum laterum 1 N. Et statuatur primus quæsitorum $\frac{11}{1N}$. Secundus 1 N. + 2 + $\frac{11}{1N}$. Tertius horum summæ duplum multatum interuallo laterum. videlicet 1 N. + 4 + $\frac{44}{1N}$. Quartus denique ipsum interuallum laterum, puta 1 N. Itaque patet ex vtroque Canone quinque postulati partibus esse satisfactum. Restat ergo vt productus ex tertio in quartum detracto 10. maneat quadratus. Manet autem 1 Q. + 4 N. + 34. Hoc ergo æquatur quadrato. Sit eius latus 1 N. − 8. fit 1 N. $\frac{3}{2}$. Ad positiones. Sunt quæsiti numeri. $\frac{22}{3}$. $\frac{65}{6}$. $\frac{209}{6}$. $\frac{3}{2}$. qui soluunt quæstionem. Etenim ex in primo in tres reliquos qui producuntur, detracto 10. faciunt quadratos $\frac{625}{9}$. $\frac{2209}{9}$. 1. quorum latera $\frac{25}{3}$. $\frac{47}{3}$. 1. At producti ex secundo in tertium & quartum, detracto 10. manent quadrati $\frac{13225}{36}$ & $\frac{25}{4}$. quorum latera $\frac{115}{6}$. & $\frac{5}{2}$. Denique ex tertio in quartum qui producitur, detracto 10. relinquit quadratum $\frac{169}{4}$ cuius latus $\frac{13}{2}$.

Quomodo autem reperiendi sint tres numeri, vt productus ex binorum multiplicatione detractus à dato numero, relinquat quadratum, nondum in vniuersum assequi licuit, sed soluo quæstionem huiusmodi, cum datus numerus vel quadratus est, vel ex duobus quadratis compositus.

Sit

Sit enim datus 20. sumatur vnus quadratorum, ex quibus 20. componitur, puta 16. & statuantur primus & secundus quæsitorum, duo quilibet numeri quorum mutuo ductu fiat 16. puta 8. & 2. tertius verò ponatur talis vnitatum numerus, qui ductus in secundum 2. faciat datum numerum 20. est is numerus 10. cui addatur defectus tot Quadratorum, vt secundo 2. in eos ducto fiat quadratus. Statuatur ergo tertius 10 − 2 Q. sic enim duabus propositi partibus satisfit. Restat vt productus ex primo in tertium detractus à 20. relinquat quadratum. Sed relinquit 16 Q. − 60. Hoc ergo æquatur quadrato cuius latus fingetur à 4 N. − tot vnitatibus, vt per valorem Numeri resoluendo hypostases fiat 1 Q. minor quàm 5. quia scilicet tertius positus est 10. − 2 Q. Itaque cùm quadratus debeat esse minor quàm 5. oportet valorem numeri minorem esse quàm $2\frac{1}{4}$. fiet autem valor Numeri à quodam quadrato adsumente 60. & diuiso per octuplum sui lateris. Quærendus ergo est quadratus qui adsumens 60. & diuisus per octuplum sui lateris, det quotientem minorem quàm $2\frac{1}{4}$. sit is 1 Q. Igitur $\frac{1\,Q. + 60}{8\,N.}$. minor est quàm $2\frac{1}{4}$ & omnia ducendo in 8 N. fit 1 Q. + 60 minor quàm 18 N. Quare æquemus 18 N. numero paulò maiori quàm 1 Q. + 60. puta numero 1 Q. + 65. fiet 1 N. 5. vel 13. Proinde oportet latus quadrati fingere 4 N. − tot vnitatibus, quæ non deficiant à 5. nec excedant 13. fingatur 4 N. − 5. fiet 1 N. $\frac{17}{8}$. sunt igitur tres quæsiti 8. 2. $\frac{31}{32}$. & constat.

QVÆSTIO XIV.

INVENIRE tres numeros vt productus ex binorum multiplicatione adiecto reliquo quadratum faciat. Quando quærimus productum ex primo in secundum addito tertio facere quadratum, si exposito aliquo quadrato, partem illius aliquam statuamus pro tertio, residuum autem pro producto multiplicationis primi & secundi vnum postulatorum præstabimus. Formetur quadratus ab 1. N. + 3. erit vtique 1 Q. + 6 N. + 9. esto itaque tertius 9. relinquitur ergo productus ex primo in secundum 1 Q. + 6 N. Ponatur primus 1 N. erit igitur secundus 1 N. + 6. Oportet ergo & productum ex secundo in tertium adsumpto primo, hoc est 10 N. + 54. æquari quadrato, & præterea productum ex tertio in primum adsumpto secundo, nempe 10 N. + 6. æquari quadrato, & fit duplicata æqualitas. Est autem ipsorum interuallum 48. Quamobrem oportet inuenire duos quadratos quorum interuallum sit 48. Quod facile est, & infinitis modis fieri potest; estque minor 16. maior 64. vtrorum æquationem accommodemus, reperiemus quantus sit 1 N. si enim dicamus 64. æquari maiori, puta 10 N. + 54. inuenitur 1 N. 1. Rursus si dicamus minorem 16. æquari 10 N. + 6. fit etiam 1 N. 1. Ad positiones. Erit primus 1. secundus 7. tertius 9. & soluunt quæstionem.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ ζητοῦμεν τὸν ἀπὸ πρώτου καὶ δευτέρου προσλαβόντα τὸν λοιπὸν ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἐκθώμεθά τινα τετράγωνον, μέρος μέν τι αὐτοῦ τάξωμεν τὸν τρίτον, τὸν δὲ λοιπὸν τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου, λύσομεν ἓν τῶν ἐπιταγμάτων. πεπλάσθω ὁ τετράγωνος ἀπὸ ς α̅ μο γ̅. αὐτὸς ἄρα ἔσται Δυ α̅ ςς ς̅ μο θ̅. ἔστω δὲ ὁ τρίτος μο θ̅, λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου Δυ α̅ ςς ς̅. τετάχθω ὁ πρῶτος ς α̅. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται, ς α̅ μο ς̅. δεήσει ἄρα τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου προσλαβόντα τὸν πρῶτον τουτέστι, ςς ι̅ μο νδ̅ ἴσον εἶναι τετραγώνῳ, καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβόντα τὸν δεύτερον τουτέστι ςς ι̅ μο ς̅ ἴσον πάλιν γίνεσθαι τετραγώνῳ, καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης. καὶ ἔστιν αὐτῶν ὑπεροχὴ μο μη̅. δεήσει ἄρα εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἐν ὑπεροχῇ μο μη̅. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον καὶ ἀπειραχῶς γίνεται. καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἐλάσσων μο ις̅. ὁ δὲ μείζων μο ξδ̅. καὶ πρὸς ὁποῖον ἂν αὐτῶν ποιήσωμαι τὴν ἰσότητα, εὑρήσω τὴν ὑπόστασιν τοῦ ς. ἐάν τε γὰρ φήσωμεν τὰς τοῦ μείζονος μο ξδ̅ ἴσας εἶναι ςς ι̅ μο νδ̅. συνάγεται ὁ ς μο α̅. ἐάν τε πάλιν φήσωμεν τὰς τοῦ ἐλάσσονος μο ις̅ ἴσας εἶναι ςς ι̅ μο ς̅ συνάγεται ὁ ς μο α̅. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο α̅. ὁ δὲ δεύτερος μο ζ̅. ἔστι δὲ καὶ ὁ τρίτος μο θ̅. καὶ ποιοῦσι τὸ ἐπίταγμα.

IN QVÆSTIONE XIV.

BENE' monet Xilander hîc duplicem contingere posse variationem. Primò enim Quadratus qui ponitur fieri ex producto primi in secundum, adscito tertio fingi potest à certis numeris + quotlibet vnitatibus, finxit Diophantus ab 1 N. + 3. sed fingere potuisset ab 1 N. + 2. vel 1 N. + 4. vel etiam 2 N. + 3. 2 N. + 4. &c. Deinde duplicata æqualitas infinitis modò resolui poterat, sumendo scilicet duos quoslibet quadratos, quorum interuallum sit 48. adhibita tamen cautione quam tradimus ad duodecimam secundi, vt videlicet maiores sint sumpti quadrati numeris 54. & 6. Verùm quod præcipuum est, non attigit Xilander, quomodo nimirum positiones primi & secundi ita instituat Diophantus, vt tandem in vtroque numero quadrato æquando reperiatur idem Numerorum numerus, puta 10 N. Hoc enim si non curasset, inexplicabilis fuisset æquatio. Cùm enim vnitates 54. & 6. nec æquales sint, nec quadrati numeri, oportuit numerum Numerorum vtrobique eundem reperiri. Itaque cùm productus ex primo in secundum positus sit 1 Q. + 6 N. ex infinitis numeris quorum mutuo ductu gigni poterat 1 Q. + 6 N. tales deligendi fuerunt, vt in eorum vtroque idem esset numerorum Numerus, quales sumpsit Diophantus 1 N. & 1 N. + 6. nec alij proposito satisfacientes sumi potuissent, quia vt dictum est, oportet ducendo eundem tertium 9. in vtrumlibet ipsorum, & producto addendo reliquum, fieri vtrobique eundem Numerorum numerum, quod fieri non posset, si Numerorum numeri primi & secundi non essent æquales.

QVÆSTIO XV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας τὸν λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ πρῶτος ς^ου α. ὁ δὲ δεύτερος ς^ου α μ° δ. ὁ ἄρα ὑπ' αὐτῶν ἔσται δ^υ α. ς̅ς̅ δ. δεήσει ἄρα τοῦτον λείψαντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν οὖν τὸν τρίτον τάξω ς̅ς̅ δ. λύσομεν ἓν τῶν ἐπιταγμάτων. λοιπὸν δὴ καὶ τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου λείψ. τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον, καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου λείψ. τὸν δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ μὲν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου λείψας τὸν πρῶτον ἐστὶ δ^υ δ ς̅ς̅ ιε ἴσος τετραγώνῳ. ὁ δὲ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου λείψας τὸν δεύτερον ἐστὶ δ^υ δ ς̅ς̅ ιε ἴσος τετραγώνῳ. ὁ δὲ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου λείψας τὸν δεύτερον ἐστὶ δ^υ δ λείψει ς^ου ἑνὸς μ° δ ἴσος τετραγώνῳ. καὶ γίνεται πάλιν διπλῆ ἡ ἴσωσις. τῆς γὰρ ὑπεροχῆς αὐτῶν τυγχανούσης ς̅ς̅ ις μ° δ, ζητῶ δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ποιῇ ς̅ς̅ ις μ° δ. εἰσὶ δὲ μ° δ. καὶ ς̅ς̅ δ μ° α. πάλιν οὖν ἢ τῆς συνθέσεως τούτων τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον ἐστὶ τῷ μείζονι. ἢ τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ ἐλάσσονι. καὶ συνάγεται ὁ ἀριθμὸς κε κ^ων. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κε κ^ων. ὁ δὲ δεύτερος ρε κ^ων. ὁ δὲ τρίτος ρ κ^ων. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE tres numeros, vt productus ex binorum multiplicatione dempto reliquo faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. secundus 1 N. + 4. Productus ipsorum multiplicatione erit 1 Q. + 4 N. Oportet igitur hunc dempto tertio facere quadratum, si ergo ponamus tertium 4 N. satisfactum erit vni postulatorum. Superest itaque vt & productus ex secundo in tertium dempto primo faciat quadratum, & præterea productus ex tertio in primum dempto secundo faciat quadratum. Sed productus ex secundo in tertium dempto primo est 4 Q. + 15 N. æqualis quadrato. At productus ex tertio in primum dempto secundo est 4 Q − 1 N. − 4. æqualis quadrato. Et occurrit rursus duplicata æqualitas. Cùm itaque interuallum ipsorum sit 16 N. + 4. Quæro duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 16 N. + 4. sunt autem 4. & 4 N. + 1. Rursus ergo vel summæ semissis quadratus æquatur maiori, vel interualli semissis quadratus æquatur minori; & fit 1 N. $\frac{25}{20}$. Erit igitur primus $\frac{25}{20}$. secundus $\frac{105}{20}$. tertius $\frac{100}{20}$. & constat propositũ.

IN QVAESTIONEM XV.

NON temerè, vt malè arbitratur Xilander, secundum numerum posuit Diophantus 1 N. + 4. Nam necesse est vnitates secundi numeri, quadratum esse numerum, puta 4. vel 9. vel 16. &c. Cuius rei ratio ex ipsamet operatione subtilius considerata, statim innotescit. Tertius enim numerus semper æqualem Numerorum multitudinem continet, vnitatibus in secundo 1 N. + 4.

vel 1 N. + 9. &c. erit tertius 4 N. vel 9 N. &c. Quamobrem rursus ex ductu tertij tam in primum quàm in secundum, in quorum vtroque est 1 N. fient totidem quadrati, vt vides in hypothesi Diophanti, fieri 4 Q. & si secundus positus esset 1 N. + 9. fierent 9 Q. Si autem in numeris quadrato æquandis 4 Q. + 15 N. & 4 Q. − 1 N. − 4. numerus quadratorum 4. non esset quadratus, explicari non posset duplicata æqualitas. Nam si, vt fecit Xilander, ponatur secundus 1 N. + 10. atque adeo tertius 1 N. fient tandem quadrato æquandi 10 Q. + 99 N. & 10 Q. − 1 N. − 10. Quæcunque autem fingas quadratorum latera nunquam produces 10. Q. (cùm nullus sit numerus qui in se ductus efficiat 10. vnde necesse erit in æquationem complexam deueniri, & duas species, vni æquales remanere, ac proinde solutionem vt plurimum contingere irrationalem.

Præterea etiam ritè facta positione secundi numeri, statuendo scilicet in eo vnitatum numerum quadratum, aduerte, posse te adhuc in easdem cautes impingere, nisi magna cum cautione seligas duos numeros, quorum mutuo ductu fiat interuallum numerorum quadrato æquandorum. Etenim in Diophantæa hypothesi, vbi interuallum est 16 N. + 4. licet id ex infinitorum numerorum mutuo ductu produci possit, nulli tamen idonei sunt quæstioni soluendæ præter 4 N. + 1. & 4. si enim Verbi gratia, sumas 2 N. + $\frac{1}{2}$ & 8. horum summæ semissis quadratus, puta 1 Q. + 8 $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{289}{16}$ æquabitur 4 Q. + . 15 N. vnde fiet solutio irrationalis. Itaque tales seligendi sunt numeri mutuo ductu producentes propositum interuallum, vt in eorum summa contineatur duplum lateris Quadratorum, qui in numeris quadrato æquandis reperiuntur. Vt in eadem hypothesi, vbi quadratorum numerus est 4 Q. cuius latus 2 N. cuius duplum 4 N. Oportet tales deligi numeros, quorum mutuo ductu fiat 16 N. + 4. vt eorum summa contineantur 4 N. Quia verò patet primùm illorum necessario constare debere ex Numeris & vnitatibus, secundum autem ex solis vnitatibus, sequitur in primo necesse esse constitui 4 N. atque adeo vt ex secundo in primum fiant 16 N. oportet secundum esse 4. Vt autem præter 16 N. fiant etiam 4. (cùm totum interuallum sit 16 N. + 4) necesse est primum esse 4 N. + 1. secundum 4. Quoniam autem eodem artificio sæpè in sequentibus vtendum erit, vt res tyronum memoriæ firmius inhæreat, age alio eam exemplo illustremus. Posito primo numerorum quæsitorum 1 N. sit secundus 1 N. + 9. tertius 9 N. ducto ergo tertio in primum, & inde ablato secundo remanet 9. Q − 1 N. − 9. æquandus quadrato. Rursus ducto tertio in secundum, & inde ablato primo remanet 9 Q. + 80 N. æquandus quoque quadrato. Horum interuallum est 81 N. + 9. Quarè sunt inueniendi duo numeri, quorum mutuo ductu id fiat cum cautione suprà explicata. Itaque cùm quadratorum numerus sit 9. Q. cuius latus 3 N. cuius duplum 6 N. Oportet in primo quæsitorum statui 6. N. Quamobrem vt ex secundo in primum fiam 81 N. necesse est secundum est 13 $\frac{1}{2}$. Rursus autem vt fiat alia pars interualli, puta 9. euidens est primum debere esse 6 N. + $\frac{2}{3}$. secundum 13 $\frac{1}{2}$. Reliquam operationem absolue, si vacat.

Cæterùm moneo totam solutionum diuersitatem, oriri ex illo quadrato qui ponitur in secundo numero. Nam eodem ibidem posito quadrato, licet primus ponatur 2 N. vel 3 N. vel 4 N. &c. eadem tamen semper continget solutio. Quod vno aut altero exemplo fiet manifestum. Ponatur primus 2 N. secundus 2 N. + 4. tertius 8 N. productus ex secundo in tertium abiecto primo fit 16 Q. + 30 N. æquandus quadrato. Et rursus productus ex primo in tertium adiecto secundo fit 16 Q. − 2 N. − 4. æquandus etiam quadrato. Horum interuallum est 32 N. + 4. qui fit ex 8 N. + 1 in 4. hi enim soli apti sunt proposito ob causas suprà traditas. Horum summæ semissis quadratus est 16 Q. + 20 N. + $\frac{25}{4}$ æqualis 16 Q. + 30 N. & fit 1 N. $\frac{5}{8}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{5}{4}$. $\frac{21}{4}$. 5. iidem quos inuenerat Diophantus. Rursus pone primum 3 N. secundum 3. N. + 4. Tertium 12 N. fient tandem æquandi quadrato 36 Q. + 45 N & 36. Q. − 3 N. − 4. quorum interuallum 48. N. + 4. quod fit ex 12 N. + 1 in 4. horum summæ semissis quadratus est 36 Q. + 30 N. + $\frac{25}{4}$ qui æquatur 36 Q. + 45 N. & fit 1 N. $\frac{5}{12}$ suntque quæsiti numeri, vt prius $\frac{5}{4}$. $\frac{21}{4}$. 5.

Denique animaduersione dignum est, qualiscunque numerus Numerorum statuatur pro primo. Dum idem statuatur pro secundo + aliquot vnitatibus quadratis, & tertius ponatur productus ex primo in vnitates secundi, semper contingere in numeris quadrato æquandis, numerum quadratorum esse quadratum, vt in Diophanti exemplo 4 Q. in proximè allatis 16 Q & 36 Q. quod ex necessitate fieri, sic demonstrabitur. Esto A numerus Numerorum primi. Et A + B vnitatibus quadratis esto secundus. Et tertius esto D. productus ex A in B. Itaque vt patet ex operationis processu, ex D in A fiet quadratorum numerus qui reperitur in numeris quadrato æquandis, sit is E. Hunc dico esse quadratum. Nam sumptis tribus numeris A. B. A. [1] idem E fiet siue A ducatur in B. & productus D in A. siue A ducatur in A. & quadratus ipsius A in B. Quare cùm & B sit quadratus, patet E productum ex quadrato in quadratum, & ipsum esse quadratum. Quod erat demonstrandum. Sed de his satis.

A 3 N.
A 3 N. + B 4.
D 12 N. E 36 Q.

[1] 3. 1. porism.

QVÆSTIO XVI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν ἀπὸ λοιποῦ τετράγωνον, ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ς^ος α. ὁ δὲ δεύτερος ςς δ μ° δ. ὁ δὲ τρίτος μονάδος α. ἵνα ᾖ λελυμένα δύο τῶν ἐπιταγμάτων. λοιπὸν δεῖ καὶ τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβόντα τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου ποιεῖ δυ ις ςς λγ μ° ις. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς δ ⋔ μ° ε. τουτέστι δυ ις μ° κε λείψει ςς μ. καὶ γίνεται ὁ ς° ϑ ογ^{ων}. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ϑ. ὁ δὲ δεύτερος τκη. ὁ δὲ τρίτος ογ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE tres numeros, vt productus ex binorum multiplicatione adsumpto reliqui quadrato, faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. secundus 4 N. + 4. tertius autem 1. vt duabus propositi partibus satisfiat. Superest vt productus ex tertio in primum adsumens quadratum secundi faciat quadratum. Sed productus ex tertio in primum adsumens secundi quadratum facit 16 Q. + 33 N. + 16. Hæc igitur æquanda quadrato, nempe à latere 4 N. − 5. qui est 16 Q. + 25 − 40. N. & fit 1 N. $\frac{9}{73}$. Erit igitur primus 9. secundus 328. tertius 73. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM XVI.

FALLITVR hic etiam Xilander existimans positiones pro arbitrio variari posse, nulla adhibita cautione, hoc enim manifestæ falsitatis arguitur ipso exemplo quo suam nititur comprobare sententiam, ait enim licuisse ponere primum 1 N. secundum 1 N. + 2. tertium 1. Quod nequaquam verum est, nam productus quidem ex primo in secundum adscito quadrato tertij, facit quadratum 1 Q. + 2 N. + 1. At productus ex secundo in tertium adscito quadrato primi facit 1 Q. + 1 N + 2. qui quadratus non est, cùm tamen per ipsas positiones duabus propositi partibus satisfieri velit Diophantus. Itaque tali artificio ipsas positiones instituemus. Statuatur pro secundo quilibet numerus Numerorum + quotlibet vnitatibus. Et ponatur primus quadrans Numerorum, tertius quadrans vnitatum secundi. Sic Diophantus posito secundo 4 N. + 4. posuit primum 1 N. secundum 1. Quod si ponas secundum 4 N. + 8. erit primus 1 N. tertius 2. Et si ponas secundum 8 N. + 12. Erit primus 2 N. Tertius 3. & sic de alijs. Hoc autem ne quis absque fundamento dictum putet, sic demonstratur.

E 4 N. F 6.
C 2 N. A 8 N. + B 12. D 3.
G 16 Q. + H 24 N. + K 9.
L 4 Q. + M 24 N. + P 36.

Sit secundus certus Numerorum numerus A + vnitatibus B. & sit C primus, quadrans ipsius A. sitque D. tertius quadrans ipsius B. & quia C A sunt plani similes, sit medius eorum proportionalis E duplus scilicet ad C. sub duplus ad A. Similitérque sit F medius proportionalis inter B D, duplus scilicet ad D, sub duplus ad B. Tum ducatur C in A + B. & fiat G + H certus scilicet quadratorum numerus + certo numero
4. secundi. Numerorum, hisque adiiciatur K quadratus ipsius D. Dico totum G H K esse quadratum. [1] Quod vt probetur, oportet ostendere ipsos G K esse quadratos, & ex eorum lateribus bis inuicem ductis
1. noni. produci H. Et quidem ipse K quadratus est ipsius D. ex constructione. [2] At G. cùm fiat ex mutuo ductu planorum similium C A. quadratus est medij proportionalis E. Restat ergo probandum ipsum
16 septimi. H. produci ex E in D bis. Itaque quoniam est A ad C, vt B ad D. [3] qui sub extremis A D continetur, æqualis ei qui sub mediis C B. At ex C in B fit H. per constructionem. Igitur ex A in D fit idem H. Quarè cùm A sit duplus ipsius E. fiet idem H ex E in D bis. Quod erat probandum. Similiter si D ducatur in A + B. vnde fiat M + P. certus scilicet numerus Numerorum + certis vnitatibus, hisque adiiciatur L quadratus ipsius C dico totum L M. P quadratum esse. Quod iisdem probatur argumentis. Nam L. ex constructione quadratus est ipsius C. At P. qui fit ex mutuo ductu planorum similium B D. quadratus est medij proportionalis F. Denique vt ostensum est M, qui producitur ex A in D, producetur etiam ex C in B. hoc est ex C in F bis. Igitur ex omni parte constat propositum.

Ex dictis patet duplici de causa diuersas contingere posse solutiones. Primò prout diuersimodè instituentur positiones cum tradita cautione. Secundò prout producti ex primo in tertium adsumentis quadratum secundi latus diuersimodè fingetur, vt iam sæpe in simili, fieri posse docuimus.

Cæterùm huius quæstionis ope, licebit & sequentes absoluere.

QVAESTIO PRIMA.

DATVM numerum diuidere in tres numeros, quorum bini mutuo ductu quem producunt, is adſcito reliqui quadrato, quadratus fiat.

Eſto datus 10.

Sumantur tres numeri per ſuperiorem quæſtionem inuenti, & ſtatuantur in Numeris. Erunt ergo quæſiti 9 N. 73 N. 328 N. & productus ex binorum multiplicatione adſcito reliqui quadrato, quadratum facit. Reſtat vt eorum ſumma ſit 10. Quamobrem 410 N. æquantur 10. & fit 1 N. $\frac{1}{41}$. ſunt ergo quæſiti numeri $\frac{9}{41}$ $\frac{73}{41}$ $\frac{328}{41}$ ſeu 8.

QVÆSTIO SECVNDA.

INVENIRE tres numeros, vt producti ex binorum multiplicatione adſcito reliqui quadrato quadratos faciant, & quadratorum latera datum conſtituant numerum.

Datus eſto 25. Statuantur rurſus pro quæſitis, numeri per decimam ſextam inuenti, nimirum 9 N. 73 N. 328 N. ſic enim producti ex binorum multiplicatione adſcito reliqui quadrato, quadratos faciunt 108241 Q. 24025. Q. 8281 Q. quorum latera 329 N. 155 N. 91 N. Reſtat vt horum laterum ſumma æquetur 25. Quare 575 N. æquantur 25. & fit 1 N. $\frac{1}{23}$. Sunt ergo quæſiti numeri $\frac{9}{23}$ $\frac{73}{23}$ $\frac{328}{23}$.

QVÆSTIO XVII.

INVENIRE tres numeros vt productus ex binorum multiplicatione adſumpta, eorumdem ſumma quadratum faciat. Enim vero productus multiplicatione duorum quorumlibet quadratorum proximorum, adſcita ipſorum ſumma quadratum facit. Ponatur itaque primus 4. ſecundus 9. vt productus eorum multiplicatione quadratus, nempe 36. adſcita vtriuſque ſumma faciat quadratum. Reſtat vt & productus ex ſecundo in tertium, adſcito vtroque: itemque productus ex tertio in primum vtroque adſumpto faciat quadratum. Statuatur tertius 1 N. fitque productus ex ſecundo in tertium, vtroque adſumpto 10 N + 9. æquandus quadrato. At productus ex tertio in primum adſumens vtrumque fit 5. N. + 4. æqualis quadrato. Hic quoque rurſus duplicata æquatio occurrit; eſtque interuallum 5 N. + 5. Quæro igitur duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 5 N. + 5. & ſunt, hic quidem 1 N. + 1. ille verò 5. Atque vt in ſecundo libro docuimus, vel ſummæ horum ſemiſſis quadratus æquatur maiori: vel interualli ſemiſſis quadratus æquatur minori. Et fit 1 N. 28. Erit igitur primus 4. ſecundus 9. tertius 28. & ſatisfaciunt poſtulatis.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. πάντων δὲ δύο τετραγώνων κατὰ τὸ ἑξῆς ὁ ὑπὸ προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω τοίνυν ὁ μὲν πρῶτος μο δ. ὁ δὲ δεύτερος μο θ ἵνα ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν γινόμενος τετράγωνος. μο λϛ. προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου προσλαβόντα συναμφότερον, καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβόντα συναμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. τετάχθω ὁ τρίτος ςου α. καὶ γίνεται ὁ ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου προσλαβὼν συναμφοτέρους ςς ι μο θ ἴσος τετραγώνῳ. καὶ ἔτι ὁ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβὼν συναμφοτέρους ςς ε μο δ ἴσος τετραγώνῳ καὶ γίνεται πάλιν καὶ ἐνταῦθα διπλῆ ἡ ἴσωσις. καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ ςς ε μο ε. ζητῶ οὖν πάλιν δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπό ἐστι ςς ε. μο ε καὶ εἰσὶν ὃς μὲν ςου α μο α. ὃς δὲ μο ε. καὶ ὁμοίως τοῖς ἐν τῷ δευτέρῳ, ἢ τῆς συνθέσεως αὐτῶν τὸ ἥμισυ ἐφ᾽ ἑαυτὸ ἴσον τῷ μείζονι, ἢ τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ᾽ ἑαυτὸ ἴσον τῷ ἐλάσσονι. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο κη. καὶ ἔστιν ὁ μὲν πρῶτος μο δ. ὁ δὲ δεύτερος μο θ. ὁ δὲ τρίτος μονάδες κη. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XVII.

DEMONSTRANDVM eſt Poriſma quod aſſumit Diophantus, nimirum.

Productus ex multiplicatione duorum quadratorum, quorum latera vnitate diſtant, adſcita ipſorum quadratorum ſumma, quadratum facit.

Sunto quadrati A. B. quorum latera C. D. vnitate distent. Et productus ex A in B. esto G. cui addendo summam ipsorum A B. fiat H. Dico H esse quadratum. [1] Quia enim inter quadratos A B. cadit mediùs proportionalis productus ex C in D. [2] patet G esse quadratum producti ex C in D. At verò summa quadratorum A B [3] æquatur duplo producti ex C in D. & quadrato interualli ipsorum C D, hoc est vnitati. Igitur eadem summa quadratorum æquatur duplo lateris quadrati G vnitate aucto. Quamobrem cum addendo quadrato G duplum sui lateris vnitate auctum fiat H, [4] patet H esse quadratum, cuius latus vnitate superat latus ipsius G. Quod erat demonstrandum.

11. *Octaui.* 20. *septimi.* 4. 2. *porism.* 18. 1 *porism.*

C 2. D 3.
A 4. B 9.
G 36. H 49.

Quod autem attinet ad positiones primi & secundi numeri quos Diophantus vult esse quadratos continenter proximos, puta 4 & 9. allucinatur etiam Xilander cùm putat alios quoslibet numeros potuisse poni per trigesimam primam secundi inuentos. Nam si huiusmodi ponantur qui non sint quadrati, hi quidem vni parti propositi satisfacient, sed duplicata æqualitas ad quam per hanc operationem deuenitur, inexplicabilis erit. Etenim vt patet, numeri pro primo & secundo positi, sunt iidem cum vnitatibus quæ reperiuntur tandem in numeris quadrato æquandis, vt in hypothesi Diophanti, cùm primum & secundum posuisset 4. & 9. Inuenit quadrato æquandos 10 N. + 9. & 5. N. + 4. Quare cùm hîc Numerorum numeri sint inæquales, nec habeant rationem quadrati ad quadratum, necesse est vnitates adiunctas quadratas esse, alioquin resolui non posset æquatio. Cùm enim horum interuallum sit 5 N. + 5. tales deligendi sunt numeri, quorum mutuo ductu id fiat vt in quadrato semissis summæ illorum reperiantur vnitates 9. & in quadrato semissis interualli reperiantur vnitates 4. Vt scilicet vnitatibus in æquatione se mutuò abolentibus vna species vni æqualis remaneat, puta quadrati Numeris. Hoc autem fieri nequit, nisi in semisse summæ sint vnitates 3. latus in ipsius 9. & nisi in semisse interualli sint vnitates 2. latus ipsius 4. Proinde nisi 9. & 4. quadrati sint, rem perfici non posse est manifestum. Hinc facile est videre cur ad conficiendum interuallum 5 N. + 5. sumpserit Diophantus numeros 1 N. + 1 & 5. Nam vt ex dictis constat tales sumendi sunt vt summa vnitatum in ipsis contentarum sit 6. interuallum verò earundem 4. Quare per Canonem primæ primi reperientur vnitates ponendæ in illis numeris esse 1. & 5. Atqui posito altero multiplicatorum 5. euidens est alium esse non posse nisi 1 N. + 1. vt eorum mutuò ductu fiant 5 N. + 5. Posset quidem alter poni 1. alter verò 5 N. + 5. Sed horum summæ & interualli semissis quadrati secundum omnes suas partes maiores sunt propositi ad æquandum quadrato numeris, vnde inuenitur valor Numeri minor nihilo. Quare restat solos 5. & 1 N. + 1. quæstioni soluendæ idoneos reperiri. Attamen ostendemus ad quadragesimam quintam quarti hanc æquationem etiam infinitis modis resolui posse per modum vtendi duplicata æqualitate à nobis inuentum, quem ibi explicabimus. Quod ad Hypostasim tertij numeri spectat, is non solùm poni potest 1 N. sed etiam quilibet Numerorum numerus. Sed si iidem ponantur primus & secundus eadem semper continget solutio vt experiendo deprehendes. Quamobrem omnis solutionis varietas pendet ex primi & secundi positione, quæ infinitis modis fieri potest. Cùm sumi possint alij atque alij quadrati continenter proximi.

OBSERVATIO D. P. F.

Extat huius quæstionis Diophanti problema in libro quinto quæstione quinta, Num vero problema sequens ipse Diophantus sciens prætermisit, an potius in aliquo tredecim librorum constructum erat, nescimus.

Inuenire 3. quadratos vt productus ex binorum multiplicatione adsumptâ eorundem summa quadratum faciat. Huius tamen quæstionis infinitas solutiones dare possumus.

En verbi gratia sequentem solutionem; satisfaciunt nempe problemati tres quadrati sequentes.

$\frac{2450384}{2053401}$ 1. quadratus.
$\frac{2019745}{2053401}$ 2. quadratus.
4 3. quadratus.

Imo & vlterius progredi & Diophantæam quæstionem promouere nihil vetat. Sequens enim problema generaliter & infinitis modis construximus.

Inuenire 4 numeros sub quibus binis quod fit planum adscitâ amborum summâ faciat quadratum.

Inueniantur per 5. propositionem lib. 5. tres quadrati vt quem bini faciunt planum adsciscens amborum summam faciat quadratum & sunto illi numeri quadrati;

$\frac{25}{9}$ $\frac{64}{9}$ $\frac{196}{9}$

Sunt ergo tres isti quadrati, tres primi numeri nostræ quæstionis, ponatur quartus 1 N. fient tria producta vna cum summis æqualia.

$\frac{34}{9}$ N + $\frac{25}{9}$ primum.
$\frac{23}{9}$ N + $\frac{64}{9}$ ſecundum.
$\frac{325}{9}$ N + $\frac{196}{9}$ tertium.

Hac igitur tria æquanda quadrato, & oritur triplicata æqualitas cuius explicationem dedimus ad quæſtionem 24. libri ſexti.

QVAESTIO XVIII.

INVENIRE tres numeros, vt productus ex binorum multiplicatione adſumens vtriuſque ſummam faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. ſecundus verò 3. & eſt productus eorum multiplicatione addito vtroque 4 N. + 3. æquandus quadrato. Eſto quadrato 25. & fit 1 N. 5 $\frac{1}{2}$. ergo primus 5 $\frac{1}{2}$ erit, ſecundus 3. & vni poſtulatorum eſt ſatisfactum. Nam productus eorum multiplicatione adſumens vtrumque facit quadratum 25. Oportet igitur vt & productus ex ſecundo in tertium, itemque productus ex tertio in primum adſcito vtroque faciat quadratum. Ponatur tertius 1 N. & fit productus ex ſecundo in tertium vtroque adſcito rurſus 4 N. + 3. At productus ex tertio in primum addito vtroque fit 6 $\frac{1}{2}$ N. + 5 $\frac{1}{2}$. Horum vterque quadrato æquatur. Sed quia alterius & numerorum & vnitatum multitudo, iis qui ſunt in altero eſt maior, neque eorum inter ſe ratio eſt quæ quadrati ad quadratum, inutilis eſt huiuſmodi poſitio. Eò itaque deuentum eſt vt quærantur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione vtroque adſcito faciat quadratum, & præterea ipſorum vnitate auctorum ratio ſit quæ quadrati ad quadratum. Quandoquidem ſi numerus numeri quadruplum ternario excedat, ipſi vnitate aucti rationem habent ad inuicem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Pono primum 1 N. ſecundum verò 4 N. + 3. Reſtat vt productus eorum multiplicatione vtroque addito faciat quadratum. Sed productus eorum multiplicatione vtroque addito eſt 4 Q. + 8 N. + 3. hic ergo æquatur quadrato. Formo quadratum abs 2 N − 3. & fit quadratus 4 Q. + 9. − 12 N. & fit 1 N. $\frac{6}{20}$ ſeu $\frac{3}{10}$. erit igitur primus $\frac{3}{10}$. ſecundus $\frac{42}{10}$ ſeu 4 $\frac{1}{5}$. Ita poſtulatorum vni eſt ſatisfactum. Supereſt vt productus ex ſecundo in tertium, itemque productus ex tertio in primum addito vtroque

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μὲν πρῶτος ϛ^ο α. ὁ δὲ δεύτερος μ^ο γ. καὶ γίνεται ὁ ὑπὸ αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ϛϛ δ μ^ο γ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ, ἔστω μονάσι κε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ο ε καὶ ἡμίσεως. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ^ο ε καὶ ἡμίσεως. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων γ. καὶ λέλυται ἓν τῶν ἐπιταγμάτων, ὁ γὰρ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων ποιεῖ τὸν κε τετράγωνον. δέησει ἄρα καὶ τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου, καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβόντα συναμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. τετάχθω ὁ τρίτος ϛ^ο α. καὶ γίνεται ὁ μὲν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου προσλαβὼν συναμφοτέρους πάλιν ϛϛ δ μ^ο γ. ὁ δὲ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβὼν συναμφοτέρους ϛϛ ϛ καὶ ἡμίσεως μονάδων ε καὶ ἡμίσεως, ἴσος ἑκάτερος τετραγώνῳ. καὶ διὰ τὸ πλεονάζειν ἐν τῷ ἑτέρῳ τὸ πλῆθος τῶν ϛϛ καὶ τῶν μονάδων. καὶ μηδὲ λόγον αὐτοὺς ἔχειν ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. σχολάζει ἡ γεγενημένη ὑπόστασις. ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἔτι οἱ μονάδι μείζονες αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἐπεὶ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ᾖ τετραπλασίων, καὶ μονάδων γ μείζων, οἱ μονάδι μείζονες αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τάσσω τὸν μὲν πρῶτον ϛ^ο α. τὸν δὲ δεύτερον ϛϛ δ μ^ο γ δεῖ λοιπὸν τὸν ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων ἴσον εἶναι τετραγώνῳ. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων ἐστὶ δ^υ δ ϛϛ η μ^ο γ ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ϛϛ β ⋔ μ^ο γ. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δ^υ δ μ^ο θ ⋔ ϛϛ ιβ. καὶ γίνεται ὁ ϛ^ο ϛ^{κ}. τουτέστι γ^{ι}. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος γ^{ι} ὁ δὲ δεύτερος μβ^{ι}. τουτέστι δ. α^{ε} καὶ μένει ἓν τῶν ἐπιταγμάτων. λοιπὸν ἐστὶ τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου μετὰ συναμφοτέρων ποιεῖν τετράγωνον. τάσσω τὸν τρίτον ϛ^ο α. ἔστι δὲ καὶ ὁ δεύτερος μ^ο δ. α^{ε}. γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων ϛϛ ε. α^{ε}. μ^ο

δ^ʷ α ^ι μ° δ ᾱ ^ι. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω μ° κε. πάλιν ἐπεὶ ὁ μὲν τρίτος ἐστὶ ς^ο ᾱ. ὁ δὲ πρῶτος γ ^ι. ἔσται ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων ςς ιγ ^ι μ° γ ^ι. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω μ° ρ̄ πιῶ τοὺς ςς^οὺς ε. ᾱ ^ι. μ° δ. α ^ι ἐπὶ τὸν κε. γίνονται ςς^οὶ ρλ μ° ρε ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ ὁμοίως τὰ τοῦ ς^ο ιγ ^ι. μονάδας γ ^ι. ἐπὶ τὸν ρ̄ γίνονται ςς^οὶ ρλ μονάδες λ̄. ἴσοι πάλιν τετραγώνῳ. καὶ ἐστὶν αὐτῶν ὑπεροχὴ μονάδες οε. καὶ ἔστι διπλῆ πάλιν ἰσότης, καὶ συνάγεται ὁ ἀριθμὸς ζ ^ι. ἔσται ὁ μὲν τρίτος ζ ^ι. ἦν δὲ καὶ ὁ μὲν πρῶτος γ ^ι. ὁ δὲ δεύτερος μβ ^ι. καὶ ποιοῦσι τὸ ἐπίταγμα.

faciat quadratum. Pono tertium 1 N. Eſt autem ſecundus $4\frac{1}{5}$. fit productus eorum multiplicatione addito vtroque $5\frac{1}{5}$ N + $4\frac{1}{5}$ æquandus quadrato. Eſto quadrato 25. Rurſus quia tertius eſt 1 N. primus autem $\frac{3}{10}$. erit productus eorum multiplicatione adſumpto vtroque $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$. æquandus quadrato, puta 100. Duco $5\frac{1}{5}$ N. + $4\frac{1}{5}$ in 25. fiunt 130 N. + 105. æquanda quadrato. Similiter duco $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$ in 100 fiunt 130 N. + 30. æquanda rurſus quadrato. Et eſt eorum interuallum 75. & duplicata rurſus occurrit æquatio, & fit 1 N. $\frac{7}{10}$. erit igitur tertius $\frac{7}{10}$. erat autem primus $\frac{3}{10}$. ſecundus $\frac{42}{10}$ & ſoluunt quæſtionem.

IN QVAESTIONEM XVIII.

SVBTILE eſt hoc problema, & elegans modus vtendi duplicata æqualitate in eo continetur, quem cùm non perceperit Xilander, mirum non eſt ſi parum feliciter eum explicauit. Quamuis corruptos ſolutionis numeros benè reſtituerit. Nos ergo triplicem Diophanti poſitionem percurrentes notatu digna quæque percenſeamus, & obſcura dilucidemus.

Prima poſitione quæruntur duo numeri, vt productus illorum multiplicatione adſcita ſumma eorundem, quadratum faciat, & reperiuntur $5\frac{1}{3}$ & 3. Quamobrem hos ſtatuendo pro primo & ſecundo, ponitur tertius 1 N. quem ducendo ſigillatim in priores duos, & productis addendo ſummam eorum ex quibus producuntur, fiunt quadrato ſimul æquandi 4 N. + 3 & $6\frac{1}{3}$ N + $5\frac{1}{3}$. Hæc autem æquatio inexplicabilis eſt, quia cùm numeri quadrato æquandi componuntur ex Numeris & vnitatibus, oportet vel numeros Numerorum æquales eſſe, vt contigit propoſitione decima quarta huius, vbi æquatur quadratis 10 N. + 54. & 10. N. + 6. vel numero Numerorum inæquali exiſtente, oportet vnitates eſſe quadratas, vt in præcedente quæſtione, vbi æquantur quadratis 10 N. + 9 & 5 N. + 4. vel denique (quod hucuſque non accidit) cùm vnitates quadratæ non ſunt, nec numeri Numerorum æquales, oportet ſaltem numeros Numerorum inter ſe rationem habere quadrati quam trademus infrà. Hoc igitur vt conſequamur. Videndum eſt vnde prouenerint Numerorum ad quadratum, ob cauſam numeri 4 N. & $6\frac{1}{3}$ N. At prouenerunt ex ipſis initio inuentis numeris 3. & $5\frac{1}{3}$ vnitate auctis, cùm ducendo ſigillatim in ipſos 1 N. & productis addendo 1 N. fiant 4 N. & $6\frac{1}{3}$ N. Corrigenda ergo eſt prima poſitio, & loco ipſorum 3. & $5\frac{1}{3}$ alij duo numeri ſunt inueniendi, quorum productus adſcita eorundem ſumma quadratum faciat, ita vt ipſi numeri vnitate aucti rationem inter ſe habeant quadrati ad quadratum. Id fiet per ſecundam poſitionem.

Secunda itaque poſitione vt inueniantur huiuſmodi numeri, & alterum poſtulatorum per ipſas poſitiones conſequamur, tali vtendum lemmate.

Si fuerint duo numeri quorum maior minoris quadruplum ternario excedat, ipſi numeri vnitate aucti erunt plani ſimiles.

Cuius lemmatis demonſtratio facilis eſt. Sit enim maior A E minor C D. & à maiore auferendo ternarium B E ſuperſit A B quadruplus ad C D. Dico ſi vtrimque addatur vnitas E F. D G. totos A F. C G. eſſe planos ſimiles. Cùm enim B F quaternarius ſit quadruplus vnitatis D G. Eſt vt A B ad C D, ita B F ad D G.

A . . . . B . . . E. F
C . . D. G

11. ſeptimi.

Quare & totus A F ad totum C G eſt in eadem ratione quadrupla; quod erat propoſitum. Ponitur ergo primus 1 N. ſecundus 4 N. + 3 vnde reſtat vt productus eorum multiplicatione adſcita eorum ſumma quadratum faciat, & peracta æquatione fit 1 N. $\frac{3}{10}$. ſuntque quæſiti numeri $\frac{3}{10}$ & $4\frac{1}{5}$. quibus vtentes tertiam inſtituemus poſitionem.

Tertia igitur poſitione quæſitorum ab initio numerorum ponitur primus $\frac{3}{10}$. Secundus $4\frac{1}{5}$. Tertius 1 N. vnde tandem proueniunt quadrato æquandi $5\frac{1}{5}$ N. + $4\frac{1}{5}$ & $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$. Vbi quia Numerorum numeri ſunt plani ſimiles, ſic explicabitur æquatio, ſumantur duo quadrati in eadem ratione illorum numerorum, puta 100. & 25. ductoque minore in maiorem, & maiore in minorem fient
19 ſeptimi. iam quadrato æquandi 130 N. + 105. & 130 N. + 30. vbi numeri Numerorum ſunt æquales, quia datis quatuor numeris proportionalibus, ex primo in quartum idem procreatur numerus, qui fit

fit ex ſecundo in tertium. Nec per huiuſmodi multiplicationem immutatur æqualitatis ratio, quia quadrato per quemlibet quadratum ſiue multiplicato, ſiue diuiſo, ſemper fit quadratus, vnde patet ſi 130. N. + 105. æquetur quadrato, & illius $\frac{1}{25}$ puta 5 $\frac{1}{5}$ N. + 4 $\frac{1}{5}$ fore quadratum. Et ſi 130. N. + 30. ponatur æquari quadrato, & eius centeſimam partem, puta $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$ fore quadrato æqualem. Sumpſit autem Diophantus quadratos 25. & 100. potiùs quàm alios quoſcunque in eadem ratione, vt vitaret fractiones, alioquin expeditiùs res ageretur ducendo denominatorem rationis, puta 4. in minorem numerum $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$ vnde fierent quadrato æquandi 5 $\frac{1}{5}$ N + 4 $\frac{1}{5}$ & 5 $\frac{1}{5}$ N. + 1 $\frac{1}{5}$. Itaque ſubtili artificio res deducta eſt ad primum modum duplicatæ æqualitatis, quo vſus eſt Diophantus tum duodecima, & decima quarta ſecundi, tum decima quarta huius. Etenim ipſorum 130 N. + 105. & 130 N. + 30. Interuallum eſt 75. qui fit, ſi libet, ex 3. in 25. quorum ſummæ ſemiſſis quadratus 196. æquatur maiori 130 N. + 105. & fit N. $\frac{7}{10}$.

Cæterùm varietas in operatione & in ſolutione à multis oritur capitibus.

Primò enim inueniri poſſunt infiniti duo numeri, quorum productus adſcita eorum ſumma quadratum faciat, quique vnitate aucti fiant plani ſimiles. Tum quia, vt benè monet Xilander, quod de quadruplis aſſerit Diophantus, poteſt congruenter applicari omnibus aliis numeris ſeruantibus rationem quadrati ad quadratum; ſimiliter enim ſi numerus numeri noncuplum ſuperet octonario, addita vtrimque vnitate, fient plani ſimiles; & ſi numerus numeri ſedecuplum excedat numero 15 adſcita vterque vnitate, fient etiam plani ſimiles, & ſic de aliis. Tum quia numeri quadrato æquandi, qualis eſt in hypotheſi Diophanti 4 Q. + 8 N. + 3. latus diuerſimodè fingi poteſt, vt patet. Secundò rurſus in ſecunda eadem poſitione alia varietas conſiderari poteſt. Primus enim non ſolùm poteſt poni 1 N. ſed & quilibet Numerorum numerus lemmate tamen tradito vtendo congruenter in poſitione ſecundi. Vt ſi ponatur primus 2. N. erit ſecundus 8 N. + 3. vel 32 N. + 15. &c. ſi ponatur primus 3 N. erit ſecundus 12 N. + 3. vel 27 N. + 8 &c.

Tertiò in tertia poſitione iiſdem manentibus primò & ſecundò poteſt etiam tertius infinities variari, & poni non ſolùm 1 N. ſed & quilibet Numerorum numerus, ſed ad hoc intelligemus ampliari lemma traditum hoc pacto.

Si fuerint duo numeri, quorum maior quadruplum minoris ternario ſuperet, & vterque ducatur in tertium numerum, productiſque addatur idem tertius, fient duo plani ſimiles.

Quod ita demonſtrabitur.

A . . . . , B . . . C
D . . E F 5
G 55. H 10
K 60 L. 15.

Sit A C ſuperans ternario B C ipſum A B quadruplum ipſius D E. & tertius quilibet numerus F ductus in ipſos A C. D E. faciat G H. quibus addendo ſigillatim ipſum F fiant K L. dico ipſos K L eſſe in ratione quadrupla, atque adeò planos ſimiles. Etenim quia G. qui fit ex F. in A C. [1] æquatur productis (1. ſecundi.) ex F. in A B. & B C. At productus ex F. in A B. quadruplus eſt producti ex F. in D E ſeu ipſius H. (cùm A B. D E. ſint in quadrupla ratione) productus autem ex F. in ternarium B C. triplus eſt ipſius F. patet G. continere quadruplum ipſius H. & triplum ipſius F. quare ſi eidem G. addatur F. ſumma K. quadrupla eſt ipſorum H F. ſeu ipſius L. Quod demonſtrandum erat. Non aliter idem oſtendetur de alia qualibet ratione quadrati ad quadratum. Vt ſi A C. ponatur excedere noncuplum vel ſedecuplum ipſius D E. ternario, concludetur & K ipſius L eſſe noncuplum vel ſedecuplum, & ſic de alijs. Quare manifeſtum eſt iiſdem manentibus primò & ſecundò puta $\frac{1}{10}$. & 4 $\frac{1}{5}$. Tertium poni poſſe 1 N. vel 2 N. vel 3 N. &c.

Denique ipſa duplicata æqualitas infinitis modis reſolui poteſt, prout ſumentur alij atque alij numeri, quorum mutuo ductu fiat 75. dummodo horum ſummæ & interualli ſemiſſis quadrati maiores ſint ipſis 105. & 30. vt docuimus ad duodecimam ſecundi.

QVÆSTIO XIX.

INVENIRE tres numeros, ita vt binorum multiplicatione productus dempta amborum ſumma ſit quadratus. Vt in præcedenti ponatur primus 1 N. ſecundus vnitatum quotuis, & eodem modo in difficultatem inexplicabilem incidemus. Vt ergo multitudinem Numerorum ad multitudinem Numerorum habeamus ſub ratione quadrati ad quadratum, eò deuoluitur res vt quærantur duo numeri, quorum mutuo ductu qui fit dempta ambo-

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον, ὁμοίως τῷ πρὸ τούτου. τετάχθω ὁ πρῶτος ςος α. ὁ δὲ δεύτερος μο ὅσων δή ποτε, καὶ ἐλεύσομαι ὡσαύτως εἰς ἀπορίαν. ἵνα οὖν τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν ἔχωμεν λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ςος πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀπῆκται εἰς τὸ ζητῆσαι δύο ςους, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν τὸ συναμφότερον ποιῇ τετραγώνους. καὶ ἔτι οἱ μονάδι ἐλάσσονες αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετρά-

γωνος πρὸς τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ὁ ἀριθμὸς ἐὰν ἀριθμοῦ τετραπλασίων ᾖ παρὰ μονάδας γ̄, οἱ μονάδι αὐτῶν ἐλάσσονες πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἐπειδήπερ καὶ τῆς μ° ᾱ. ἀφ' ἑκατέρου ἀφαιρουμένης γίνεται ἐλάττωσις μ° δ̄ καὶ ᾱ. καὶ δῆλον ὅτι ἀπὸ τετραπλασίων, λόγου τετραπλασίονος ἀφαιρουμένου, καὶ ὁ καταλειπόμενος ἔσται τετραπλασίων, τουτέστιν ὡς τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον ς ᾱ. μ° ᾱ τὸν δὲ δεύτερον ςς δ̄ μ° ᾱ. καὶ μένει ὁ ὑπ' αὐτῶν τῶν συναμφοτέρων δυν δ̄ λείψει μ° ᾱ ἴσος τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς β̄ λείψει μ° β. τουτέστι δυν δ̄ μ° δ̄ τῶν ςς η̄. καὶ γίνεται ὁ ς ε ηων. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ιγ ηων. ὁ δὲ δεύτερος κη ηων. καὶ λέλυται ἓν τῶν ἐπιταγμάτων. καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν πρῶτος ἐστὶ ιγ ηων. ὁ δὲ δεύτερος γ̄ καὶ ἥμισυ. τάσσω τὸν τρίτον ς ᾱ. καὶ ὁ ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου συναγόμενος ςς γ̄ ᾱ ∠. μένει ςς λείψας τὸν συναμφότερον ς ᾱ μ° γ̄ ᾱ μ° γ̄ ᾱ ∠. μένει ςς β̄. ᾱ ∠ λείψει μ° γ. ᾱ ∠. ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω μονάσι δ̄. ὁ δὲ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου γίνεται ςς ιγ ηων. λείψας συναμφότερον γίνεται ςς ε ηων. λείψει μονάδων ιγ ηων. ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω ις. ταῦτα ἑκκαιδεκάκις γίνονται ςςοι ι λείψει μονάδων κς. ἴσοι τετραγώνῳ καὶ ὁμοίως οἱ ςςοι β̄. α∠ λείψει μ° γ̄ ᾱ ∠ τετράκις, γίνονται ςςοι ι λείψει μ° ιδ ἴσοι πάλιν τετραγώνῳ. καὶ ἔστιν αὐτῶν ὑπεροχὴ μ° ιβ. οὕτω τὸ ὑπὸ μ° β̄ καὶ μ° ς̄ συναμφοτέρων τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται μ° ις ἴσαι τῷ μείζονι. τουτέστι ςςοις ι λείψει μ° ιδ. καὶ γίνεται ς μ°. γ̄. ἔσται ὁ μὲν τρίτος μ° γ̄. τουτέστι κδ ηων. ἔχομεν δὲ τὸν μὲν πρῶτον μ° ιγ ηων. τὸν δὲ δεύτερον μονάδων γ. ᾱ ∠ τουτέστι κη ηων. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

rum summa sit quadratus, & præterea ipsi vnitate multati rationem habeant quam quadratus ad quadratum. Enim vero si numerus alterum quater, dempto ternario continet, ij vnitate multati rationem habent inter se quam quadratus ad quadratum; quia scilicet vtrimque ablata vnitate, fit diminutio hinc quaternarij, inde vnitatis; & patet si à quadruplis quadrupla, auferantur, residua esse quadrupla, atque ideo in ratione quadrati ad quadratum. Pono igitur primum 1 N. + 1. secundum 4 N. + 1. & fit productus eorum multiplicatione, dempto vtroque 4 Q. − 1 æqualis quadrato à latere 2 N. − 2. hoc est 4 Q. + − 4. − 8 N. & fit 1. N. $\frac{5}{8}$. erit ergo primus $\frac{13}{8}$ secundus $\frac{28}{8}$. & satisfit vni postulatorum. Et quoniam primus est $\frac{13}{8}$ secundus $3\frac{1}{2}$. pono tertium 1 N. & fit secundo in tertium $3\frac{1}{2}$ N. & vtroque detracto, puta 1 N. + $3\frac{1}{2}$ restat 2. $\frac{1}{2}$ N. − 3 $\frac{1}{2}$ æquandus quadrato. Esto quadrato 4. Qui autem fit ex tertio in primum est $\frac{13}{8}$ N. & vtroque dempto restat $\frac{5}{8}$ N. − $\frac{13}{8}$ æquandus quadrato. Esto ipsi 16. & per hunc istud multiplicetur fit 10 N. − 26. æquandus quadrato. Similiter $2\frac{1}{2}$ N. − 3. $\frac{1}{2}$. ducantur in 4. fit 10 N. − 14. æqualis quadrato. Horum interuallum 12. quod fit mutuo ductu ipsorum 2. & 6. quorum summæ semissis in se facit 16. æqualem maiori, puta 10 N. − 14. & fit 1 N. 3. Ergo tertius est 3. seu $\frac{24}{8}$. habebamus autem primum $\frac{13}{8}$. secundum $3\frac{1}{2}$ seu $\frac{28}{8}$. & soluunt quæstionem.

IN QVAESTIONEM XIX.

OMNIA quæ ad præcedentem adnotata sunt, hîc etiam locum habent. Modus vtendi duplicata æqualitate idem est, & lemma quod assumit Diophantus eadem ratione demonstratur, ipsiusque demonstrationis fundamentum attigit Diophantus his verbis. *Quia scilicet vtrimque ablata vnitate, fit diminutio hinc quaternarij, inde vnitatis, & patet si à quadruplis quadrupla auferantur, residua esse quadrupla.*

Operationis quoque & solutionis varietas totidem modis contingere potest, vt diutiùs pigeat immorari in re manifesta.

QVÆSTIO XX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε ἑκάτερον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ

INVENIRE duos numerus, vt productus eorum multiplicatione siue alterutrum, siue summam ipsorum adsciscat,

faciat quadratum. Ponatur alter 1 N. alter 4 N. — 1. Quoniam si numerus sit numeri quadruplus dempta vnitate, productus eorum multiplicatione adsumens minorem facit quadratum. Iam duo postulatorum restant implenda, vt scilicet productus eorum multiplicatione adscito secundo, & vtroque simul faciat quadratum. Sed productus adsumens secundum fit 4 Q. + 3 N. — 1. æqualis quadrato. Et idem productus vtroque addito fit 4 Q. + 4 N. — 1. æquandus quadrato. Et est duplicata æqualitas. Horum interuallum 1 N. quod fit ex $\frac{1}{4}$ in 4 N. & fit 1 N. $\frac{65}{224}$. Erit igitur primus $\frac{65}{224}$. secundus $\frac{36}{224}$. & soluunt quæstionem.

μὲν ϛ° ᾱ. ὁ δὲ ϛϛ δ̄ ⋔ μ° ᾱ. ἐπειδήπερ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ᾖ τετραπλασίων παρὰ μονάδα, ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸν ἐλάσσονα ποιεῖ τετράγωνον. ἑξῆς δεῖ καὶ τὰ λοιπὰ δύο ἐπιτάγματα κατασκευάσαι. ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα τὸν δεύτερον, καὶ ἔτι συναμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸν δεύτερον γίνεται δυ δ̄ ϛϛ οἱ γ̄ λείψει μ° ᾱ. ἴσος τετραγώνῳ. ὁ δὲ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν συναμφότερον γίνεται δυ δ̄ λείψει μ° ᾱ. ἴσος τετραγώνῳ. καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης, καὶ ἔστι αὐτῶν ὑπεροχὴ ἀριθμὸς εἷς, καὶ περιέχεται ὑπὸ μ° ᾱ δ^ξ. καὶ ἀριθμῶν δ̄. καὶ συνάγεται ὁ ϛ° ξε σκδ^ξ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ξε σκδ^ξ. ὁ δὲ δεύτερος λϛ σκδ^ξ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XX.

MAGNA est conformitas huius quæstionis cum vigesima-septima secundi. Vbi quæruntur duo numeri, quorum productus adscito alterutro quadratum faciat. Sed hîc præterea postulatur vt idem productus adsumpta amborum summa faciat quadratum. Itaque suas positiones eodem modo instituit Diophantus, & eorundem lemmatum quæ ibi demonstrauimus hîc vsus esse potest.

Porro notandus hic modus vtendi duplicata æqualitate, cùm numerorum quadrato æquandorum interuallum constat ex solis numeris. Tunc enim necesse est in numeris quadrato æquandis reperiri quadratorum numerum quadratum, vt hîc 4 Q. Numeros autem quorum mutuo ductu fiat interuallum 1 N. accipit Diophantus 4 N. & $\frac{1}{4}$ ob similem causam illius quam attulimus ad decimam quintam huius. Oportuit enim talem sumi numerorum numerum, cuius semissis quadratus efficeret 4 Q. Quare debuit pro altero sumi 4 N. vnde sequitur alterum necessario esse $\frac{1}{4}$ vt eorum mutuo ductu fiat 1 N.

Cæterùm tota diuersitas in primis positionibus consistit, quas diuersimodè fieri posse constat auxilio lemmatum ad vigesimam septimam secundi allatorum.

QVÆSTIO XXI.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione siue alterutro siue vtriusque summa multatus quadratum faciat. Ponatur alter 1 N. + 1. alter 4 N. Quandoquidem si numerus numeri sit quadruplus, demptis quatuor vnitatibus, productus eorum multiplicatione detracto maiore quadratum facit. Restat itaque vt productum multiplicationis siue minore, siue vtriusque summa multatus, faciat quadratum. Sed productum illud dempto minore fit 4 Q. + 3 N. — 1. Et idem productum dempto vtroque fit 4 Q. — 1 N. — 1. Horum vtrumque quadrato æquale est. Interuallum 4 N. Statuo illud mutuo ductu producentes 4 N. & 1, & fit 1 N. 1 $\frac{1}{4}$. Erit ergo primus 2 $\frac{1}{4}$. secundus 5. & manifesta est demonstratio.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐάν τε λείψῃ ἑκάτερον, ἐάν τε συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μὲν ϛ° ᾱ μ° ᾱ. ὁ δὲ ϛϛ δ̄. ἐπειδήπερ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ᾖ τετραπλασίων παρὰ μ° δ̄. ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν μείζονα ποιεῖ τετράγωνον λοιπὸν δὴ τὸν ὑπ' αὐτῶν ⋔ τὸν ἐλάσσονα ποιεῖν τετράγωνον. καὶ ἔτι τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν ἐλάσσονα γίνεται δυ δ̄ ϛϛ γ̄ λείψει μ° ᾱ. ὁ δὲ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον δυ δ̄ λείψει ϛ° ᾱ μ° ᾱ. ἴσος τετραγώνῳ. καὶ ἔστιν αὐτῶν ὑπεροχὴ ϛϛ οἱ δ̄. τάσσω τὸν μὲν ϛϛ δ̄. τὸν δὲ μ° ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ϛ° μ° ᾱ. ᾱ δ^ξ. καὶ ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ° β̄. ᾱ δ^ξ ὁ δὲ δεύτερος μ° ε̄. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XXI.

EADEM aut similia dici possunt de hac quæstione, quæ de superiore dicta sunt vide quàm sit conformis vigesimæ octauæ secundi, & quomodo vtrobique eodem vtens lemmate Diohantus, eodem modo suas instituat positiones. Modus vtendi duplicata æqualitate idem est, quo vsus est in præcedente, & easdem ob causas ad conficiendum interuallum 4 N. sumpsit 4 N. & 1.

QVÆSTIO XXII.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τεσσάρων τετράγωνος, ἐάν τε προσλάβῃ ἕκαστον, ἐάν τε λείψῃ ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ἐάν τε προσλάβῃ τὸν δὶς ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ἐάν τε λείψῃ ποιεῖ τετράγωνον. ζητῶ πρότερον τέσσαρα τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας. τὸ δ' αὐτό ἐστι τετράγωνόν τινα διελεῖν τετράκις εἰς δύο τετραγώνους. καὶ ἐμάθομεν τὸν δοθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς β τετραγώνους ἀπειραχῶς. νῦν οὖν ἐκθώμεθα δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ὑπὸ ἐλαχίστων ἀριθμῶν οἷον γ. δ. ε. ε. ιβ. ιγ. καὶ πολλαπλασίασον ἕκαστον τῶν ἐκκειμένων ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ἑτέρου, καὶ ἔσται τὸ μὲν πρῶτον τρίγωνον λθ. νβ. ξε. τὸ δὲ δεύτερον κε. ξ. ξε. καὶ ἔστιν ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας. ἔτι δὲ φυσικῶς ὁ ξε. διαιρεῖται εἰς δύο τετραγώνους διχῶς εἴς τε τὸν ις. καὶ τὸν μθ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν ξδ. καὶ τὴν μονάδα. τοῦτο δὲ συμβαίνει ἐπεὶ ὁ ξε ἀριθμὸς περιέχεται ὑπὸ τοῦ ιγ καὶ τοῦ ε. ὧν ἕκαστος διαιρεῖται εἰς δύο τετραγώνους. νῦν τῶν ἐκκειμένων τοῦ τε μθ. καὶ τοῦ ις. λαμβάνω τὰς πλευράς, εἰσὶ δὲ ζ καὶ δ. καὶ πλάσσω τὸ τρίγωνον ὀρθογώνιον ἀπὸ ἀριθμῶν δύο τοῦ τε ζ καὶ τοῦ δ. καὶ ἔστι λγ. νς. ξε. ὁμοίως καὶ τοῦ ξδ. καὶ τῆς μονάδος αἱ πλευραὶ η καὶ α. καὶ πλάσσω πάλιν ἀπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον τρίγωνον οὗ αἱ πλευραὶ ις. ξγ. ξε. καὶ γίνεται τέσσαρα τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας. ἐλθὼν οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα, τάσσω τὸν μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν τεσσάρων ςς ξε. ἕκαστον δὲ τούτων τῶν τεσσάρων δυνάμεων τοσούτων, ὅσων ἐστὶ τετραπλασίων τοῦ ἐμβαδοῦ. τὸν μὲν πρῶτον δυ ͵δνς. τὸν δὲ δεύτερον δυ ͵γ. τὸν τρίτον δυ ͵γχϟς καὶ ἔτι τὸν τέταρτον δυνάμεις ͵βις. καὶ εἰσὶν οἱ τέσσαρες δυ Μ. α. ͵βψξη. ἴσοι ςς ξε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο

INVENIRE quatuor numeros vt compositi ex omnibus quadratis, singulorum tam adiectione quàm detractione faciat quadratum. Quoniam in quolibet triangulo rectangulo quadratus hypotenusæ siue auctus, siue multatus duplo eius quod fit è multiplicatione laterum circa rectum, facit quadratum. Quæro primum quatuor triangula rectangula æquales habentia hypotenusas. Hoc ipsum verò est, quadratum aliquem diuidere quater in duos quadratos. Atqui didiscimus datum quadratum diuidere in duos quadratos infinitis modis. Nunc ergo exponamus duo triangula rectangula in minimis numeris, quales sunt 3. 4. 5. & 5. 12. 13. & multiplicetur vnumquodque ipsorum per hypotenusam alterius, & erit primum triangulum 39. 52. 65. secundum 25. 60. 65. & sunt rectangula æquales habentia hypotenusas. Adhuc autem suapte natura numerus 65. diuiditur bis in duos quadratos, nempe in 16. & 49. Et rursus in 64. & 1. quod ei contingit quia fit ex multiplicatione mutua 5. & 13. quorum vterque in duos diuiditur quadratos. Nunc expositorum 49. & 16. sumo latera, sunt autem 7. & 4. & formo triangulum rectangulum à duobus numeris 7. & 4. & est 33. 56. 65. Similiter ipsorum 64. & 1. latera sunt 8. & 1. à quibus rursus formo triangulum rectangulum, cuius latera sunt 16. 63. 65. & fiunt quatuor triangula rectangula æquales habentia hypotenusas. Refero me igitur ad propositam initio quæstionem, & pono compositum ex quatuor numeris 65 N. Quemlibet verò ipsorum quatuor pono tot quadratorum quot continet vnitates quadruplum areæ. Primum quidem 4056 Q. Secundum autem 3000. Q. Tertium 3696 Q. Quartum denique 2016 Q. & est il-

lorum summa 12768 Q. æqualis 65 N. & fit 1 N. $\frac{65}{12768}$. Ad positiones. Erit primus 17136600. Secundus 12675000. sub eiusdẽ partis denominatione. Tertius 15615600. sub eiusdem partis denominatione. Quartus 8517600. sub eiusdem partis denominatione. Est autem partis denominator 163021824.

ξε μυι. α. μο ςτξε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μυ̃. αψιγ. μονάδες ϛχ. ὁ δὲ δεύτερος μυ̃. αρξζ. μο ε μορίου τοῦ αὐτοῦ. ὁ τρίτος μυ̃. αφξα. μο ϛχ. μορίου τοῦ αὐτοῦ. ὁ τέταρτος μυ̃. ωια. μο ζχ. μορίου τοῦ αὐτοῦ. τὸ δὲ μόριον μυ. α. μυ̃. ϛτβ. μο αωκδ.

IN QVAESTONEM XXII.

PVLCHERRIMVM est hoc problema & raræ subtilitatis, in quo cùm multum desudarit Xilander, perfectam tamen eius enodationem afferre non potuit, destitutus scilicet ope porismatum quæ ad hoc requiruntur. Quoniam ergo gloriam rei perobscuræ explicandæ nobis libenter reliquit, nos eam libentiùs amplectamur. Et vt omnia clariora fiant, singula quæque notatu digna ordine prosequamur.

Aduerte itaque primò lemma quod assumit Diophantus de triangulis rectangulis idem ferè esse licet aliis verbis enunciatum, quod iam vsurpauit trigesima prima secundi, vbi & monuimus, quod hîc repetere non pigebit, illo nil aliud contineri, quàm quod ostenditur quarta secundi Euclidis, & quarta secundi porismatum. Etenim per quartam secundi, constat summam quadratorum à duobus numeris adsumpto duplo producti laterum efficere quadratum summam laterum. At per quartam secundi porismatum patet duplum producti laterum detractum à summa quadratorum, relinquere quadratum interualli laterum. Quare cùm in triangulo rectangulo quadratus hypotenusæ sit æqualis quadratis laterum circa rectum, manifestum est, quod ait Diophantus, quadratum hypotenusæ siue adsumpto, siue detracto duplo producti laterum circa rectum, facere vtrimque quadratum. Proinde rectè Diophantus summam quatuor quæsitorum numerorum constituit hypotenusam alicuius trianguli rectanguli, vnumquemque verò ipsorum numerorum ponit duplum producti laterum circa rectum, seu quadruplum areæ trianguli, vt constat ex tertia definitione tertij porismatum, sic enim optimè satisfit postulatis. Quamobrem vt ipsi numeri diuersi reperiantur, superest vt inueniamus quatuor triangula rectangula, quorum eadem sit hypotenusa.

Aduerte igitur secundò, vt benè monet Diophantus, reperire quatuor triangula rectangula eandem habentia hypotenusam, nil aliud esse quàm quadratum quemlibet diuidere quater in duos quadratos. Quare nisi fractiones in operando vitare voluisset, poterat rem absoluere per octauam secundi, qua docuit quadratum quemlibet infinities diuidere in duos quadratos. Vt autem fractiones in operatione vitentur, subtili sanè artificio quadratum inuestigat author, qui quater diuidatur in duos quadratos integros. Exponit scilicet duo triangula rectangula non similia, puta 3. 4. 5. & 5. 12. 13. Tunc vtriusque latera per alterius hypotenusam multiplicans, inuenit alia duo triangula, quorum eadem est hypotenusa, nimirum 39. 52. 65. & 25. 60. 65. Nam & hæc esse latera trianguli rectanguli patet per primam tertij porismatum, cùm fiant lateribus trianguli rectanguli per eundem numerum multiplicatis. Quod autem dixi exponenda esse triangula non similia, id factum est, quia si triangula similia sint, non iam alia duo hac ratione formabuntur ab his triangula, sed vnicum duntaxat. Quod sic demonstratur. Sint triangula similia A B C. D E F. & ducta hypotenusa F in singula alterius latera fiat triangulum G. H. K. dico idem triangulum G H K, & non aliud, fieri, si hypotenusa C. ducatur in singula latera alterius D E F. Nam primo ex hypothesi ex C in F fiet K. Deinde [a] quia est A ad D vt C ad F. fiet, vtique [b] idem G ex C in D qui fit ex A in F. similiter quia est B ad E vt C ad F. fiet rursus idem H ex C in E qui fit ex B in F. Quare constat propositum.

A 3.	B 4.	C 5.
D 6.	E 8.	F 10.
G 30.	H 40.	K 50.

[a] *defin. 4.*
[b] *3. porism. 1. septimi.*

Aduerte tertiò. Vt rursus inueniatur alia duo triangula, quorum sit eadem hypotenusa 65. Diophantum vti porismate, quod demonstrauimus propositione septima libri tertij nimirum. Si duo numeri ex duobus quadratis compositi inter se ducantur, productus componetur bis ex duobus quadratis. Hac de causa triangula initio exposita ita delegit, author, vt cuiuslibet hypotenusa componatur ex duobus quadratis, puta 5. ex quadratis 1. & 4. ac 13. ex quadratis 4. & 9. vnde optimè concludit 65. componi bis ex duobus quadratis, nimirum semel ex 16. & 49. Atque iterum ex 1. & 64. Hi autem quadrati vt reperiantur ostendit septima tertij porismatum. Sed illius limitationes attendendæ sunt, quarum prima requirit, vt quilibet expositorum numerorum componatur ex duobus quadratis inæqualibus, nam si alter ex duobus æqualibus quadratis compositus sit, productus eorum multiplicatione componetur tantùm semel ex duobus quadratis, vt si sumantur 5. & 8. quorum 8 componitur ex æqualibus quadratis 4. & 4. erit productus 40. semel tantùm ex duobus quadratis compositus, puta ex 36. & 4. secunda verò limitatio requirit, vt expositi numeri componantur ex quadratis minimè pro-

portionalibus , alioquin idem sequitur incommodum , vt si sumantur 5. & 20. compositi ex quadratis proportionalibus 1. 4. 4. 16. erit productus 100. ex duobus quadratis semel duntaxat compositus, videlicet ex 64. & 36. Quæ omnia loco citato demonstrantur.

Aduerte quartò. Inuentis quadratis 16. & 49. itemque 1. & 64. ex quibus 65. componitur ex iis Diophantum formare triangula rectangula duo , quorum eadem est hypotenusa 65. eò quem demonstrauimus modò tertia vel quinta tertij porismatum. Etenim si per tertiam libeat operari à quadratis 16. & 49. fiet triangulum cuius hypotenusa erit summa ipsorum puta 65. basis verò interuallum eorundem puta 33. Perpendiculum autem erit duplum medij proportionalis , puta 56. Rursus à quadratis 1. & 64. formabitur triangulum , cuius hypotenusa erit summa ipsorum , puta 65. Basis verò interuallum eorundem , puta 63. Perpendiculum autem erit duplum medij proportionalis , puta 16. & sic habebuntur triangula duo quæsita 33. 56. 65. & 16. 63. 65. Quæ eadem reperientur per quintam tertij porism. Verùm hic notandus est Casus , cùm productus ex mutuo ductu duorum numerorum ex duobus quadratis, compositorum , componitur quidem bis ex duobus quadratis, sed vna compositione componitur ex duobus quadratis æqualibus, vt sumptis 5. & 10. productus 50. componitur quidem semel ex quadratis 1. & 49. inæqualibus. Sed componitur iterum ex æqualibus 25. & 25. Vnde per hanc compositionem inutilis redditur operationi Diophanti , non enim inde concludi potest eius quadratum componi ex duobus quadratis, cùm ipsorum 25 & 25. nullum sit interuallum, quod deberet esse latus vnius quadratorum illorum. Porro id semper accidit, quando tales sumuntur duo numeri ex duobus quadratis compositi , vt quod fit ex interuallo laterum vnius , in interuallum laterum alterius , æquetur duplo producti ex minore latere in minus latus. Quod ita demonstratur.

C 6.
A 3. B 9. M 90.
F 1.
D 1. E. 2. N 5.
G 3. H 9. K 6. L 18.

Sint A B latera quadratorum vnius , quorum interuallum C. & sint D E latera quadratorum alterius , quorum interuallum F. & productus ex C. in F æquetur duplo producti ex A in D. Porro compositus ex quadratis ipsorum A B esto M. & productis esse quadratis ipsorum 1 D E esto N. dico productum ex M in N. componi quidem bis ex duobus quadratis , sed vna compositione componi ex duobus æqualibus quadratis. Etenim ducto D in ipsos A B. fiant G H. & ducto E in eosdem A B. fiant K L. Patet ex demonstratis septima tertij porismatum , , productum ex M. in N. componi tum ex quadrato summæ amborum G L. & & ex quadrato interualli ipsorum G K. Tum ex quadrato summæ amborum H K. & ex quadrato interualli ipsorum H L. Verùm aio summam ipsorum H K. æquari interuallo ipsorum G L, ac proinde productum ex M in N. hac compositione constare ex duobus quadratis æqualibus. Quia enim L fit ex E in B. seu ex duobus D F. in duos A C. si hinc auferatur productus ex D in A. puta G. patet interuallum ipsorum G L. æquari productis ex A in F, ex C in D, & ex C in F. & loco producti ex C in F. sumendo duplum producti ex A in D illi æqualem ex hypothesi , erit prædictum interuallum æquale duplo producti ex A in D. & productis ex D in C. & ex A in F. Sed eisdem productis patet æqualem esse summam ipsorum H K. Nam H fit ex D in B. seu ex D in A. & ex D in C. At K fit ex A in E. seu ex A in D. & ex A in F. Vnde constat duorum H K. summam æquari duplo producti ex A in D, & productis ex D in C. & ex A in F. Igitur ipsorum H K summa æquatur interuallo ipsorum G L. Quod demonstrandum erat.

Aduerte quintò. Textus Græci lacunas à me esse repletas , tum deficientes numeros restituendo, tum corruptos emendando , & ne fortè hæreas in numeris Græcis , moneo Diophantum maximos numeros in quibus ingens Myriadum multitudo continetur , sic exprimere vt Myriadas à reliquis vnitatibus distinguat perspicuitatis ergo , signum autem Myriadibus apponit μυ̃ Myriadibus myrandum μμ. duplex μ. At reliquis vnitatibus signum consuetum μο̃. Sic vides numerum 163021824. sic ab eo exprimi , μμο̃α. idest Myrias vna myriadum. μυ̃. ςτβ̃ id est Myriades 6302. μο̃ ,αωκδ̃. idest vnitates 1824. Et sic de aliis.

Aduerte postremò , sine porismate Diophanti æquè benè inueniri posse in integris quatuor triangula rectangula eandem habentia hypotenusam , auxilio decimæ tertij porismatum. Etenim expositis triangulis non similibus 3.4.5. & 5.12.13. si cum Diophanto formes ex his alia duo ducendo vtramque hypotenusam in alterius latera , habebis 39.52.65. & 25.60.65. Tum si per decimam tertij porism. ex iisdem triangulis prius expositis formes alia duo modo ibi tradito , fient vtique 33. 56. 65. & 16. 63. 65. Immò ex ibi demonstratis licebit ampliare Porisma Diophanti , & illud extendere non solùm ad numeros ex duobus quadratis compositos , sed etiam ad duos ex duobus planis similibus compositos , & vniuersalissimè proponere.

Si numerus ex duobus planis similibus compositus, ducatur in alium ex duobus planis similibus compositum , qui non sint proportionales iis ex quibus primus componitur ; producetur numerus cuius quadratus componetur quater ex duobus quadratis.

A 24. B 45. C 51.
D 9. E 12. F 15.

Sint enim C F ex duobus planis similibus vterque compositus , qui non sint proportionales. Et ex C in F fiat T. dico T quater componi ex duobus quadratis. Etenim quia C componitur ex duobus planis similibus , erit hy-

G 693. K 324. L 756. M 117. N 675. P 360. Q 612. R 459. T 765

potenusa trianguli rectanguli per tertiam tertij porismatum. Sint ergo latera circa rectum A. B. similiter F ostenditur hypotenusa trianguli rectanguli, cuius latera circa rectum D E. Igitur à duobus triangulis A B C D E F. formentur alia duo ducendo hypotenusam vtramque in alterius latera, erunt triangula N P T. Q R T. Rursus formentur alia duo per decimam tertij porismatum, erunt hæc G K T. L M T. Quare constat propositum.

Cæterùm animaduersione quoque dignum est, quæstionem hanc ad quotlibet numeros eadem arte extendi posse, cùm si fractiones quidem minimè vitentur, quilibet quadratus infinitis modis diuidi possit in duos quadratos. Si verò etiam per integros rem absoluere libeat, facilè fit Diophanti artificium imitando quadratum reperire, qui quoties quis iusserit componatur ex duobus quadratis integris, quandoquidem per porisma quod assumit Diophantus, quodque demonstratum est septima tertij porismatum licet numerum inuenire quoties quis iusserit ex duobus quadratis compositum. Nam sicut per illud porisma inuenitur numerus bis compositus ex duobus quadratis, ducendo numerum semel ex duobus quadratis compositum, in alium item semel ex duobus quadratis compositum, ita si numerus bis compositus vt 65. ducatur in alium semel compositum, quales sunt 5 13. 10. 17. productus ter aut quater ex duobus quadratis componetur, ter quidem si 65. ducatur in 5. vel in 13. ex quorum mutuo ductu ipse fit, vel in aliquem illorum multiplicem. Quater autem si secus. Verbi gratia productus ex 5. in 65. pura 325. ter tantum componitur ex duobus quadratis, nempe ex 225. & 100. ex 324. & 1. ex 289. & 36. Quod accidit quia 5. & 65. componuntur ex duobus quadratis. Quare si intelligamus 65. componi ex 49. & 16 necesse est productum ex 5. in 65. puta 325. componi ex duobus quadratis qui sunt 225. & 100. 324. & 1 Rursus verò si capiamus 65. vt compositum ex 64. & 1. necesse est productum ex 5. in 65. puta 325. componi etiam bis ex duobus quadratis, nimirum ex 289. & 36. & ex 225. & 100. Sed quia hi coincidunt cum duobus ob priorem multiplicationem inuentis, constat 325. ter tantùm diuidi in duos quadratos. At si ducas 17. in 65. fiet 1105. quater compositus ex duobus quadratis nimirum ex 576. & 529. quorum latera 24. 23. ex 1024. & 81. quorum latera 32. 9. ex 961. 144. quorum latera 31. & 12. Ac demum ex 1089. & 16. quorum latera 33. & 4.

Quod si velis numerum sexies compositum ex duobus quadratis, sume aliquem ter compositum vt 325. eumque ducito in semel compositum, dum non sit aliquis eorum qui metiuntur 325. vel multiplex eorum, sed sume v. g. 17. quo ducto in 325. fit 5525. sexies compositus ex duobus quadratis, nempe ex 3025. 2500. quorum latera 55. 50. ex 3844. 2681. quorum latera 62. 41. ex 4900. 625. quorum latera 70. 25. ex 5041. 484. quorum latera 71. 22. ex 5329. 196. quorum latera 73. 14. Ac demum ex 5476. 49. quorum latera 74. 7.

Ita si velis numerum octies ex duobus quadratis compositum, duces compositum quater in compositum semel, vel bis compositum in bis compositum, dummodo inter eos nulla sit communicatio, & sic in infinitum. Qua de causa si ducas 5525. sexies compositum, vt ostensum est, in 1073. bis compositum, nimirum ex binis quorum latera 32. & 7. Et rursus ex binis quorum latera 28. 17. fiet 5928325. compositus (quod mirabile est) vicesies & quater ex duobus quadratis, quorum accipe binorum latera.

2110	2426	2417	2390	2362	2191	1985	2118
1215	207	294	465	591	1062	1410	1201
2319	2335	1823	1953	2415	2434	2271	2385
742	690	1614	1454	310	63	878	490
2282	2202	2065	2238	1746	1890	1633	2433
849	1039	1290	959	1697	1635	1806	94

OBSERVATIO D. P. F. AD COMMENTARIVM, præcipuè ad locum illum, Aduerte tertio, &c.

NVmerus primus qui superat vnitate quaternarii multiplicem semel tantùm est hypotenusa trianguli rectanguli, eius quadratus bis, cubus 3. quadratoquadratus 4 &c. in infinitum.

Idem numerus primus & ipsius quadratus componuntur semel ex duobus quadratis: eius cubus & quadratoquadratus, bis: quadratocubus & cubocubus ter &c. in infinitum.

Si numerus primus ex duobus quadratis compositus ducatur in alium primum

etiam ex duobus compositum quadratis, productum componetur bis ex duobus quadratis: si ducatur in quadratum eiusdem primi: productum componetur ter ex duobus quadratis: si ducatur in cubum eiusdem primi productum componetur quater ex duobus quadratis, & sic in infinitum.

Hinc facile est determinare quoties numerus datus sit hypotenusa trianguli rectanguli, sumantur omnes primi quaternarij multiplicem vnitate superantes qui datum numerum metiuntur v. g. 5.13.17. Quod si potestates dictorum primorum metiantur datum numerum, Disponantur vna cum reliquis loci laterum v. g. metiantur datum numerum 5. per cubum, 13. perquadratum & 17. per latus simpliciter.

Sumantur exponentes omnium diuisorum Nempe numeri 5. exponens est 3. propter cubum, numeri 13. exponens est 2. propter quadratum & numeri 17. vnitas tantum: ordinentur igitur vt volueris dicti omnes exponentes vt si velis. 3. 2. 1. ducatur primus in secundum bis & producto adjiciendo summam primi & secundi fit 17. ducatur iam 17. in tertium bis & producto adiiciendo summam 17 & tertij fit 52. datus igitur numerus erit hypotenusa 52. triangulorum rectangulorum, nec est dissimilis in quotcunque diuisoribus & ipsorum potestatibus methodus.

Reliqui numeri primi qui quaternarii multiplicem vnitate non superant nihil aut addunt quæstioni aut detrahunt neque ipsorum potestates.

Inuenire numerum qui quoties quis velit sit hypotenusa: quæratur numerus qui sit septies hypotenusa, numerus 7. ductus dupletur fit 14. adiice vnitatem fit 15. sume omnes primos qui mensurant 15. sunt hi 3. & 5. ab vnoquoque demptâ vnitate sume reliqui dimidium, fiunt 1. 2. quærantur tot primi diuersi quot hic sunt numeri nempe duo & secundum exponentes 1 & 2 inter se multiplicentur nempe vnus in quadratum alterius, in hoc casu satisfiet quæstioni modò primi quos sumis superent quaternarium vnitate, ex his constat facilè posse inueniri numerum minimum qui quoties quis velit sit hypotenusa.

Inuenire numerum qui quoties quis velit componatur ex duobus quadratis: sit datus numerus 10. eius duplum 20. cuius omnes partes primæ sumantur. 2. 2. 5. ab vnaquaque tolle vnitatem fiunt 1. 1. 4. sumantur igitur 3. numeri primi, (qui nempe vnitate superant quaternarium,) v. g. 5. 13. 17. & quadratoquadratus vnius propter exponentem 4. ducatur in reliquos duos. Fiet numerus quæsitus. Vt autem dignoscatur quoties datus numerus ex duobus quadratis componitur. Sit datus numerus 325. numeri primi qui eum componunt (nempe quaternarium vnitate superantes) sunt 5. 13. hic semel, ille per quadratum. Exponentes disponantur 2. 1. productus multiplicatione iungatur summa, fit 5. cui adiunctâ vnitate fit 6. cuius dimidium 3. toties igitur numerus datus componitur ex duobus quadratis, si essent 3. exponentes vt 2. 2. 1. Ita procedendum, productum sub prioribus adiunctum summæ facit 8. ducatur 8. in tertium & iungatur productum summæ fit 17. cui iunge vnitatem fit 18. cuius dimidium dat 9. toties iste secundus numerus componetur ex duobus quadratis; ex his facile potest inueniri minimus numerus qui quoties quis velit componatur ex duobus quadratis. Si vltimus numerus bifariam diuidendus esset impar, tunc demptâ vnitate reliqui dimidium sumi debet.

Sed proponatur si placet sequens quæstio. Inuenire numerum in integris qui adsumpto dato numero conficiat quadratum, & sit hypotenusa quotlibet triangulorum rectangulorum. Hæc quæstio ardua est, proponatur v. g. inueniendus numerus qui sit bis hypotenusa, & adsumpto binario conficiat quadratum. Erit quæsitus numerus 2023. & sunt alij infiniti idem præstantes, vt 3362. &c.

QVAESTIO XXIII.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum, qui dempta vtraque parte diuisi faciat quadratum. Esto datus 10. Ponatur inueniendus quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. Is siue ei adimas 2 N. + 1. siue 4 N. remanebit quadratus. Statuo igitur primum 2 N. + 1. secundum 4. N. Oportet horum summam æquari dato numero. Sed horum summa est 6 N. + 1. Hoc ergo æquatur 10. & fit 1 N. 1 $\frac{1}{2}$. Ad positiones. Erit primus 4. Secundus 6. Quadratus autem 6 $\frac{1}{4}$.

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς, καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον. ὃς λείψας ἑκάτερον τῶν διῃρημένων ποιῇ τετράγωνον. ἔστω δὲ ὁ δοθεὶς μο ῑ. τετάχθω ὁ προσδεησκόμενος τετράγωνος δυ ᾱ ςς β̄. μο ᾱ. οὗτος ἐὰν μὲν λείψει ςςοὺς β̄ μο ᾱ. καταλείπεται τετράγωνος. ἐὰν δὲ ςςοὺς δ̄. πάλιν καταλείπεται τετράγωνος. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον ςς δ̄. ταῦτα δεῖ συντεθέντα ποιεῖν τὸν δοθέντα, ἀλλὰ συντεθέντα ἐστὶ ςςοὶ ϛ̄ μο ᾱ. ταῦτα ἴσα μο ῑ. καὶ γίνεται ὁ ς μο ᾱ. α∠. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο δ̄. ὁ δὲ δεύτερος μο ϛ̄ ὁ δὲ τετράγωνος μο ϛ̄. ᾱ δ.

IN QVÆSTIONEM XXIII.

MIROR Xilandrum non aduertisse quæstionem hanc eandem esse cùm decima sexta secundi, sicut & sequens non differt à decima quinta eiusdem libri. Operatio quidem est paulò diuersa Sed eodem fermè recidit.

Cæterùm varietas solutionis in eo consistit quod quadrati inueniendi latus potest fingi diuersimodè, nimirum ab 1 N. + quotlibet vnitatibus, quarum quadratus sit minor numero diuidendo, puta in hypothesi Diophanti 1 N. + 1. vel 1 N. + 3. vel 1 N. + quotlibet vnitatibus, quarum quadratus sit minor quàm 10. sic enim totidem diuersæ contingent solutiones quot modis variabitur vnitatum numerus, præterquàm in vno casu, cùm scilicet tales duo sumentur vnitatum numeri, vt vtriusque quadratum auferendo à dato numero, & residua diuidendo per sextuplum sumptorum numerorum, fient quotientes eodem distantes interuallo, quo distant sumpti numeri. Vt si sumantur numeri 1. & 2. in nostra hypothesi; nam ab eodem 10. auferendo quadratos eorum, puta 1. & 4. remanent *9.* & *6.* quibus diuisis per sextuplum ipsorum numerorum, puta *9.* per *6.* & *6.* per 12. fiunt quotientes $\frac{3}{2}$ & $\frac{1}{2}$ quorum interuallum idem est atque ipsorum 1 & 2. Quamobrem siue fingas latus quadrati quæsiti 1 N. + 1. siue 1 N. + 2. eadem continget solutio, cuius symptomatis causam ex ipsa operatione paulò attentiùs considerata facilè deprehendes.

Sed & animaduersione dignum est eodem posito vnitatum numero in latere Quadrati, eandem semper contingere solutionem, quantumlibet varietur Numerorum numerus. Sic in hypothesi Diophanti, siue latus fingatur 1 N. + 1. siue 2. N. + 1 siue 3 N. + 1 &c. semper eadem fiet solutio, erùntque quæsitæ partes *6.* & 4. & quadrati latus 2 $\frac{1}{2}$. Similiter siue quadrati latus ponatur 1 N. + 3. siue 2. N. + 3. siue 3 N. + 3. &c. semper erit eadem solutio, quippe quæsitæ partes inuenientur $\frac{2}{9}$ & *9* $\frac{7}{9}$. At quadrati latus $\frac{55}{18}$. Huius quoque symptomatis causam ex ipsamet operatione deprehendes, & ab huiusmodi theoremate.

Si fuerint tres numeri, & à primo detrahatur quadratus secundi, & residuum diuidatur per sextuplum producti ex secundo in tertium, ac quotiens ducatur in tertium, idem semper procreatur numerus quamtumlibet varietur tertius primo & secundo inuariatis.

Hoc verò nil aliud est quàm ex eodem numero per sextuplum eiusdem numeri diuiso eundem semper procreari numerum, vt tibi considerandum relinquo. Porro hinc talem elicio Canonem.

A dato numero aufer quadratum quemlibet, residuum diuide per sextuplum lateris illius, quotiens auctus eodem latere, erit latus quæsiti quadrati: eiusdem verò quotientis quadruplum erit altera quæsitarum partium.

Moneo demum, etiam eodem modo facta positione quæsiti quadrati, ipsarum partium positiones variari posse. Nam posito quadrato 1 Q. + 2 N. + 1. sicut alteram partium Diophantus posuit 4 N. qua detracta à quadrato posito, remanet quadratus 1 Q. − 2 N. + 1. sic & aliam ponere potuisset *6* N. − 3. vel 8 N. − 8. &c. quibus ab eodem quadrato detractis remanent quadrati 1 Q. − 4 N. + 4. & 1 Q. − 6 N. + *9.* Ita si ponas quæsitas partes 4 N. & 6 N. − 3. fiet horum summa 10 N. − 3. æqualis 10. & erit 1 N. $\frac{13}{10}$. & quæsitæ partes $\frac{26}{5}$ & $\frac{24}{5}$. latus quadrati $\frac{23}{10}$. Qua ratione operan-

do, necesse non est in quadrato quæsito reperiri plures vnitates quàm in dato numero. Nam ponatur quadratus quæsitus 1 Q. + 8. N. + 16. & ponantur partes quæsitæ 16 N. & 18 N. − 9. nam his ab exposito quadrato detractis, remanent quadrati 1 Q. − 8 N. + 16. & 1 Q. − 10. N. + 25. Partium summa est 34 N. − 9. æqualis 10. & fit 1 N. $\frac{19}{34}$. sunt ergo partes quæsitæ $\frac{304}{34}$ $\frac{36}{34}$. latus verò quadrati $\frac{155}{34}$.

QVÆSTIO XXIV.

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς ἀριθμοὺς δύο, καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον ὃς προσλαβὼν ἕκαστον τῶν διῃρημένων ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ° κ̄. καὶ τετάχθω ὁ τετράγωνος δυ ᾱ. ςς β̄. μ° ᾱ. τούτῳ δὲ ἐὰν προσθῶ ςς β̄. μ° γ̄. ἔστι τετράγωνος. ἀλλὰ μὴν καὶ ἐὰν προσθῶ ςς δ̄. μ° η̄. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον ςς β̄ μ° γ̄. τὸν δὲ δεύτερον ςς δ̄. μ° η̄. συναμφότερος ἄρα ἔσται ςς ς̄ μ° ια. ταῦτα ἴσα μ° κ̄. καὶ γίνεται ὁ ς° ᾱ. α∠. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος τῶν διῃρημένων μ° ς̄. ὁ δὲ δεύτερος μ° ιδ. ὁ δὲ τετράγωνος μ° ς̄ δ^x. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum, qui vtralibet diuisi parte assumpta faciat quadratum. Esto datus 20. Ponatur quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. Huic siue addas 2 N. + 3. siue 4 N. + 8. fit quadratus. Statuatur ergo primus 2 N. + 3. Secundus 4 N. + 8. Erit vtriusque summa 6 N. + 11. Hoc æquatur 20. & fit 1 N. 1 $\frac{1}{2}$. Erit itaque primus 6. Secundus 14. Quadratus autem 6 $\frac{1}{4}$. & demonstratio est euidens.

IN QVAESTIONEM XXIV.

EADEM est hæc quæstio cum decima quinta secundi, sed operatio aliquantulum diuersa. Positio quadrati variari potest infinitis modis, dummodo partes dati numeri sic ponantur, vt vnitates in iis contentæ simul sumptæ minores sint dato numero. Pro partibus etiam dati numeri variæ fieri possunt positiones, sed cum eadem cautione. Denique Canon ad decimam quintam traditus, ex huius etiam operatione formari poterat.



DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBER QVARTVS.

QVÆSTIO I.

Datvm numerum diuidere in duos cubos, quorum laterum summa data sit. Oporteat numerum 370. diuidere in duos cubos, quorum latera faciant 10. Ponatur prioris cubi latus 1 N. + 5. hoc est dimidium summæ laterum. Relinquitur ergo alterius cubi latus 5 − 1 N. Ipsi autem cubi erunt simul 30 Q. + 250. Hæc æquantur 370. dato scilicet numero, & fit 1 N. 2. Ad positiones. Erit prioris cubi latus 7. secundi 3. Ipsi autem cubi 343. & 27.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο κύβους ὧν αἱ πλευραὶ εἰσὶ δοθεῖσαι. ἔστω δὴ τὸν τ̄ο̄ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο κύβους, ὧν αἱ πλευραὶ μο ι̅. τετάχθω ἡ τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ ς α̅ μο ε̅. τουτέστι τὸ ἥμισυ τῶν πλευρῶν. λοιπὸν ἄρα ἡ τοῦ ἑτέρου κύβου πλευρὰ ἔσται μο ε̅ ⋔ ς α̅. αὐτοὶ ἔσονται οἱ κύβοι δυ λ̅ μο σ̅ν̅. ταῦτα ἴσα μο τ̄ο̄ τουτέστι τῷ δοθέντι, καὶ γίνεται ὁ ς μο β̅. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἡ τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ μο ζ̅. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου μο γ̅. αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι, ὁ μὲν πρῶτος τμγ. ὁ δὲ δεύτερος κζ.

In IV. Librum Diophanti Commentarij.

IN QVAESTIONEM PRIMAM.

Binomiorvm 1 N. + 5. & 5 − 1 N. cubos sumit Xilander modo communi, sumendo scilicet prius eorum quadratos, & eos ducendo in ipsa binomia. Verùm compendiosius erit, huiusmodi binomiorum cubos sumere per vigesimam secundi porismatum. Qua ostensum est cubum totius æquari cubis partium, & productis ter ex quadrato cuiuslibet in alterum, ita si velis cubum ipsius 1 N. + 5. sumes partium cubos, puta 1 C. & 125. Tum duces ter quadratum primæ partis in secundam, fient 15 Q. Denique duces ter quadratum secundæ partis in primam fient 75. N. Quamobrem erit cubus totus 1 C. + 15 Q. + 75 N. + 125. Eadem arte inuenies cubum residui 5 − 1 N. nimirum 125 + 15 Q. − 75. N. − 1 C. Vbi animaduersione dignum est in binomij, & in residui cubis duas semper species eodem signo, duas verò contrario affici. Nam partis quæ in vtroque latere afficitur signo + cubus etiam idem signum retinet vt in hypothesi 125. At partis affectæ signo − cubus etiam idem signum habet in cubo residui, puta in 1 C. Productus verò ter ex parte affecta signo + in quadratum alterius, idem retinet signum, puta 15 Q. At productus ter ex parte affecta signo − in quadratum alterius, habet etiam signum − in cubo residui, nimirum 75 N. Cæterùm ex operatione Diophanti elicitur huiusmodi Canon.

Aufer cubum summæ laterum à quadruplo summæ cuborum, residuum diuide per triplum summæ laterum, orietur quadratus interualli laterum.

Habens itaque summam numerorum, & eorum interuallum, inuenies numeros per primam primi; sed & alium non deteriorem Canonem elicere possumus ex decima nona secundi porismatum. Nimirum.

Aufer summam cuborum à cubo summæ laterum, residuum diuide per triplum summæ laterum, orietur planus sub lateribus.

Habens autem summam numerorum, & productum multiplicationis eorundem, inuenies Numeros per trigesimam primi.

Denique tam ex operatione Diophanti, quàm ex priore Canone colligitur, huic quæstioni hanc conditionem debere adiici.

Oportet quadruplum summæ cuborum, multatum cubo summæ laterum, diuisum per triplum summæ laterum, quotientem dare quadratum.

QVÆSTIO II.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ποιῇ δοθέντα ἀριθμὸν, καὶ ἔτι ἡ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ὑπεροχή. ἔστω δὴ τὴν μὲν ὑπεροχὴν αὐτῶν ποιεῖν μο ϛ. τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων μο φδ. τετάχθω πάλιν ἡ τοῦ μείζονος κύβου πλευρὰ ϛ α̅ μο γ̅ τοῦ δὲ ἐλάσσονος ϛ α̅ ⋔ μο γ̅. καὶ μένει ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι μο ϛ. λοιπὸν δεῖ τῶν κύβων τὴν ὑπεροχὴν εἶναι μο φδ. ἀλλ' ἡ τῶν κύβων ὑπεροχή ἐστι Δυ ι̅η̅ μο νδ. ταῦτα ἴσα μο φδ. καὶ γίνεται ὁ ϛ μο ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἡ μὲν τοῦ μείζονος κύβου πλευρὰ ἔσται μο η̅. ἡ δὲ τοῦ ἐλάσσονος μο β̅. αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι ὃς μὲν φιβ̅. ὃς δὲ η̅. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

INVENIRE duos numeros, vt illorum interuallum datum faciat numerum, & cuborum quoque ab ipsis ortorum sit quod prescribitur interuallum. Esto interuallum numerorum 6. interuallum verò cuborum 504. Ponatur rursus maioris cubi latus 1 N. + 3. minoris verò 1 N. − 3. & manet illorum interuallum 6. Superest vt cuborum interuallum sit 504. sed cuborum interuallum est 18 Q. + 54. Hæc ergo æquantur 504. & fit 1 N. 5. Ad positiones. Erit maioris cubi latus 8. minoris verò 2. Ipsi autem cubi 512. & 8. & euidens est demonstratio.

IN QVAESTIONEM II.

HIC ex operatione Diophanti eliciemus huiusmodi Canonem.

Diuide quadruplum interualli Cuborum multatum cubo interualli laterum, per triplum interualli laterum, orietur quadratus summa laterum.

Cùm autem habueris summam numerorum & eorum interuallum, inuenies ipsos numeros per primam primi, sed & alium Canonem non deteriorem eliciemus ex vigesima prima secundi porismatum, nimirum.

Diuide interuallum cuborum multatum cubo interualli laterum, per triplum interualli laterum, orietur planus sub lateribus.

Porro cùm habueris interuallum numerorum, & productum eorum multiplicatione, inuenies ipsos numeros per trigesimam tertiam primi. Colliges etiam tam ex operatione Diophanti quàm ex priore Canone, huiusmodi conditionem huic quæstioni præscribi debere.

Oportet quadruplum interualli Cuborum multatum cubo interualli laterum, diuisum per triplum interualli laterum, quotientem dare quadratum.

Quæstiones etiam aliquot hîc desiderantur ad hanc materiam pertinentes, quas subiicere non grauabor.

QVAESTIO PRIMA.

Datis duobus cubis, inuenire duos alios, quorum summa æqualis sit datorum interuallo. Oportet autem duplum minoris cubi non superare maiorem.

Sint dati cubi 8. & 1. quorum interuallum 7. Oportet igitur diuidere 7. in duos cubos. Esto latus vnius, latus maioris datorum cuborum − 1 N. puta 2. − 1 N. & fingatur alterius latus à certo Numerorum numero − latere minoris cubi, dum talis sit numerus Numerorum, vt fiat diuidendo quadratum maioris lateris per quadratum minoris. Esto itaque latus secundi cubi 4 N. − 1. Est ergo summa cuborum 7 + 63 C. − 42 Q. æqualis 7. & fit 1 N. $\frac{2}{3}$. suntque latera quæsitorum cuborum $\frac{4}{3}$ & $\frac{5}{3}$. ipsi cubi $\frac{64}{27}$. $\frac{125}{27}$.

Aliter fingatur latus vnius quæsitorum cuborum 1 N. − latere minoris datorum, puta 1 N. − 1. Alterius verò latus ponatur latus maioris cubi − tot Numeris, quot fiunt diuidendo quadratum minoris lateris per quadratum maioris, ponatur itaque 2 − $\frac{1}{4}$ N. fiet summa Cuborum 7 + $\frac{63}{64}$ C. − $\frac{21}{8}$ Q. æqualis 7. & fit 1 N. 2 $\frac{2}{3}$. suntque cubi quæsiti qui prius. Hîc moneo in tyronum gratiam

ingeniosè fingi cuborum latera, vt maneat tandem æquatio inter cubos & quadratos. Idcirco statuitur in vno laterum fictiorum maius datorum laterum cum signo + & in altero latere fictitio ponitur minus datorum laterum cum signo − vt facta additione cuborum, maneant tantùm vnitates 7 quæ aboleantur per æqualem vnitatum numerum, qui est ex alia parte, æquationis. Deinde tales vtrobique ponuntur numeri Numerorum vt in vno cubo totidem inueniantur Numeri cum signo + quot reperiuntur in alio, cum signo −. vt his etiam per additionem se mutuo elidentibus, maneat tandem æquatio inter cubos & quadratos, cùm quadrati ob signum − adiunctum transeant in aliam æquationis partem.

Ex vtraque autem operatione formatur huiusmodi Canon.

Vtrumque datorum cuborum ducito ter in latus alterius, productos diuide per summam cuborum, à maiore quotiente aufer minus latus, & minorem quotientem aufer à maiore latere, relinquentur cuborum quæsitorum latera.

Hinc conditionis adiectæ ratio deduci potest. Nam si maior cubus ad minorem sit in dupla ratione, vel etiam in minore, non posse perfici quod iubet hic Canon, sic demonstratur. Sint cubi A minor, & B duplus illius, quorum latera C D. ductoque A in D ter fiat E. quo diuiso per F summam cuborum A B. fit quotiens G. Ergo per hunc Canonem, vt habeamus latus vnius quæsitorum cuborum, oportet auferre G ab ipso D. Sed hac subtractione nil relinqui sic probatur. Quia B est duplus ipsius A. patet summam ipsorum A B, puta F triplam esse ipsius A. At E est triplum producti ex A in D. Cæterùm idem quotiens G fiet siue E diuidatur per F. siue triens ipsius E per trientem ipsius F. diuidi concipiatur. Sed diuidendo productum ex A in D. per A. fit quotiens D. igitur ipsi D G. sunt æquales, ac proinde auferendo G ab ipso D nil remanet pro latere vnius quæsitorum Cuborum. Quod erat propositum. Multo minus perfici poterit quod iubet Canon, si B ponatur minor duplo ipsius A, tunc enim G maior esse ostendetur quàm D, ac proinde subtractio nullo modo perfici poterit. Si enim B minor est duplo ipsius A. erit & F minor triplo ipsius A. Quare cùm triens ipsius E nempe productus ex A in D. diuidetur per trientem F qui minor erit quàm A quotiens vtique puta G. maior erit ipso D. Nam si productus ex A in D. per A. diuideretur, fieret quotiens D, Quare si idem productus diuidatur per numerum minorem quàm A, fiet vtique quotiens maior quàm D. Quare patet propositum.

A 1. B 2. C 1. D ℞ C. 2.
E ℞ C. 54. F 3. G ℞ C. 2.

Hinc quoque pendet modus inueniendi tres cubos, qui simul additi cubum efficiant, quod fit hac arte.

Sume duos cubos quorum maior superet duplum minoris, & ducito maius latus in summam cuborum; fiet latus cubi summam trium æquantis. Ducito minus latus in summam cuborum. Itemque maius latus in suum cubum multatum duplo minoris cubi. Ac denique minus latus in duplum maioris cubi multatum minore cubo, fient latera trium quæsitorum cuborum.

Ista pluribus explicare operæ pretium fuit, quoniam hæc quæstio, tanquam porisma est ad decimam nonam quinti, vt suo loco docebimus.

OBSERVATIO D. P. F.

Determinationem operationis iteratione facillimè tollimus & generaliter tum hanc quæstionem tum sequentes quæstiones construimus, quod nec Bachetus nec ipse Vieta expedire potuit. Sint dati cubi 64. & 125. inueniendi alij duo quorum summa æqualis sit datorum interuallo. Ex quæstione tertiâ folio sequenti quærantur duo alij cubi quorum differentia æquet differentiam datorum. Illos Bachetus inuenit & sunt $\frac{15252992}{250047}$ *&* $\frac{125}{250047}$, *isti duo cubi ex constructione habent interuallum æquale interuallo datorum. Sed isti duo cubi inuenti per quæstionis tertiæ operationem possunt iam transferri ad quæstionem primam cum duplum minoris non superet maiorem, datis itaque his duobus cubis quærantur alij duo quorum summa æquetur interuallo datorum, id quidem licet per determinationem huius quæstionis primæ. At interuallum datorum horum cuborum est per quæstionem tertiam æquale interuallo cuborum prius sumptorum 64. & 125. igitur construere nihil vetat duos cubos quorum summa æqualis sit interuallo datorum 64. & 125. quod sanè miraretur ipse Bachetus. Imo si tres istæ quæstiones eant in circulum & iterentur in infinitum, dabuntur duo cubi in infinitum idem præstantes, ex inuentis enim vltimo duobus cubis quorum summa æquet*

differentiam datorum, per quæstionis secundæ operationem quæremus duos alios quorum differentia æquet summam vltimorum, hoc est, interuallum priorum & ex hac differentiâ rursum quæremus summam & sic in infinitum.

QVÆSTIO SECVNDA.

Datis duobus cubis, inuenire duos alios, quorum differentia æquet summam datorum.

Sint dati 8. & 1. oporteat inuenire duos alios cubos, quorum interuallum sit 9. Ponatur latus vnius 2 + 1 N. alterius verò 4 N. − 1. ob causas in precedente explicatas. Erit igitur Cuborum interuallum 9 + 54 Q. − 63 C. æqualis 9. & fiet 1 N. $\frac{6}{7}$. Sunt ergo latera cuborum $\frac{20}{7}$. & $\frac{17}{7}$. Ipsi cubi $\frac{8000}{343}$. & $\frac{4913}{343}$.

Aliter ponatur latus vnius cubi 1 N. − 1. alterius verò 2 − $\frac{1}{4}$ N. erit interuallum cuborum 9 + 3 $\frac{3}{4}$ Q. − $\frac{63}{64}$ C. æqualis 9. vnde fit 1 N. $\frac{24}{7}$. suntque cubi qui prius. Ex vtraque operatione elicitur huiusmodi Canon.

Vtrumque datorum Cuborum ducito ter in latus alterius, productos diuide per interuallum cuborum, & minori quotienti adde maius latus. Atque à maiore quotiente aufer minus latus, summa & residuum exhibebunt quæsitorum latera cuborum.

Hinc etiam alius colligitur modus inueniendi tres cubos, quorum summa cubum faciat, qui talis est.

Sume duos quosuis numeros, & ducito maiorem in suum cubum auctum duplo minoris cubi, fiet latus cubi æquantis summam trium. Rursus ducito eundem maiorem numerum in interuallum cuborum. Itemque ducito minorem numerum, tum in duplum maioris cubi auctum cubo minore: tum in cuborum interuallum, fient latera trium quæsitorum cuborum.

Cæterùm moneo inuentis semel tribus cubis, siue per hanc, siue per præcedentem quorum summa cubum faciat, si eorum latera sigillatim per quemlibet numerum vel multiplicentur vel diuidantur, fore vt & productorum & quotientum cubi idem præstent. Quod facile est demonstrare
11. *octaui.* ex eo quod cubi sunt in triplicata ratione laterum, vnde sequitur numerorum proportionalium cubos esse proportionales, & propositum nullo negotio concluditur. Ita cùm per priorem regulam inuenti sunt cubi à lateribus 9. 12. 15. qui æquantur cubo à latere 18. si singula latera diuidantur per 3. fient rursus latera 3. 4. 5. quorum cubi simul æquabuntur cubo ipsius 6.

QVÆSTIO TERTIA.

Datis duobus cubis, inuenire alios duos, quorum differentia æquet datorum differentiam. Oportet autem duplum minoris excedere maiorem.

Sint dati cubi 64. & 125. quorum differentia 61. & quærendi sint alij duo cubi, quorum itidem interuallum sit 61. Ponatur vnius latus 1 N. − latere minoris cubi, puta 1 N. − 4. Et ponatur latus alterius tot Numerorum quot sunt vnitates in quotiente diuisionis quadrati à minore latere per quadratum maioris − latere maioris cubi. Sit ergo huiusmodi latus $\frac{16}{25}$ N. − 5. Cuborum interuallum est $\frac{11529}{15625}$ C. − $\frac{3660}{625}$ Q. + 61. quod æquatur 61. & fit 1 N. $\frac{57187500}{7205625}$ seu in minimis $\frac{500}{63}$. Sunt igitur latera cuborum $\frac{248}{63}$ & $\frac{5}{63}$. Ipsi verò cubi $\frac{15252992}{250047}$ & $\frac{125}{250047}$ quorum interuallum $\frac{15252867}{250047}$ seu 61. vt postulabatur.

Aliter. Ponatur latus vnius cubi 1 N. − 5. Alterius verò $\frac{25}{16}$ N. − 4. & eadem reperietur solutio. Quamobrem ex vtraque operatione hic formatur Canon.

Productum ex vtroque cubo ter in latus alterius diuide per summam cuborum. A maiore quotiente aufer minus latus, à minore quotiente aufer maius latus, relinquentur latera quæsitorum cuborum.

Porrò inde conditionis adiectæ ratio patet argumentando eodem prorsus modo quo ad primam istarum factum est. Nam similiter ostendetur si maior cubus sit duplus minoris, minorem quotientem æquari maiori lateri, & si maior cubus minoris sit plus quàm duplus demonstrabitur minorem quotientem, minorem esse maiore latere, ac proinde subtractionem huius ab illo fieri non posse.

Hinc etiam colligitur modus inueniendi quatuor cubos, vt bini binis sint æquales. nimirum.

Sume duos numeros, ita vt duplum cubi minoris superet maioris cubum. Deinde ducito minorem numerum tum in duplum cubi maioris multatum cubo minore, tum in summam cuborum, fient latera duorum cuborum quæsitorum. Rursus ducito maiorem numerum, tum in duplum minoris cubi multatum cubo maiore, tum in summam cuborum, fient reliquorum cuborum latera.

Ita si sumas numeros 5. & 4. fient cubi à lateribus 744. 756. æquales cubis à lateribus 945. & 15. Et diuidendo omnia latera per 3. erunt cubi à lateribus 248. & 252. æquales cubis à lateribus 315. & 5.

OBSERVATIO D. P. F.

HVius quæstionis determinationem non esse legitimam simili quâ vsi in primâ quæstione sumus operatione aperiemus.

Imo ex supradictis quæstionem quam Bachetus ignorauit, feliciter construemus, datum numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos diuidere, idque infinitis modis per operationum continuatam vt supra monuimus, operationem.

Sint duo cubi quibus alij duo æquales inueniendi 8. & 1. primum ex quæstione secunda quærantur duo cubi quorum differentia æquet summam datorum, eruntque $\frac{8000}{343}$ *&* $\frac{4913}{343}$ *Quia duplum minoris excedit maiorem, res deducitur ad tertiam quæstionem quæ demum reducetur ad primam & constabit propositio, si velis secundam solutionem rursus quæstio redibit ad secundam &c.*

Vt autem pateat quæstionis tertiæ determinationem non esse legitimam. datis duobus cubis 8. & 1. inueniendi alij duo quorum differentia æquet differentiam datorum. Sanè Bachetus impossibilem hanc quæstionem pronuntiaret, cubi tamen duo per nostram methodum inuenti sunt sequentes quorum nempe differentia æquatur 7. differentiæ 8. & 1. cubi autem illi duo, sunt $\frac{2024284625}{6128487}$ *&* $\frac{1981385216}{6128487}$. *latera ipsorum* $\frac{1265}{183}$. *&* $\frac{1256}{183}$.

QVÆSTIO QVARTA.

Inuenire duos numeros, vt summa cuborum ab ipsis ortorum, & productus eorum multiplicatione, datos conficiant numeros. Oportet autem vt à quadrato summæ cuborum, auferendo quadruplum cubi producti multiplicationis remaneat quadratus.

Esto summa cuborum 72. productus 8. Pone alterum cuborum 36 + 1 N. alterum 36 − 1 N. Quia igitur productus ex mutuo ductu duorum cuborum æquatur cubo plani sub lateribus, si ducas 36 + 1 N. in 36 − 1 N. fiet 1296 − 1 Q. æqualis 512. Ac proinde 1 N. est 28. suntque cubi quæsiti 64. & 8. & ipsa latera 4. & 2. Hinc fit Canon.

A quadrato semissis summæ cuborum aufer cubum producti, residui latus quadratum adde & adime semissis summæ cuborum, habebis cubos quæsitos.

Vel etiam.

A quadrato summæ cuborum aufer quadruplum cubi producti, residui latus quadratum adde & adime summæ cuborum, aggregati & residui semisses quæsitos exhibebunt cubos.

Vnde patet conditionem propositioni adiectam non omnino sufficere, vt solutio contingat rationalis. Sed oportet vt à quadrato summæ cuborum auferendo quadruplum cubi à producto, remaneat quadratus, cujus latus addendo & adimendo summæ cuborum, aggregati & residui semisses sint cubi numeri.

QVÆSTIO QVINTA.

Inuenire duos numeros, vt interuallum cuborum ab ipsis ortorum, & productus eorum multiplicatione datos conficiant numeros. Oportet autem vt quadrato interualli addendo quadruplum cubi producti, quadratus fiat.

Esto interuallum cuborum 56. productus 8 Ponatur alter cuborum 1 N. + 28. alter 1 N. − 28. Ergo productus eorum multiplicatione 1 Q. − 784. æquatur cubo ipsius 8. puta 512. & fit 1 N. 36. Sunt ergo cubi quæsiti 64. & 8. vt prius. Hinc fit Canon.

Quadrato semissis interualli cuborum adde cubum producti, summæ latus quadratum adde & adime semissis interualli cuborum, fient cubi quæsiti.

Vel etiam.

Quadrato interualli cuborum adde quadruplum cubi producti, summæ latus quadratum adde & adime interuallo cuborum, aggregati & residui semisses sunt cubi quæsiti.

Hic quoque conditio adiecta non sufficit, vt solutio sit omnino rationalis. Sed oportet vt quadrato interualli cuborum, addendo quadruplum cubi producti, fiat quadratus cuius latus addendo & adimendo interuallo cuborum, aggregati & residui semisses sint cubi numeri.

Porrò ex nonnullis harum quæstionum deducuntur Regulæ Algebræ de cubo affecto sub latere, vt abundè docuit Vieta noster libro de Recognitione æquationum.

QVÆSTIO III.

ΕΠΙ τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ πλευρὰν πολλαπλασιάσαι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὴν μὲν πλευρὰν κύβον, τὸν δὲ τετράγωνον πλευρὰν τοῦ κύβου. τετάχθω ὁ μὲν τετράγωνος δ^υ α. ἡ ἄρα πλευρὰ αὐτοῦ ἔσται ς° εἷς, ὁ πολλαπλασιαζόμενος ἀριθμὸς ὂν μ° κυβικῶν ὅσων δήποτε. ἔστω δὲ η. ^{α} ^{ς^χ}. ἐπὶ μὲν οὖν τὸν δ^υ α. πολλαπλασιάσαντες, εὑρίσκομεν ςς^{οὶ} η. ἐπὶ δὲ τὸν ς^ὸ α. πολλαπλασιάσαντες εὑρίσκομεν μ° η. θέλομεν δὴ τοὺς ςς^{οὶ} η. κυβικὴν εἶναι πλευρὰν τῶν μ° η. μονάδες ἄρα β ἴσαι ςς^{οῖς} η. * καὶ γίνεται ὁ ς° β. ὁ δὲ πολλαπλασιόζαμενος ς° λβ μ° λβ. ἐὰν δὲ θελήσωμεν μ° μὴ ἐπιτιθέναι, εὑρήσομεν ςς^{οὶ} η ἴσους μ° β. * καὶ γίνεται ὁ ς° α δ^χ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ἔσται ὁ μὲν τετράγωνος α ις^χ. ἡ δὲ πλευρὰ α δ^χ. ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος ὁ λβ. εἰ γὰρ ὁ ς° ἐστὶ α δ^χ. τὸ δὲ ἀριθμοστὸν ἐστὶ μ° δ. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN quadratum numerum, & in latus eius eundem multiplicare numerum, & facere ex latere quidem, cubum; ex quadrato autem, latus cubi. Ponatur quadratus 1 Q. Erit igitur latus illius 1 N. Qui in hos ducendus est, sit vnitatum cubicarum quotcunque per 1 N. diuisarum, esto $\frac{8}{1N}$. Hunc igitur ducentes in 1 Q. inueniemus 8. N. adducentes in 1 N. inueniemus 8. volumus itaque 8 N. esse latus cubicum de 8: Proinde 2. æquantur 8 N. & fit 1 N. $\frac{1}{4}$. Ad positiones. Erit quidem quadratus $\frac{1}{16}$. eius latus $\frac{1}{4}$. Qui in illos ducetur erit 32. Si enim 1 N. est $\frac{1}{4}$. vtique $\frac{1}{16}$. est 4. & demonstratio euidens.

IN QVAESTIONEM III.

QVÆSTIONIS huius tractationem non percepit Xilander, eò quod signum Numeri malè hîc insutum putauit, non videns numerum qui ducendus est in quadratum, & in eius latus non esse simpliciter vnitates 8. sed $\frac{8}{1N}$. Allucinatus autem est Xilander, & hîc & vbicunque ferè fractiones Numericas adhibuit Diophantus, quia (vt iam monuimus ad duodecimam tertij) huiusmodi fractiones in textu Græco passim ambiguè exprimuntur, vt ex hoc quoque loco colligere est. Nam legitur in manu exarato codice, ὁ πολλαπλασιαζόμενος μα. ς° τῶν κυβικῶν ὅσων δήποτε. ἔστω δὲ μμ η. quæ more nostro emendauimus sic, ὁ πολλαπλασιαζόμενος ἀριθμοστὸν μ° κυβικῶν ὅσων δήποτε. ἔστω δὲ η ^{α} ^{ς^χ}. Benè autem vidit idem Xilander, vt adulterina expungenda esse verba illa. καὶ γίνεται ὁ ς° β. ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος ς°. λβ. μ° λβ. ἐὰν δὲ θελήσωμεν μ° μὴ ἐπιτιθέναι, εὑρήσομεν ςς^{οὺς} μ° β. quæ idcirco asteriscis inclusimus. Cæterùm emendato textu, vt fecimus in nostra versione, operatio Diophanti facilis est & pespicua. Vnde huiusmodi Canon elicitur.

Sume quemlibet numerum, eumque diuide per suum cubum, orietur latus quæsiti quadrati. Numerus autem in vtrumque ducendus, est quadratocubus sumpti initio numeri.

Hîc etiam desiderari videtur huiusmodi quæstio.

In quadratum numerum & in latus eius, multiplicare eundem numerum, & facere ex quadrato cubum, ex latere latus eiusdem cubi.

Statuatur quadratus 1 Q. erit latus eius 1 N. Qui autem in hos ducitur, esto quilibet Numerorum numerus cubicus, puta 8 N. Eum si in 1 Q. ducas fient 8 C. si in 1 N. fient 8 Q. Debent ergo 8 Q. esse latus cubicum cubi 8 C. id autem est 2 N. Igitur 2 N. æquantur 8 Q. & fit 1. N. $\frac{1}{4}$. Ad positiones. Quadratus est $\frac{1}{16}$. latus eius $\frac{1}{4}$. Is qui in vtrumque ducitur 2. Hinc formatur huiusmodi Canon.

Sume quemlibet numerum, eumque diuide per suum cubum, orietur latus quadrati quæsiti. Numerus autem in vtrumque ducendus, est sumptus initio Numerus.

Simili artificio soluemus quæstiones sequentes.

QVÆSTIO PRIMA.

In cubum & in eius latus multiplicare eundem numerum, & facere ex cubo quadrato quadratum, ex latere latus quadrato quadrati.

Sit cubus 1 C. latus eius 1 N. Numerus in vtrumque ducendus sit vnitatum quotlibet, puta 2. Igitur 2 N. erunt latus quadrato quadraticum de 2 C. ac proinde 16 QQ. æquabuntur 2 C. & fiet 1 N. $\frac{1}{8}$. eruntque quæsiti numeri $\frac{1}{512}$. $\frac{1}{8}$. 2.

Et

Et sic inuenietur numerus qui ductus in quadrato quadratum, & in latus eius faciat ex quadrato quadrato quadratocubum, & ex latere latus quadratocubi. Ac demum inuenietur numerus qui ductus in quadratocubum & in latus eius, faciat ex quadratocubo cubocubum, & ex latere latus cubocubi. Vnde fit Canon vniuersalis.

Sume quemlibet numerum, eumque diuide per gradum ipsius, similem ei qui postulatur fieri, orietur latus quæsitæ potestatis. Numerus autem in vtrumque ducendus, erit sumptus numerus.

QVÆSTIO SECVNDA.

In cubum & in eius latus multiplicare eundem numerum, & facere ex latere quadratoquadratum, ex cubo latus quadratoquadrati.

Esto cubus 1 C. latus eius 1 N. Numerus autem in vtrumque ducendus sit fractio Numerica vnitatum quadratocubocubicarum, puta $\frac{256}{1\,N}$. fient ergo ex multiplicatione 256. Q. & 256. & ille huius esse debet latus quadratoquadraticum, quare 256. Q. æquantur 4. & fit 1 N. $\frac{1}{8}$ quæsitum latus, igitur cubus est $\frac{1}{512}$ Numerus in vtrumque ducendus 2048. sic quoque inuenietur Numerus qui ductus in quadratoquadratum & in latus eius, faciat ex latere quadratocubum, & ex quadratoquadrato latus quadratocubi. Ac denique reperietur numerus qui ductus in quadratocubum, & in latus eius, faciat ex latere cubocubum, & ex quadratocubo latus cubocubi.

QVÆSTIO IV.

QVADRATO & lateri eius eundem adiicere numerum, & eadem facere. Esto quadratus 1 Q. ergo latus erit 1 N. Addendus autem esto tot quadratorum, vt additus ad 1 Q. faciat quadratum, esto 3 Q. Is adiectus ad 1 Q. facit quadratum 4 Q. Additus autem ad 1 N. facit 3. Q. + 1 N. Hæc æquantur lateri quadrati 4 Q. hoc est 2 N. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$. Ad hypostases. Erit quadratus $\frac{1}{9}$. latus eius $\frac{1}{3}$ Addendus $\frac{3}{9}$.

Τετράγωνῳ καὶ πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ αὐτά. ἔστω ὁ μὲν τετράγωνος δυ α. ἡ ἄρα πλευρὰ ἔσται ςº α. ὁ δὲ προστιθέμενος ἔστω δυνάμεων τοσούτων, ἵνα μετὰ δυ α. ποιῇ τετράγωνον, ἔστω δυ γ. αὗται προστεθεῖσαι τῇ μὲν δυ α. ποιοῦσι τετράγωνον τὸν δυ δ. τῷ δὲ ςº α. ποιοῦσι δυ γ. ς α. ταῦτα ἴσα τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τῶν δυ δ. τουτέστι ςοῖς δυσί. καὶ γίνεται ὁ ς α γ^ον. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν τετράγωνος α θ^ον. ἡ δὲ πλευρὰ α γ^ον. ὁ δὲ προστιθέμενος γ θ^α.

IN QVAESTIONEM IV.

HIC ποιεῖν τὰ αὐτὰ nil aliud est quàm quadrato & lateri eius talem addere numerum, vt hac additione fiant rursus quadratus & latus eius. Cætera sunt perspicua, & ex operatione formatur huiusmodi Canon.

Duorum quorumlibet numerorum interuallum diuide per interuallum quadratorum, quotientem ducito in minorem numerum, fiet latus quæsiti quadrati. Eiusdem quotientis quadratum ducito in quadratorum interuallum, fiet addendus numerus.

QVÆSTIO V.

QVADRATO & lateri addere eundem numerum & eadem facere ordine inuerso. Esto quadratus 1 Q. latus ergo erit 1 N. Addendus autem vt ex latere quadratum faciat, esto aliquot quadratorum quadrato numero, cum defectu Numerorum qui sunt in latere prioris quadrati; esto itaque 4 Q. − 1 N. & si adiiciatur quadrato fit 5 Q. − 1 N. Hæc æquantur 2 N. lateri scilicet facti quadrati ex priori additione, & fit 1 N. $\frac{3}{5}$. Ad

Τετράγωνῳ καὶ πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ ἐναλλάξ. ἔστω ὁ τετράγωνος δυ α. ἡ ἄρα πλευρὰ ἔσται ς α. ὁ δὲ προστιθέμενος, ἵνα τὴν πλευρὰν ποιῇ τετράγωνον, δυνάμεων τετραγωνικῶν ⋔ ἀριθμῶν τῶν τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς. ἔστω δὲ δυ δ ⋔ ς α. καὶ ἐὰν προστεθῇ τῷ τετραγώνῳ, γίνεται δυ ε ⋔ ς α. ταῦτα ἴσα ςοῖς δυσὶ τῇ πλευρᾷ τοῦ τετραγώνου τοῦ γεγενημένου ἐκ τῆς προσθέσεως. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ ε^ων. ἐπὶ

τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν τετράγωνος θ κε^{ων}. ἡ δὲ πλευρὰ γ̄ ε^{ων}. ὁ δὲ προστιθέμενος κᾱ κε^{ων}.

positiones. Erit quadratus $\frac{9}{25}$. latus autem $\frac{3}{5}$. Addendus $\frac{21}{25}$.

IN QVAESTIONEM V.

TA ἐναλλὰξ idem est quod reciprocè, seu inuerso ordine, vult enim vt quadrato & lateri addendo eundem numerum, fiat ex latere quadratus, ex quadrato latus quadrati. Operatio euidens est, & ex ea elicitur iste Canon.

Sume quadratum aliquem, & per eum vnitate auctum, diuide latus eius vnitate auctum, orietur latus quæsiti quadrati. At quæsitum quadratum ducito in quadratum initio sumptum, & à producto aufer latus quæsiti quadrati, residuum erit addendus numerus.

QVÆSTIO VI.

ΚΥΒΩ καὶ τετραγώνῳ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν τετράγωνον, καὶ ποιεῖν τὰ αὐτά. ἔστω ὁ μὲν κύβος κύβου ᾱ. ὁ δὲ τετράγωνος δυνάμεων ὅσων δή ποτε τετραγωνικῶν. ἔστω δὲ δυ θ. καὶ ἐπεὶ θέλομεν τετράγωνόν τινα μετὰ δυ θ ποιεῖν τετράγωνον. ἐκτίθομαι δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ἐστι μο θ. ἔστω δὲ μο ᾱ καὶ μο θ. ἐὰν ἀφέλω ἀπὸ τῶν μο θ. τὴν μονάδα, καὶ τῶν λοιπῶν τὸ ἥμισυ ἐφ᾽ ἑαυτὸ πολλαπλασιάσω, ἕξω μο ις. ἅτινα προσλαβόντα τὸν θ ποιεῖ τετράγωνον, τάσσω οὖν τὸν προστιθέμενον τετράγωνον δυ ις. κἂν μὲν ταῖς δυ θ προστεθῇ, γίνεται τετράγωνος. ἐὰν δὲ τῷ κύβῳ ᾱ. γίνεται κύβος ᾱ. δυ ις ταῦτα ἴσα κύβῳ. ἔστω τοῖς κύβοις η. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις ζ^{ων}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν κύβος δϟϛ τμγ^{ων}. ὁ δὲ τετράγωνος βτδ μθ^{ων} ὁ δὲ προστιθέμενος αὐτοῖς τετράγωνος δϟϛ μθ^{ων}.

CVBO & quadrato adiicere eundem quadratum, & eadem facere. Esto cubus 1 C. Quadratus autem quotcunque quadratorum numero quadrato. Esto itaque 9 Q. Et quia volumus aliquem quadratum adiectis 9 Q facere quadratum, exponamus duos numeros quorum mutuo ductu fiat 9. puta 9. & 1. Si ergo aufero 1 de 9. & residui semissem in se duco habeo 16. qui adsumpto 9. facit quadratum. Pono igitur addendum quadratum 16 Q. Et sane si addatur ad 9 Q. facit quadratum. si autem adiiciatur ad 1 C. fit 1 C. + 16. Q. Hæc cubo æquantur. Esto 8 C. & fit 1 N. $\frac{16}{7}$. Ad positiones. Erit cubus $\frac{4096}{343}$. Quadratus $\frac{2304}{49}$. Addendus autem ipsis quadratus $\frac{4096}{49}$.

IN QVAESTIONEM VI.

MODVS quo hic inuenit Diophantus quadratum qui ad 9. additus quadratum efficiat, idem est prorsus cum Canone vltimo ad vndecimam secundi tradito. Cæterùm positiones quadrupliciter variari possunt.

Primò enim cubus quæsitus statui potest quilibet cuborum numerus cubicus, puta 1 C. 8 C. 27. C. &c.

Secundò quadratus quæsitus poni potest quilibet quadratorum numerus quadratus, puta 1 Q. 4 Q. 9 Q. &c.

Tertiò addendus quadratus etiam infinitis modis variari potest, nam verbi gratia in hypothesi Diophanti, per vndecimam secundi infiniti quadrati reperiri poterant, qui ad 9. additi facerent quadratum.

Denique vltima æquatio institui potest cum quolibet cuborum numero cubico maiore quàm cubus initio sumptus v. g. 1 C. + 16 Q. æquati possunt 8 C. 27. C. 64 C. vel cuilibet cuborum numero cubico maiori quàm 1.

QVÆSTIO VII.

ΚΥΒΩ καὶ τετραγώνῳ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν τετράγωνον καὶ ποιεῖν τὰ ἐναλλάξ. ἔστω ὁ μὲν κύβος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ τετράγωνος ὁ δεύτερος, ὁ δὲ προστιθέμενος αὐτοῖς τετράγωνος ὁ τρίτος καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν προστιθέμενον τε-

CVBO & quadrato addere eundem quadratum, & eadem facere ordine inuerso. Esto cubus , primus. Quadratus, secundus. Addendus autem quadratus, tertius. Et quia volo addendum qua-

dratum, nempe tertium, additũ quadrato, nempe secundo, facere cubum: faciat cubum nempe primum: Ita vt primus superet secundum, tertio, nimirum quadrato, cùm tertius quadratus sit. Iam quoscunque duos numeros exposuero, eorum quadrati adiecto duplo producti multiplicationis eorum, quadratum faciunt. Debeo ergo expositis duobus numeris ponere pro primo summam quadratorum (quia primus æqualis est duobus quadratis, quæsito, & addendo; qui sunt secundus & tertius) duplum autem producti multiplicationis, pro tertio. Atqui tertius debet esse quadratus, quare & duplum producti multiplicationis, quadratum esse oportet. Ponatur ergo alter 1 N. alter 2 N. vt duplum producti sit quadratus. Sumens igitur summam quadratorum, statuo primum 5 Q. Tertium verò duplum producti multiplicationis nempe 4 Q. vnde relinquitur secundus 1 Q. (quia is vnà cum tertio æquatur primo) superest vt primus sit cubus. Proinde 5 Q. æquantur 1 C. & fit 1 N. 5. Ad positiones. Erit cubus seu primus 125. Quadratus seu secundus 25. Addendus autem quadratus, seu tertius 100. & manifesta est demonstratio.

τετράγωνον τὸν τρίτον, τῷ τετραγώνῳ τῷ δευτέρῳ, ποιεῖν κύβον. ποιείτω κύβον τὸν πρῶτον, ὥστε ὁ πρῶτος ὑπερέχῃ τοῦ δευτέρου τῷ τρίτῳ, τουτέστι τετραγώνῳ. ὁ γὰρ τρίτος ἐστὶ τετράγωνος. οἵους δὲ ἂν ἐκθῶμαι δύο ἀριθμούς, οἱ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνοι προσλαβόντες τὸν δὶς ὑπ' αὐτῶν ποιοῦσι τετράγωνον. ὀφείλω οὖν ἐκθέμενος δύο ἀριθμούς, τοὺς μὲν ἀπ' αὐτῶν τάσσειν τὸν πρῶτον, ἐπεὶ ὁ πρῶτος τοῖς δυσὶ τετραγώνοις ἴσος ἐστὶ τῷ ζητουμένῳ καὶ τῷ προστιθεμένῳ τῷ τρίτῳ καὶ τῷ δευτέρῳ. τὸν δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν τὸν τρίτον, ἔστι δὲ ὁ τρίτος τετράγωνος. ὥστε καὶ ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ἐστὶ τετράγωνος. τετάχθω ὁ μὲν ς^ο α. ὁ δὲ ςς β. ἵνα ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ᾖ τετράγωνος. λαβὼν οὖν τοὺς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνους, τάσσω τὸν πρῶτον δυ ε. τὸν δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν τὸν τρίτον δυ δ. λοιπὸν ἄρα ἔσται τὸν δεύτερον εἶναι δυ α. μετὰ γὰρ τοῦ τρίτου ἴσος ἐστὶ τῷ πρώτῳ. λοιπόν ἐστι τὸν πρῶτον ποιεῖν κύβον. δυ ἄρα ε ἴσαι κυ ἑνί, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν κυ ὁ πρῶτος μο ρκε. ὁ δὲ τετράγωνος ὁ δεύτερος κε. ὁ δὲ προστιθέμενος τετράγωνος ὁ τρίτος μο ρ. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

IN QVAESTIONEM VII.

MAGNO artificio Diophantus suas ita instituit positiones, vt tandem æquatio procedat inter 5 Q. & 1 C. vnde sequitur primum numerum reperiri cubum, vt postulatur. Itemque summam secundi & tertij cubum conficere, quia scilicet fit æqualis primo. Superest igitur videre qua ratione reliquis propositi partibus satisfiat. Nimirum, quomodo secundus & tertius sit vterque quadratus, & simul additi sint æquales primo. Ac demum tertius ipse primo additus quadratum constituat. Hæc autem omnia necessariò euenire operando cum Diophanto, sic demonstrabimus.

A 2. B 4.
C 20. D 4. E 16.

Sumantur duo quilibet numeri A B. ita vt duplum producti eorum E sit quadratus numerus. Et summa quadratorum ab ipsis A B sit C. At numerus quo C superat E sit D. Dico si C ponatur primus D secundus E tertius satisfactum esse omnibus propositæ quæstionis partibus, illa excepta qua requiritur primum C esse cubum. Primò enim D E simul conficiunt C ex constructione. Quare si C fiat cubus, erit & summa ipsorum D E cubus, vt postulatur. Secundò E quadratus est ex constructione, nam suppono tales sumptos esse A B, vt duplum producti eorum E sit quadratus, tales autem numeri qui facilè inueniantur infrà docebo. Tertiò ipsum D esse quadratum constat ex quarta secundi porismatum. Nam ex summa quadratorum C. auferendo E duplum producti, superest D quadratus interualli laterum. Denique E additum ipsi C facere quadratum concluditur per quartam secundi Euclidis, quam ideo assumpsit Diophantus. Nam summa quadratorum C & duplum producti E simul faciunt quadratum summæ laterum. Quamobrem patet ex omni parte propositum, & restat tantùm, vt C cubo æquetur quod facilè fit supponendo ipsos C D E nota Q. insignitos esse, vt sint 20 Q. 4 Q. 16 Q. Tunc enim 20. Q. æquabuntur cuilibet cuborum numero cubico, puta 1. c. 8. c. &c. Inueniuntur autem facilè duo numeri qui bis inuicem ducti quadratum faciant, si sumpto semisse cuiuslibet quadrati, quærantur duo numeri, quorum mutuo ductu is fiat. Ita Diophantus sumpto 2. semisse quadrati 4. inuenit numeros 1 & 2. quorum mutuo ductu fit 2. Et nos in superiore diagrammate sumpto 8. semisse quadrati 16. inuenimus numeros 2. & 4. quorum mutuo ductu fit 8. Poteramus etiam sumere 1. & 8. & alios infinitos mutuo ductu producentes 8.

QVÆSTIO VIII.

ΕΣΤΩ κύβος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ τετράγωνος ὁ δεύτερος. ὁ δὲ προστιθέμενος τετράγωνος ὁ τρίτος. ἐπεὶ οὖν θέλω τὸν προστιθέμενον τετράγωνον προστεθέντα τῷ δευτέρῳ τουτέστι τετραγώνῳ ποιεῖν κύβον, ποιείτω τὸν πρῶτον. ἐπεὶ δὲ πάλιν θέλω τὸν πρῶτον συντεθέντα τῷ τρίτῳ ποιεῖν τετράγωνον. ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο τετραγώνους ὧν ἡ σύνθεσις μετὰ ἑνὸς αὐτῶν, ποιῇ τετράγωνον. διὰ τοῦτο δὲ καὶ οἱ δύο τετράγωνοι, ὅτε προστιθέμενος τῷ δευτέρῳ, καὶ ὁ δεύτερος ποιῶσι κύβον, τουτέστι τὸν πρῶτον. τετάχθωσαν οἱ δύο τετράγωνοι, ὁ μὲν πρῶτος δυ α. ὁ δὲ δεύτερος μο δ. καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν μετὰ ἑνὸς αὐτῶν γίνεται δ β μο δ. ἴσος τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς β ⸕ μο β. γίνεται ὁ τετράγωνος δυ δ μο δ λείψει ςς η. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν δ. ὁ δὲ ις. νῦν τάσσω τὸν μὲν προστιθέμενον αὐτοῖς τετράγωνον δυ ις. τὸν δὲ δεύτερον δυ δ. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται δυ κ. θέλομεν γὰρ συναμφοτέρῳ εἶναι αὐτὸν ἴσον. λοιπὸν δεῖ δυ κ ἴσας εἶναι κυ ἑνί, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο κ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος η. ὁ δὲ δεύτερος αχ ὁ δὲ προστιθέμενος ςυ. τοῦτο δὲ ἀπειραχῶς δείκνυται.

Esto cubus, primus: Quadratus, secundus: at adiiciendus quadratus, tertius. Quia igitur volo quadratum adiiciendum, additum secundo, hoc est quadrato facere cubum, faciat primum. Rursus itaque quia volo primum additum tertio, facere quadratum, id mihi oneris incumbit, vt inueniam duos quadratos, quorum summa cum altero ipsorum coniuncta quadratum exhibeat, & præterea duo quadrati addendus scilicet secundo, & ipse secundus simul faciant cubum, videlicet primum. Ponantur duo quadrati, primus quidem 1 Q. secundus 4. & summa ipsorum cum altero iuncta facit 2 Q. + 4. æqualem quadrato à latere 2 N − 2. fitque quadratus 4 Q. + 4 − 8 N. & fit 1 N. 4. Ad positiones. Erit alter 4. alter 16. Nunc ergo statuo quadratum addendum 16 Q. secundum autem 4 Q. Primus ergo erit 20. Q. quia volumus eum ambobus æqualem esse. Superest vt 20 Q. æquentur 1 C. & fit 1 N. 20. Ad positiones. Erit primus 8000. secundus 1600. tertius addendus 6400. & infinitis modis soluitur quæstio.

IN QVAESTIONEM VIII.

EADEM est hæc quæstio cum præcedente. Sed operatio paulò diuersa lemma quod assumit Diophantus ad inueniendum duos quadratos, quorum summa adscito altero ipsorum quadratum faciat, poterat reduci ad vndecimam secundi, si propositum fuisset hoc modo. Inuenire duos quadratos, quorum interuallum sit duplum alicuius quadrati. Hoc enim idem esse manifestum est: Quia cùm summæ quadratorum addetur alter, hoc aggregatum continebit additum bis, & alterum semel. Porrò ex operatione formatur huiusmodi Canon.

Sume duos quadratos quorum summa cum altero ipsorum quadratum faciat. Horum summa cubus est primus quæsitorum. Eiusdem summa quadratus ductus in sumptos quadratos, dat reliquos numeros.

QVÆSTIO IX.

ΚΥΒΩ καὶ τῇ πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν ἴσα αὐτά. ἔστω ὁ προστιθέμενος ςο α. ἡ δὲ τοῦ κύβου πλευρὰ ςς ὅσων δήποτε. ἔστω ςς β. ὁ ἄρα κύβος ἐστὶ κυ η. ἐὰν ἄρα ςο α προστεθῇ ςςοῖς β. γίνονται ςςοὶ γ. ἐὰν δὲ τοῖς κυ η. γίνονται κυ η. ςο α. ταῦτα ἴσα κυ κζ. ἀφῃρήσθωσαν οἱ κυ η. λοιποὶ ἄρα κυ ιθ. ἴσοι ςῷ ἑνί. πάντα παρὰ ςο δυ ἄρα ιθ. ἴσαι μο α. καὶ ἔστιν ἡ μία μονὰς τετράγωνος. εἰ δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν ιθ δυ ἦν τε-

CVBO & lateri eius eundem addere numerum, & eadem facere. Sit addendus numerus 1 N. latus verò cubi Numerorum quotlibet. Esto 2 N. Ergo cubus est 8 C. Iam si 1 N. addatur ad 2 N. fiunt 3 N. si ad 8 C. fit 8. C. + 1 N. hæc æquantur 27 C. Auferantur vtrinque 8 C. relinquuntur 19 C. æquales 1 N. Omnia per numerum diuidantur 19 Q. æquantur 1. & est vnitas quadratus & si 19. nu-

merus quadratorum quadratus esset, explicari æquatio posset. Sed 19 Q. proueniunt ab excessu quo 27 C. superant 8 C. & 27. C. est cubus à latere 3 N. At 8 C. est cubus a latere 2 N. Proinde 19 Q. facti sunt ex excessu quo cubus à 3 N. superat cubum à 2 N. Atqui 2 N. habentur ex positione, & 3 N. fiunt vnitate addita ad ipsos positionis numeros. Eò ergo res rediit, vt inueniantur duo numeri vnitate differentes, vt interuallum cuborum ab ipsis, sit quadratus numerus. Esto alter 1 N. alter 1 N. + 1. & interuallum cuborum est 3 Q. + 3 N. + 1. Hæc æquantur quadrato à latere 1 − 2 N. & fit 1 N. 7. Ad positiones. Erit alter 7. alter 8. Iam redeo ad postulata ab initio, & pono adiiciendum numerum 1 N. latus autem cubi 7 N. Igitur cubus erit 343 C. & si 1 N. vtrique adiiciatur, facit hunc quidem 8 N. illum verò 343 C. + 1 N. Volumus ergo hunc esse cubum, cujus latus sit 8 N. Quare 512 C. æquantur 343 C. + 1 N. & 1 N. $\frac{1}{13}$. Ad positiones. Erit cubus $\frac{343}{2197}$. latus autem $\frac{7}{13}$. Adiiciendus $\frac{1}{13}$.

τράγωνος λέλυτο ἂν ἡ ἰσότης. ἀλλ' αἱ δυ̅ ιθ̅. ἐκ τῆς ὑπεροχῆς εἰσιν ἧς ὑπερέχουσι κυ̅ κζ̅. κυ̅ η̅. καὶ οἱ μὲν κυ̅ κζ̅. ἀπὸ ςς̅ γ̅. κύβος εἰσίν. οἱ δὲ κυ̅ η̅ ἀπὸ ςς̅ β̅. κυ̅ ἐστί. ὥστε τὰ ιθ̅ γέγονεν ἐκ τῆς ὑπεροχῆς ἧς ὑπερέχει ὁ ἀπὸ ςς̅ γ̅ κύβος, τοῦ ἀπὸ ςς̅ β̅ κύβου. ἀλλ' οἱ μὲν ςςοὶ β̅. τῆς ὑποθέσεως εἰσίν, οἱ δὲ τρεῖς, ἀεὶ μονάδι μείζονες τοῦ τυχόντος πλήθους τῶν τεθέντων ςς. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν β̅ ἀριθμοὺς μονάδι α̅ ἀλλήλων ὑπερέχοντας, ἵνα ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ μὲν ςοῦ α̅. ὁ δὲ ςοῦ α̅. καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ἐστὶ δυ̅ γ̅. ςς̅ γ̅. μο̅ α̅. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ἀπὸ πλευρᾶς μο̅ α̅. λείψει ςς̅ β̅. καὶ γίνεται ὁ ςὸ μο̅ ζ̅. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ζ̅. ὁ δὲ η̅. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς. καὶ τάσσω τὸν μὲν προστιθέμενον ςς̅ α̅. τὴν δὲ τοῦ κύβου πλευρὰν ςςοὺς ζ̅. ὁ ἄρα κύβος ἔσται κυ̅ τμγ̅. καὶ ὁ ςὸ α̅. προστεθεὶς ἑκατέρῳ αὐτῶν ποιεῖ, ὃν μὲν ςς̅ η̅. ὃν δὲ κυ̅ τμγ̅. ςὸ α̅. θέλομεν οὖν ταῦτα εἶναι κύβον πλευρὰν ἔχοντα ςςοὺς η̅. κυ̅ ἄρα φιβ̅. ἴσοι κυ̅ τμγ̅. ἀριθμῷ α̅. καὶ γίνεται ὁ ςὸ α̅ ιγ̅. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν κυ̅ τμγ̅. ͵βρϞζ. ἡ δὲ πλευρὰ ζ̅. ιγ̅. ὁ δὲ προστιθέμενος α̅ ιγ̅.

IN QVAESTIONEM IX.

VERBA Diophanti perspicua sunt, & ad erudiendum aptissima. Cùm enim in prima operatione positionibus ad libitum factis, ad æquationem inexplicabilem deueniatur, vbi 19 Q. æquantur 1. & solutio est irrationalis, repetitis analyseos vestigiis considerat vnde 19. prouenerit, fit quippe ex interuallo cuborum 8. & 27. vnde rectè infert quærendos esse duos cubos quadrato distantes, ita vt & cuborum latera vnitate distent. Quod tamen lemma poterat etiam vniuersalius proponi, nimirum sic.

Duos cubos inuenire quorum interuallum sit quadratus Numerus, & quorum latera distent etiam quadrato numero.

Sit vnius latus 1 N. alterius 1 N. + 4. vt laterum interuallum sit quadratus numerus, erit cuborum interuallum 64 + 12 Q. + 48 N. quod æquatur quadrato. Fingatur eius latus 6 N − 8. fiet 1 N. 6. Erunt ergo cuborum latera 6. & 10. Ipsi cubi 216. & 1000. quorum interuallum 784. quadratus à latere 28. Huius autem lemmatis ope licebit etiam variare positionem numeri adiiciendi, nam poni poterit quilibet Numerorum numerus quadratus. Verbi gratia ponatur 4 N. Quærendi ergo erunt duo cubi, vt laterum interuallum sit 4. & cuborum interuallum sit quadratus numerus. Hi sunt per allatum lemma 6. & 10. Quare ponetur quæsiti cubi latus 6 N. ipse cubus 216 C. & vtrique adiiciendo 4 N. fient 10. N. & 216. C. + 4 N. quorum hic cubus esse debet, ille vero latus huius cubi. Igitur 216 C. + 4 N. æquantur 1000. C. & tandem 4 N. æquantur 784 C. & fit 1 N. $\frac{1}{14}$. Est igitur cubi quæsiti latus $\frac{3}{7}$ ipse cubus $\frac{27}{343}$. Adiiciendus verò numerus $\frac{2}{7}$ quo vtrique addito fiunt $\frac{5}{7}$ & $\frac{125}{343}$ Cubus scilicet & latus eius.

Cæterùm licebit etiam soluere huiusmodi quæstiones ad hanc materiam pertinentes.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi quadrato distent numero.

Sit data ratio dupla. Ponantur latera Cuborum 1 N. & 2 N. erunt cubi 1 C. & 8 C. quorum interuallum 7 C. æquatur quadrato. Esto is quilibet numerus Quadratorum quadratus, puta 49 Q.

fiet 1 N. 7. Sunt igitur latera cuborum 7. & 14. & satisfaciunt proposito.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi distent numero quadratoquadrato.

Sit data ratio dupla. Ponantur latera cuborum 1 N. & 2 N. Erunt cubi 1 C. & 8 C. quorum interuallum 7 C. æquatur quadratoquadrato. Esto is quilibet quadratoquadratorum numerus quadratoquadratus, puta 1 QQ. fit 1 N. 7. & sunt latera cuborum vt prius 7. & 14.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire duos cubos quadrato distantes, quorum latera distent cubo numero.

Sit vnius cubi latus 1 N. alterius verò 1 N. + quolibet cubocubo puta 1 N. + 64. erit cuborum interuallum 262144 + 12288 N. + 192 Q. æquale quadrato, fingatur eius latus 512. − 14 N. fiet quadratus 262144 − 14336 N. + 196 Q. & fiet 1 N. 6656. Sunt igitur cuborum latera 6656. & 6720. quorum interuallum est cubus 64. Sunt autem cubi 294876348416 & 303464448000. quorum interuallum 8588099584. quadratus est à latere 92672.

Eodem artificio inuenientur duo cubi quadrato distantes, quorum latera distent cubocubo, erunt enim iidem proximè inuenti. Similiter inuenientur duo cubi quadrato distantes, quorum latera distent quadratoquadrato, si ponatur vnius latus 1 N. alterius 1 N. + quolibet quadratoquadrato, puta 1 N. + 16. Ac demum inuenientur duo cubi quadrato distantes, quorum latera distent quadratocubo, si ponatur vnius latus 1 N. Alterius verò 1 N. + quolibet numero quadrato simul & quadratocubo, puta 1 N. + 1024.

QVÆSTIO QVARTA.

Inuenire duos cubos, quorum interuallum ad interuallum laterum sit in ratione quadrati ad quadratum. Interuallum autem laterum sit datus numerus.

Esto interuallum laterum 3. Ponatur vnum latus 1 N. alterum 1 N. + 3. erit cuborum interuallum 27. + 27 N. + 9 Q. quod cùm ad 3. debeat habere rationem quadrati ad quadratum, diuiso eo per 3. fiet 9 + 9 N. + 3 Q. æquandus quadrato. Fingatur eius latus 3 − 2 N. fiet 1 N. 21. Sunt ergo cuborum latera 21 & 24. & satisfit proposito.

Huius vltimæ quæstionis auxilio vniuersalius adhuc quàm per lemmata suprà tradita soluetur Diophantæum problema. Licebit enim adiiciendum numerum ponere quemlibet Numerorum numerum, puta 3 N. sed tunc quærendi erunt duo cubi, quorum interuallum ad interuallum laterum sit vt quadratus ad quadratum. Interuallum autem laterum sit 3. & reperientur qui suprà. Quare ponetur latus cubi 21 N. ipse cubus 9261 C. quibus si addas sigillatim 3 N. fient 24 N. & 9261 C. + 3 N. quorum ille istius latus cubicum esse debet. Quare 13824 C. æquantur 9261 C. + 3 N. & tandem 4563. C. æquantur 3 N. & fit 1 N. $\frac{1}{39}$. Est igitur latus cubi $\frac{21}{39}$ vt apud Diophantum, & adiiciendus numerus $\frac{3}{39}$. Et hîc aduertè inuentis semel duobus cubis, quorum interuallum ad laterum interuallum sit vt quadratus ad quadratum, si sumantur duo alij quicunque numeri in eadem cum lateribus ratione, interuallum quoque cuborum ab ipsis ortorum fore ad ipsorum numerorum interuallum vt quadratus ad quadratum. Ita quoniam 1000. & 216. interuallum 784. ad laterum 10. & 6. interuallum 4. est vt quadratus ad quadratum, si loco ipsorum 6. & 10. sumas 3. & 5. cuborum quoque 27. & 125. interuallum 98. ad laterum interuallum 2. est vt quadratus 49 ad quadratum 1. cuius rei demonstratio ex iis quæ ad sequentem ostendemus, liquidò constabit.

QVAESTIO X.

ΚΥΒΩ καὶ πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ς̄ᵒ καὶ ποιεῖν τὰ ἐναλλάξ. ἔστω ὁ μὲν κύβος κύβων κυβικῶν ὅσων δήποτε, ἔστω δὲ η̄ κυ. ἡ ἄρα πλευρὰ αὐτοῦ ἔσται ςς β̄. τετάχθω δὲ ὁ προστιθέμενος κύβων κυβικῶν ὅσων δήποτε λειψάντων τῆς τοῦ πρώτου κύβου πλευρᾶς ἔστω δὴ κυ κζ̄. λεῖψει ςς β̄. καὶ ἐπὶ μὲν τοῖς ςς οῖς β̄ προστεθῶσι, ποιοῦσι κυ κζ̄. καὶ ἔστιν ὁ κύβος ἀπὸ

CVBO & lateri eundem addere numerum, & eadem facere ordine inuerso. Esto cubus cuborum cubicorum quotlibet verbi gratia 8 C. Igitur latus erit 2 N. Ponatur autem adiiciendus, alius cuborum numerus cubicus, minus latere prioris cubi, esto itaque 27 C. − 2 N. & si addatur ad 2 N. fiunt 27 C. qui est

bus à latere 3 N. si autem addatur ad 8 C. fiunt 35. C. − 2 N. volumus autem hæc esse latus cubicum factorum 27 C. hoc est 3 N. Proinde 35 C. − 2 N. æquantur 3 N. & fiunt 5 N. æquales 35 C. & si omnia per numerum diuidantur 35 Q. æquantur 5. & non contingit solutio rationalis, propterea quod species ad speciem non habet rationem quam quadratus ad quadratum. Sed 35 Q. est summa duorum cuborum, ipsius 27. & ipsius 8. vnitates verò 5. est summa laterum ipsorum. Res itaque eò deducta est, vt inueniendi sint duo cubi, quorum summa ad summam laterum ipsorum rationem habeat quam quadratus ad quadratum. Sunto latera illorum coniuncta vnitatum quotlibet, verbi gratia 2. & ponatur prioris cubi latus 1 N. Igitur alterius latus erit 2 − 1 N. & cubi illorum iuncti faciunt 6 Q. + 8 − 12 N. volumus ergo hæc ad laterum summam, hoc est ad 2. habere rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum; Atqui 2. duplum est quadrati. Quare & 6 Q. + 8 − 12 N. duplum oportet esse quadrati. Semissis igitur, nempe 3 Q. + 4 − 6 N. æquatur quadrato. Esto quadrato à latere 2 − 4 N. & fit 1 N. $\frac{10}{13}$. Ad positiones. Erit alterũ latus $\frac{10}{13}$ alterum $\frac{16}{13}$. Tollo decimas tertias, & semisses ipsorum capio, fiunt cuborum latera 5. & 8. Venio ad propositum ab initio, & pono cubi latus 5 N. cubus ergo est 125 C. Addendum verò statuo cubum à latere 8 N. minus latere prioris cubi, nimirum 512 C. − 5 N. & additus quidem ad 5. N. facit cubum, additus verò ad 125 C. facit 637 C. − 5 N. Volumus ergo hæc esse latus cubicum de 512 C. Quare 8 N. æquantur 637 C. − 5 N. & fit 1 N. $\frac{1}{7}$. Ad positiones. Erit cubus $\frac{125}{343}$. latus verò $\frac{5}{7}$. At numerus adiiciendus $\frac{267}{343}$.

πλευρᾶς ςς ιγ. ἐὰν δὲ τοῖς κυ η. ποιοῦσι κυ λε. λείψει ςς β. θέλομεν δὴ ταῦτα πλευρὰν εἶναι κυβικὴν τῶν γενομένων κυ κζ. τουτέστι ςς γ. κυ ἄρα λε λείψει ςς β. ἴσοι ςς γ. καὶ γίνονται ςς ε. ἴσοι κυ λε. καὶ πάντα παρὰ ς. δυ ἄρα λε. ἴσαι μο ε. καὶ γίνεται ὁ ς οὐ ῥητὸς παρὰ τὸ μὴ τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀλλ᾽ αἱ μὲν δυ λε. σύνθεσίς εἰσι δύο κύβων τοῦ τε κζ. καὶ τοῦ η. αἱ δὲ μο ε. ἐκ τῆς συνθέσεως τῶν πλευρῶν αὐτῶν. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο κύβους οἳ συντεθέντες πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτῶν συντεθείσας λόγον ἕξουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἔστωσαν αἱ πλευραὶ αὐτῶν συντεθεῖσαι μονάδες ὅσαι δήποτε, ἔστωσαν δὲ β. καὶ τετάχθω ἡ μὲν τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ ς α. ἡ ἄρα τοῦ ἑτέρου ἔσται μο β λείψει ἀριθμοῦ α. καὶ οἱ αὐτῶν κύβοι συντιθέντες ποιοῦσι δυνάμεις ς μο η λείψει ςς ιβ. θέλομεν οὖν ταῦτα πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτῶν συντεθείσας, τουτέστι πρὸς μονάδας β λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ εἰσὶ δύο μονάδες διπλάσιαι τετραγώνου. ὥστε καὶ δυ ς μο η λείψει ςς ιβ. διπλάσιαι εἰσὶ τετραγώνου. τὸ ἄρα ἥμισυ αὐτῶν ἴσον τετραγώνῳ. τουτέστι δυ γ μο δ λείψει ςς ς. ἴσαι γίνονται τῷ ἀπὸ μο β ⋔ ςς δ. καὶ γίνεται ὁ ς ι ιγ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἡ μὲν ι ιγ. ἡ δὲ ις ιγ. αἴρω τὰ τρισκαιδέκατα, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῶν λαμβάνω, γίνονται τῶν κύβων αἱ πλευραί, ἡ μὲν ε. ἡ δὲ η. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὴν τοῦ κύβου πλευρὰν ςς ε. ὁ ἄρα κύβος ἔσται κυ ρκε. ὁ δὲ προστιθέμενος κύβος ἀπὸ τῶν η ςς λείψει τῆς πλευρᾶς τοῦ πρώτου κύβου. τουτέστι κυ φιβ λείψει ςς ε. καὶ προστεθεὶς ἀριθμοῖς ε ποιεῖ κύβον. τοῖς δὲ κυ ρκε. ποιεῖ κυ χλζ λείψει ςς ε. θέλομεν οὖν ταῦτα εἶναι πλευρὰν κυ φιβ. ἀριθμοὶ ἄρα η ἴσοι εἰσὶ κυ χλζ ⋔ ςς ε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α ζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν κύβος ρκε τμγ. ἡ δὲ πλευρὰ ε ζ. ὁ δὲ προστιθέμενος ἀριθμὸς σξζ τμγ.

IN QVAESTIONEM X.

IPSO initio Græca deprauatissima erant. Nam legebatur, κύβον καὶ πλευρὰν προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, pro quo reposui, κύβῳ καὶ πλευρᾷ, &c. Deinde legebatur, ἔστω ὁ μὲν κύβος μονάδων κυβικῶν ὅσων δήποτε, ἔστω δὲ η. pro quo reposui, κύβων κυβικῶν ὅσων δήποτε, ἔστω δὲ κυ η. Præterea deerant multa, quæ omnino flagitante sententia fuerunt adiicienda, quæ omnia more nostro virgulis inclusimus. Denique denominatores passim omissi erant quos restituimus.

Porrò manifestum est quæstionem pendere à lemmate quod assumit Diophantus, quo scilicet

quærit duos Cubos, quorum summa ad summam laterum sit vt quadratus ad quadratum. Quod quia sequenti quoque quæstioni inseruit, & multa sunt notatu digna in eius enodatione, pluribus à nobis explicabitur.

Aduerte igitur primò laterum summam poni potuisse non solùm 2. vt fecit Diophantus, sed & quemlibet vnitatum numerum, puta 3. 4. 5. &c.

Aduerte secundò summam cuborum 6 Q. + 8 − 12 N. diuidi per laterum summam 2. & quotientem 3 Q. + 4 − 6 N. æquari quadrato. Quia summa cuborum & summa laterum debent esse plani similes. At ex duorum planorum similium mutua multiplicatione vel diuisione quadratum fieri manifestum est.

Aduerte tertiò non potuisse fingi latus ipsius 3 Q. + 4 − 6 N. nisi vel quadratorum, vel vnitatum numerus quadratus fuisset; vt in simili iam sæpe docuimus. Quare videndum quomodo vnitatum numerus 4. inueniatur quadratus, ne casu non arte certa id fieri putetur. Proueniunt autem vnitates 4. ex cubo 8. diuiso per suum latus 2. Quamobrem cùm quolibet cubo per latus suum diuiso, oriatur quadratus ab eodem latere, patet vtique propositum.

Aduerte quartò cautè admodum formandum esse latus supradicti numeri 3 Q. + 4 − 6 N. Etenim cùm alterum laterum positum sit 2 − 1 N. patet valorem Numeri debere esse minorem quàm 2. fit autem valor Numeri, à quodam quadrato subtrahendo ternarium, & per residuum diuidendo quadruplum lateris multatum senario. Quare si ponatur huiusmodi quadratus 1 Q. patet $\frac{4 N. - 6}{1 Q. - 3}$ debere esse minus quàm 2. At proinde 4 N. − 6. minus sunt quàm 2. Q. − 6. & tandem 4 N. minore, esse debent quàm 2 Q. At si æquarentur fieret 1 N. 2. Igitur patet quæsiti quadrati latus maius esse debere quàm 2. Quare ipsius 3 Q. + 4 − 6 N. latus fingendum erit à 2 − quotlibet numeris, quorum multitudo sit maior quàm 2. sic Diophantus finxit hoc latus 2 − 4 N. & fingi posset 2 − 5 N. 2. − 6 N. &c.

Præterea cauendum est ne cuborum latera æqualia reperiantur, atque adeo ne ipsi cubi sint æquales, quamuis enim si hoc accidat, lemma propositum nihilominus soluatur, quia quilibet cubus ad suum latus rationem habet quadrati ad quadratum, cùm inter eos cadat medius proportionalis quadratus ab eodem latere, ac proinde duplum cubi ad duplum lateris sit in eadem ratione, attamen per huiusmodi æquales cubos quæstio proposita nequit commodè explicari, quoniam resoluendo hypostases numerus additius inuenitur nihilum. Quamobrem non temerè additum est in textu. *Ponatur adiiciendus alius cuborum numerus*, &c. Etenim ponatur verbi gratia cubus quæsitus 8 C. cuius latus 2 N. & ponatur addendus numerus 8 C. − 2 N. patet tandem æquationem procedere inter 16 C. & 4 N. seu inter 16 Q. & 4 vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$ per quem resoluendo hypostases fit cubus quæsitus 1. latus 1. Addendus verò numerus fit 1 − 1. id est nihil. Idemque semper eueniet, si in additio numero ponatur idem cuborum numerus qui ponitur pro cubo quæsito, vt facilè est demonstrare, quia hypostasis additij numeri est semper in hoc casu numerus ille cuborum cubicus, minus suo latere. Quare cùm ita operando cubus semper inueniatur 1. ac proinde latus 1. necesse est additicium numerum esse 1 − 1. Ne igitur in hoc absurdum deueniamus, cauendum est in lemmatis solutione ne quæsiti cubis æquales reperiantur, hoc est ne valor Numeri sit æqualis semissi summæ laterum, vt in hypothesi Diophanti vbi summa laterum ponitur 2. cauendum est ne valor Numeri sit 1. fit autem valor Numeri, vt iam ostensum est $\frac{4 N. - 6}{1 Q. - 3}$ hoc ergo non debet æquari vnitati, sed si ponatur æquari vnitati, fient 4 N. − 6. æquales 1 Q. − 3. & tandem 4 N. æquabuntur 1 Q. + 3. Qua æquatione resoluta fit 1 N. 3. Quamobrem ad vtramque cautionem simul respiciendo fingendum est latus quadrati 3 Q. + 4 − 6 N. à 2. − tot Numeris qui excedant 2. dum non sint 3.

Aduerte postremò cur Diophantus inuentis cuborum lateribus $\frac{10}{13}$ & $\frac{16}{13}$ adiiciat denominatorem, & sumat semisses Numeratorum, eam non esse causam quam affert Xilander, hæc enim ex parte nil aliud est quàm manifesta petitio principij; ex parte verò nescio quid ad rem prorsus impertinens. Nam quod loco ipsorum $\frac{10}{13}$ & $\frac{16}{13}$ sumantur semisses eorum, nempe $\frac{5}{13}$ & $\frac{8}{13}$ eam dicit esse causam quod oporteat eorum cubos æquari quadrato, quod sanè non facit ad rem, non enim quæruntur duo Numeri, quorum cubi simul æquentur quadrato, sed quorum cubi simul ad ipsorum numerorum summam sint in ratione quadrati ad quadratum. Deinde quòd adiecto communi denominatore, sumantur numeratores 5. & 8. eam reddit rationem quod denominator communis est, vt si de cubis numeratorum constet eos ad ipsorum numeratorum summam habere rationem quadrati ad quadratum, abundè sit rei satisfactum. Hoc verò est petere principium, cùm hoc vnum sit quod controuertitur, non enim ostendit cubos numeratorum ad laterum summam esse in ratione quadrati ad quadratum. Atqui certum est cubos ipsorum $\frac{5}{13}$ & $\frac{8}{13}$ ad vnitatem quæ est summa ipsorum, longe diuersam rationem habere, ea quam habent cubi numerorum 5. & 8. ad summam ipsorum 13. quamuis sit vtrobique ratio quadrati ad quadratum. Huius ergo rei causam adæquatam afferemus tale demonstrantes Theorema.

Si fuerint duo numeri, quorum cubi simul ad summam numerorum rationem habeant

beant quadrati ad quadratum, si sumantur alij duo numeri in eadem ratione, circa illos, ipsorumque cubos idem eueniet.

C 125.		A 5.	
D 512.		B 8.	
			R 2
F 637.	G 91.	E 13.	
			S 4.
L 1000.		H 10.	T 8.
M 4096.		K 16.	
P 5096.	Q 364.	N 16.	

Sint duo numeri A B. quorum cubi C D. & ipsorum C D summa esto F. ipsorum A B. summa esto E sintque F E plani similes, sumanturque H K in ratione ipsorum A B. & sint eorum cubi L M. quorum summa P. ipsorum verò H K summa esto N. Dico ipsos quoque P N. esse planos similes, sumatur R denominator rationis ipsorum H K. ad ipsos A B. ita vt ducto R in ipsos A B. fiant H K. & sit S quadratus ipsius R. & T. eiusdem cubus. Patet ergo ex cubo T in cubos C D. fieri etiam cubos L M. At quia ex R in A B. fiunt H K. ex eodem R in E summam ipsorum A B. fiet vtique N. summa ipsorum H K. Eademque de causa ex T in F. fiet P. Itaque quoniam F E ponuntur plani similes, [1] cadet inter eos vnus medius proportionalis, esto is G. quo ducto in S fiat Q. Igitur quia F G E sunt continuè proportionales, & ipsi quoque R S T. continuè proportionales sunt, & ex primo R. in primum F. fit P. At ex secundo S in secundum G fit Q. Ac demum ex tertio T in tertium E fit N, [2] erunt & ipsi P Q N. continuè proportionales. Quare cùm inter ipsos P. N. cadat vnius medius proportionalis Q, [3] sunt ipsi P N. plani similes. Quod demonstrandum erat.

[1] 18. octaui.
[2] 24.1. porism.
[3] 20. octaui.

Hinc patet cur loco ipsorum $\frac{10}{13}$ & $\frac{16}{13}$ sumantur 5. & 8. quia scilicet hi sunt in eadem ratione cum istis, quia fiunt ducendo vtrumque in 13. tum productos 10. & 16. diuidendo per 2. Hinc etiam constat demonstratio eius quod diximus ad quartam earum quas attulimus ad præcedentem, nimirum. *Si fuerint duo numeri quorum interuallum ad interuallum cuborum ab ipsis ortorum sit in ratione quadrati ad quadratum, idem eueniet aliis quibuscunque numeris in eadem ratione sumptis.* Nam eadem ratione ostendetur ex R in interuallum ipsorum A B fieri interuallum ipsorum H K. & ex T in interuallum cuborum C D. produci interuallum cuborum L M. & rursus ex S in medium proportionalem qui cadit inter interuallum cuborum C D. & interuallum laterum A B procreari medium proportionalem qui cadit inter interuallum cuborum L M. & interuallum laterum H K. Quamobrem eodem argumento concludetur propositum.

Porro loco lemmatis à Diophanto assumpti, licebat assumere aliud lemma simile illi quo vsus est ad præcedentem, nimirum.

Inuenire duos cubos, quorum summa sit quadratus numerus, & laterum summa sit etiam quadratus numerus.

Ponatur laterum summa 4. vt sit quadratus, & sit alterum 1 N. alterum 4 − 1 N. Erit summa cuborum 64. + 12 Q. − 48 N. æqualis quadrato, cuius latus fingetur 8 − tot Numeris vt fiat valor Numeri minor quàm 4. dum is non sit 2. ob causas suprà explicatas aduertendo quarto. Quare simili artificio determinando numerum hunc Numerorum in latere fictitio ponendum inueniemus eum maiorem esse debere quàm 4. dum non sit 6. Ponatur ergo latus fictitium 8 − 12 N. fiet quadratus 64 + 144 Q. − 192 N. æqualis 64 + 12 Q. − 48 N. & fit 1 N. $\frac{12}{11}$ Sunt igitur cuborum latera $\frac{12}{11}$ $\frac{32}{11}$ quorum summa 4. Ipsi verò cubi $\frac{1728}{1331}$ & $\frac{32768}{1331}$ quorum summa $\frac{3136}{121}$ quadratus à latere $\frac{56}{11}$. Itaque si libeat his vti cubis ad soluendum problema Diophantæum pones cubum quæsitum $\frac{1728}{1331}$ C. cuius latus $\frac{12}{11}$ N. addititius numerus erit $\frac{32768}{1331}$ C. − $\frac{12}{11}$ N. quem addendo lateri fit cubus $\frac{32768}{1331}$ C. & eum addendo cubo fit $\frac{3136}{121}$ C − $\frac{12}{11}$ N. æqualis $\frac{32}{11}$ N. Quare tandem $\frac{3136}{121}$ Q. æquantur 4. & fit 1 N. $\frac{11}{28}$. Est ergo latus cubi quæsiti $\frac{3}{7}$ ipse cubus $\frac{27}{343}$ Numerus addititius $\frac{365}{343}$ & constat.

Hic etiam possumus afferre nonnullas quæstiones ad instar earum quas ad præcedentem attulimus videlicet.

QVÆSTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi simul quadratum conficiant.

Esto data ratio tripla, sit vnus 1 N. alter 3 N. horum cubi simul conficiunt 28 C. quod æquatur quadrato. Sit is quilibet numerus quadratorum quadratus, puta 196 Q. fit 1 N. 7. Sunt ergo quæsiti numeri 7. & 21. quorum cubi 343. & 9261. quorum summa 9604. quadratus est à latere 98.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi simul quadrato quadratum conficiant.

Esto data ratio dupla, sit alter 1 N. alter 2 N. horum cubi simul conficiunt 9. C. æquales quadratoquadrato. Sit is quilibet quadratoquadratorum numerus quadratoquadratus puta 1 QQ. fit 1

N. 9. Sunt ergo quæſiti numeri 9. & 18. quorum cubi 729. & 5832. quorum ſumma 6561. quadrato-quadratus eſt à latere 9.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire duos numeros cubum ſimul conficientes, quorum cubi ſimul quadratum faciant.

Ponatur ſumma quæſitorum Numerorum numerus cubocubus, puta 64. & ſit alter 1 N. alter 64 − 1 N. horum cubi faciunt 262144 + 192 Q. − 12288 N. quod æquatur quadrato, cuius latus debet fingi 512. − tot Numeris, vt valor Numeri reperiatur minor quàm 64. Quare per artificium traditum aduertendo quarto, inuenietur hanc Numerorum multitudinem quæ ponenda eſt in latere fictitio, maiorem eſſe debere quàm 16. fingatur ergo huiuſmodi latus 512 − 18 N. fiet 1 N. $\frac{512}{11}$. Sunt igitur quæſiti numeri $\frac{512}{11}$ & $\frac{192}{11}$ quorum ſumma 64. At eorum cubi ſunt $\frac{134217728}{1331}$ $\frac{7077888}{1331}$ quorum ſumma $\frac{141295616}{1331}$ ſeu in minimis $\frac{12845056}{121}$ quadratus eſt à latere $\frac{3584}{11}$.

QVÆSTIO XI.

ΕΥΡΕΙΝ δύο κύβους ἴσους ταῖς ἰδίαις πλευραῖς. ἔστωσαν δὴ αἱ πλευραὶ τῶν κύβων ἐν ἀριθμοῖς. ἡ μὲν ἀριθμῶν β. ἡ δὲ ςς γ. οἱ ἄρα κύβοι συντεθέντες ποιήσουσι κυ λε ἴσους ταῖς πλευραῖς, τουτέστι ἀριθμοῖς ε. καὶ πάντα παρὰ ἀριθμόν. δυνάμεις ἄρα λε ἴσαι μο ε. καὶ γίνεται ὁ ς οὐ ῥητός. ἀλλ᾽ αἱ δυ λε σύνθεσίς εἰσι κύβων δύο, τοῦ τε η καὶ τοῦ κζ. οἱ δὲ ςςοὶ ε συντεθεισῶν τῶν πλευρῶν αὐτῶν. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν κύβους δύο οἳ συντεθέντες καὶ μερισθέντες εἰς τὰς πλευρὰς αὐτῶν ποιῶσι τὴν παραβολὴν τετράγωνον. τοῦτο δὲ προεδείχθη, καὶ εἰσὶν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων, ἡ μὲν ςς η. ἡ δὲ ςς ε. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὰς πλευρὰς τῶν κύβων, τὴν μὲν ςς η. τὴν δὲ ςς ε. καὶ οἱ κύβοι συντεθέντες γίνονται κυ χλζ. ταῦτα ἴσα ταῖς πλευραῖς τουτέστι ςςοῖς ιγ. καὶ γίνεται ὁ ς α ζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἡ μὲν τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ ε ζ. ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου η ζ. αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι, ὃς μὲν ρκε τμγ. ὃς δὲ φιβ τμγ.

INVENIRE duos cubos ſuis æquales lateribus. Statuantur cuborum latera in numeris, alterum 2 N. alterum 3 N. Ipſi ergo cubi coniuncti facient 35 C. æquales ſummæ laterum, hoc eſt 5. N. & omnia per numerum diuidantur. Igitur 35 Q. æquantur 5. Et non fit numerus rationalis. Atqui 35 Q. ſumma ſunt duorum cuborum 8. & 27. & 5. N. eſt ſumma laterum ipſorum. Itaque res eò rediit, vt inueniendi ſint duo cubi quorum ſumma per laterum ſummam diuiſa, quotientem faciat quadratum. Hoc autem iam oſtenſum eſt, & ſunt cuborum latera 8. & 5. Redeo igitur ad propoſitum ab initio, & pono latera cuborum 8 N. & 5 N. & fit ſumma cuborum 637 C. ſummæ laterum æqualis nimirum 13 N. & fit 1 N. $\frac{1}{7}$. Ad poſitiones. Erit prioris cubi latus $\frac{5}{7}$. alterius $\frac{8}{7}$. Ipſi vero cubi $\frac{125}{343}$. & $\frac{512}{343}$.

IN QVAESTIONEM XI.

OPERATIO Diophanti facilis eſt & perſpicua, & tota innititur lemmati ad præcedentem explicato. Cæterùm eodem ferè artificio ſoluemus huiuſmodi quæſtionem.

Inuenire duos cubos, quorum ſumma ad ſummam laterum ſit in data ratione, dummodo denominator rationis ſit quadratus, vel triens quadrati.

OBSERVATIO D. P. F.

EAdem addenda huic determinationi quæ in notis ſequentibus addidimus, & miror Bachetum non quod methodum generalem, quæ ſanè eſt difficilis, non viderit, ſed quod ſaltem non admonuerit lectores hanc quæ ab ipſo traditur, non eſſe generalem.

Sit primùm data ratio quadrupla, cuius denominator quadratus eſt. Ponatur vnum latus 1 N. alterum 2 N. erit ſumma cuborum 9 C. æqualis quadruplo ſummæ laterum, puta 12 N. & eſt ſolutio irrationalis, quia 9. ad 12. non habet rationem quadrati ad quadratum. Quærendi ergo prius

ſunt duo cubi, quorum ſumma ad quadruplum ſummæ laterum ſit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur ſumma laterum quilibet vnitatum Numerus, puta 6. & ſit vnum 1 N. alterum 6 − 1 N. erit ſumma cuborum 216 + 18 Q. − 108 N. quæ ad quadruplum ſummæ laterum, nimirum ad 24. debet habere rationem quadrati ad quadratum. Quare altera ſumma per alteram diuiſa, fiet 9 + $\frac{3}{4}$ Q. − $\frac{18}{4}$ N. æqualis quadrato, & omnia ducendo in 4. fiet 36 + 3 Q. − 18. N. æquandus quadrato. Et per artificium ad præcedentem explicatum inuenies fingendum latus 6 − tot numeris qui ſuperent 2. fingatur 6 − 5 N. fiet 1 N. $\frac{21}{11}$. Sunt ergo cuborum latera $\frac{21}{11}$ & $\frac{45}{11}$. & ſumendo minimos in eadem ratione, fient cuborum latera 7 & 15. Redeo igitur ad propoſitam initio quæſtionem, & pono quæſitorum latera cuborum 7 N. & 15 N. fit ſumma cuborum 3718 C. laterum 22 N. cuius quadruplum 88. N. æquatur 3718 C. & fit 1 N. $\frac{2}{13}$. Sunt ergo latera cuborum $\frac{14}{13}$ & $\frac{30}{13}$. & ſatisfaciunt propoſito.

Deinde ſit data ratio tripla, cuius denominator 3. eſt triens quadrati 9. erunt vt prius quærendi duo cubi, quorum ſumma ad triplum ſummæ laterum ſit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur latus vnius vt ſupra 1 N. alterius 6 − 1 N. igitur ſumma cuborum 18 Q. + 216 − 108. N. ad triplum ſummæ laterum 18. debet habere rationem quadrati ad quadratum, vnde altera ſumma per alteram diuiſa fit 1 Q + 12 − 6 N. æqualis quadrato cuius latus fingendum eſt 1 N. − tot vnitatibus, vt ſuperet 3 $\frac{2}{3}$ latus ipſius 12. ita tamen vt valor Numeri ſit minor quàm 6. Quare cùm per artificium ad præcedentem explicatum conſtet vnitates ponendas in latere fictitio debere eſſe minores quam $\frac{2}{3}$. Patet fingendum latus 1 N. tot vnitatibus, vt cadant inter 3 $\frac{2}{3}$ & 9. $\frac{2}{3}$. Fingatur 1 N. − 6. fiet quadratus 1 Q. + 36 − 12 N. æqualis 1 Q. + 12 − 6 N. & fit 1 N. 4. Sunt ergo latera cuborum 4. & 2. vel in minimis 2. & 1. Venio itaque ad initio propoſitam quæſtionem. Et pono latera cuborum 1 N. & 2 N. fiuntque 9 C. æquales 9 N. vnde fit 1 N. 1. & patet cubos 1. & 8. ſoluere quæſtionem. Quod ſi quadrati 1 Q + 12. − 6 N. fingas latus 1 N. − 8. fiet 1 N. $\frac{26}{5}$ & latera cuborum quorum ſumma ad triplum ſummæ laterum habet rationem quadrati ad quadratum, erunt in minimis 2 & 13. Quibus vtendo pones quæſitorum cuborum latera 2 N. & 13 N. vnde fient tandem 2205 C. æquales 45 N. & fiet 1 N. $\frac{1}{7}$ erunt ergo latera cuborum $\frac{2}{7}$ & $\frac{13}{7}$ quæ ſoluent quæſtionem.

QVÆSTIO XII.

INVENIRE duos cubos quorum interuallum æquale ſit interuallo laterum ipſorum. Sunto latera 2 N. & 3. N. & erit interuallum cuborum 19 C. Interuallum autem laterum 1 N. Igitur 1 N. æquatur 19 C. Et non eſt numerus rationalis, quia ſpecies ad ſpeciem non habet rationem quæ eſt quadrati ad quadratum. Eò itaque ſum redactus, vt inueniam duos cubos, vt ipſorum interuallum ad interuallum laterum rationem habeat quam habet quadratus ad quadratum. Sunto latera cuborum 1 N. & 1 N. + 1. vt & ipſorum interuallum ſit quadratus, nimirum 1. & quoniam vnum latus eſt 1 N. alterum 1 N. + 1. erit quidem laterum interuallum 1. cuborum vero 3 Q. + 3 N. + 1. Volumus ergo 3 Q. + 3 N. + 1. ad vnitatem, interuallum ſcilicet laterum, rationem habere quam habet quadratus ad quadratum. Igitur productum eorum multiplicatione oportet eſſe quadratum. Eſt autem hoc productum 3 Q. + 3 N. + 1. Hoc æquatur quadrato à latere 1 − 2 N. & fit 1 N. 7. Ad poſitiones. Sunt cubi 343. & 512. quorum latera 7. &

ΕΥΡΕΙΝ δύο κύβους ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἴση ἔσται τῇ τῶν πλευρῶν αὐτῶν ὑπεροχῇ. ἔστωσαν αἱ πλευραὶ αὐτῶν. ἡ μὲν ςς β ἡ δὲ ςς γ. καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων κυ ιθ. ἡ δὲ ὑπεροχὴ τῶν πλευρῶν ς α. ς ἄρα α. ἴσος κύβοις ιθ. καὶ γίνεται ὁ ς οὐ ῥητὸς παρὰ τὸ μὴ ἔχειν τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν β κύβους, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν πλευρῶν αὐτῶν λόγον ἔχῃ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων, ἡ μὲν ς α. ἡ δὲ ς α μο α. ἵνα καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ᾖ τετράγωνος τουτέστι μο α. καὶ ἐπεὶ ἐστὶ τοῦ μὲν πλευρὰ ς α. τοῦ δὲ ς α μο α. ἔσται ἄρα ἡ ὑπεροχὴ τῶν πλευρῶν μο α. τῶν δὲ κύβων δυ γ. ςς γ. μο α. θέλομεν οὖν δυ γ. ςς γ. μο α. πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν πλευρῶν λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τὸν ἄρα ὑπ' αὐτῶν δεῖ εἶναι τετράγωνον. ἔστι δὲ ὁ ὑπ' αὐτῶν δυ γ ςς γ μο α. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μο α λεῖψει ςς β. καὶ γίνεται ὁ ς μο ζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσονται οἱ κύβοι, ὃς μὲν τμγ. ὃς δὲ φιβ. ὧν αἱ πλευραὶ ἡ μὲν ζ. ἡ δὲ η. ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὰ

πλευρὰς τῶν κύβων, ἣν μὲν ς ζ. ἣν δὲ ς η. καὶ ἡ μὲν τούτων ὑπεροχὴ ἐστὶν ς α. ἡ δὲ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ὑπεροχὴ κ^υ ρξθ. κύβοι ἄρα ρξθ ἴσοι ς α. καὶ γίνεται ὁ ς α ιγ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσονται αἱ πλευραὶ τῶν κύβων ἡ μὲν ζ ιγ. ἡ δὲ η ιγ.

8. Venio ad id quod initio propositū erat, & pono latera cuborum 7 N.& 8 N.& est horum interuallum 1 N. At interuallum cuborum ab ipsis ortorum est 169 C. igitur 169. C. æquantur 1 N.& fit 1 N. $\frac{1}{13}$. Ad positiones. Erunt latera cuborum $\frac{7}{13}$ & $\frac{8}{13}$.

OBSERVATIO D. P. F.

VTrum verò inuenire liceat duo quadratoquadrata quorum interuallum æquale sit interuallo laterum ipsorum, de hoc inquiratur & tentetur artificium nostræ methodi, quod haud dubiè succedet.

Quærantur enim duo quadratoquadrata ita vt differentia laterum sit 1. & differentia quadratoquadratorum sit cubus. Erunt latera per primam operationem −$\frac{9}{22}$. & $\frac{13}{22}$. Sed quia primus numerus notatur signo − iteretur operatio iuxta nostram methodum & ponatur primum latus 1 N − $\frac{9}{22}$ secundum erit 1 N + $\frac{13}{22}$ & incidetur in nouam æquationem quæ in veris numeris quæstioni satisfaciet.

IN QVAESTIONEM XII.

LEMMA Diophanti est idem penitus cum quarta quæstione earum, quas ad nonam huius attulimus, quamuis vniuersalius operati simus ibi, quàm hîc faciat Diophantus, vult enim interuallum cuborum poni quadratum, cùm nos interuallum cuborum poni posse quemlibet numerum docuerimus. Itaque vide quæ ibi adnotauimus. Cæterùm, sicut ad præcedentem factum est, proponetur etiam hæc quæstio vniuersalius, nimirum sic.

Inuenire duos cubos, quorum interuallum ad interuallum laterum datam habeat rationem, dummodo denominator rationis sit quadratus vel triens quadrati.

OBSERVATIO D. P. F.

DEterminatio est illegitima, quia non generalis, addendum igitur, vel multiplus per numeros primos qui superant vnitate ternarij multiplices, aut ab ipsis compositos vt 7. 13. 19. 37. &c. vel 21. 91. &c. demonstratio & constructio ex nostra methodo petendæ.

Primùm sit data ratio quadrupla, cuius denominator 4. quadratus est. Hîc etiam eò redigimur, vt inueniamus duos cubos, quorum interuallum ad quadruplum interualli laterum sit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur vnius latus 1 N. alterius 1 N + 2. Erit cuborum interuallum 8. + 12 N. + 6 Q. laterum 2. cuius quadruplum 8. ad cuborum interuallum debet habere rationem quadrati ad quadratum. Proinde illo per hunc diuiso fiet 1 + $\frac{3}{2}$ N. + $\frac{3}{4}$ Q. æquandus quadrato, & omnia per 4. multiplicando, fit 4 + 6 N. + 3 Q. æquandus quadrato. Esto latus eius 2 − 3 N. fiet 1 N. 3. Sunt ergo cuborum latera 3. & 5. Venio ad propositam quæstionem, & pono quæsitorum cuborum latera 3 N. & 5 N. fit cuborum interuallum 98 C. æquale quadruplo interualli laterum 8 N. vnde fit 1 N. $\frac{2}{7}$ sunt ergo cuborum latera $\frac{6}{7}$ & $\frac{10}{7}$. quæ soluunt quæstionem.

Deinde sit data ratio tripla, cuius denominator 3. est triens quadrati 9. Sunt vt prius quærendi duo cubi, quorum interuallum ad triplum interualli laterum sit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur vnius latus 1 N. alterius 1 N. + 2. erit cuborum interuallum 6 Q. + 12 N. + 8. ad triplum interualli laterum, nimirum ad 6. in ratione quadrati ad quadratum, quare illo per hunc diuiso fiet 1 Q. + 2 N. + $\frac{4}{3}$ æquandus quadrato, & omnia per 9. multiplicando fiet 9 Q. + 18 N. + 12. æquandus quadrato, fingatur eius latus 3 N. − 4. fiet 1 N. $\frac{2}{21}$ Sunt ergo cuborum latera $\frac{2}{21}$ & $\frac{44}{21}$ seu in minimis 1. & 22. Redeo ergo ad propositam initio quæstionem, & pono quæsitorum cuborum latera 1 N. 22 N. cuborum interuallum est 10647 C. quod æquatur triplo interualli laterum, puta 63 N. & fit N. $\frac{1}{13}$ sunt latera cuborum $\frac{1}{13}$ & $\frac{22}{13}$. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO XIII.

INVENIRE duos numeros, vt maioris cubus adſcito minore numero, ſit æqualis cubo minoris adſciſcenti maiorem numerum. Eſto alter 2 N. alter 3 N. maioris cubus adſcito minore numero fit 27 C. + 2 N. At minoris cubus adſcito maiore numero facit 8 C. + 3 N. Igitur 8 C. + 3. N. æquantur 27 C. + 2 N. Omnia per numerum diuidantur, fiunt 19 Q. æquales 1 N. & non prouenit 1 N. rationalis. At 19 Q. ſunt interuallum duorum cuborum. Vnitas verò eſt laterum differentia. Eò itaque res rediit, vt inueniantur duo cubi, quorum interuallum ad interuallum laterum ipſorum ſit in ratione quadrati ad quadratum. Hoc autem ſupra demonſtratum eſt, & ſunt cuborum latera 7. & 8. Venio ergo ad id quod primò quærebatur, & pono alterum 7 N. alterum 8 N. fiunt 343. C. + 8 N. æquales 512. C. + 7 N. & fit 1. N. $\frac{1}{13}$. Ad poſitiones. Erit alter $\frac{7}{13}$. alter $\frac{8}{13}$. & demonſtratio euidens.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος κύβος προσλαβὼν τὸν ἐλάσσονα ἀριθμὸν, ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος κύβῳ προσλαβόντι τὸν μείζονα ἀριθμόν. ἔστω ὁ μὲν ςς β. ὁ δὲ ςς γ. καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος κύβος προσλαβὼν τὸν ἐλάσσονα ποιεῖ κυ κζ ςς β. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος κύβος προσλαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ κυ η ἀριθμοὺς γ. κύβοι ἄρα η ςς γ ἴσοι εἰσὶ κυ κζ. ςς β. καὶ πάντα παρὰ ς. καὶ γίνονται δυ ιθ ἴσαι μο α. καὶ ὁ ς οὐ ῥητός. ἀλλ' αἱ μὲν δυ ιθ εἰσὶ δύο κύβων ὑπεροχή. ἡ δὲ μο α τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἐστὶν ὑπεροχή. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο κύβους, ὧν ἡ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν πλευρῶν αὐτῶν ὑπεροχὴν λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τοῦτο δὲ προδέδεικται. καὶ εἰσὶν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων ἡ μὲν ζ. ἡ δὲ η. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω ὃν μὲν ςς η. ζ. ὃν δὲ ςς η. καὶ γίνεται κυ τμγ ςς η. ἴσοι κυ φιβ ςς ζ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α ιγ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ζ ιγ. ὁ δὲ η ιγ. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XIII.

OPERATIO Diophanti nil habet difficultatis. Verùm moneo abſque noua operatione poſſe ſolui quæſtionem hanc auxilio præcedentis, nam numeri quicunque præcedenti ſatisfacientes, hanc quoque ſoluunt, quod ſic demonſtro.

A $\frac{125}{343}$. B $\frac{27}{343}$. C $\frac{5}{7}$. D $\frac{3}{7}$.

Sint Numeri ſatisfacientes præcedenti, nimirum cubi A B. & eorum latera C D. ita vt cuborum A B interuallum ſit æquale interuallo laterum C D. Dico per eoſdem numeros huic quæſtioni ſatisfieri, nimirum maiorem cubum A adſciſcentem minus latus D, æquari minori cubo B. adſciſcenti maius latus C. Etenim ob æqualitatem interuallorum eſt in medietate Arithmetica A ad B. vt C ad D. [1] Quare extremorum A D ſumma æqualis eſt ſummæ mediorum B C. Quod erat propoſitum. 4. 1. poriſm.

Similiter per præcedentem ſoluetur adhuc huiuſmodi quæſtio.

Inuenire duos cubos, vt interuallum maioris cubi & maioris lateris, interuallo minoris cubi, & minoris lateris æquale ſit.

Sint enim iidem qui ſuprà numeri ſatisfacientes præcedenti, dico interuallum maioris cubi A & maioris lateris C. æquale eſſe interuallo minoris cubi B. & minoris lateris D. Quia enim eſt in medietate Arithmetica A ad B vt C ad D. [2] Erit & permutando A ad C vt B ad D. Quod demonſtrandum erat. 7. 1. poriſm.

Non aliter per vndecimam huius ſoluetur quæſtio ſequens.

Inuenire duos cubos, vt maior eodem interuallo ſuperet latus minoris, quo latus maioris ſuperat minorem cubum.

A $\frac{512}{343}$. B $\frac{8}{7}$. C $\frac{125}{343}$. D $\frac{5}{7}$.

Sit maior cubus A. & eius latus B. ſitque minor cubus C. & eius latus D. ſitque ſumma cuborum A C. æqualis ſummæ laterum B D. vt requirit vndecima. Dico eodem interuallo A ſuperare D. quo B ſuperat C. Quia enim extremorum A C ſumma ſummæ mediorum D B æqualis eſt, [1] eſt in medietate Arithmetica A ad D vt B ad C. Quod erat oſtendendum. 4. 1. poriſm.

QVAESTIO XIV.

ΕΥ̓ΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν, καὶ συναμφότερος, καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν μετὰ μο α. ποιῇ τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω μο α ἕξω πρῶτον. πλάσσω τινὰ τετράγωνον ἀπὸ ςς ὅσων δήποτε καὶ μο α. καὶ ἔστω ἀπὸ ἀριθμῶν γ μο α. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δυ θ ςς ς μο α. καὶ ἐὰν ἀφέλω τὴν μο α τάσσω τὸν πρῶτον δυ θ ςς ς. πάλιν ἐπεὶ θέλομεν τὸν πρῶτον καὶ τὸν δεύτερον μετὰ μο α ποιεῖν τετράγωνον. * ἀλλὰ συναμφότερος ὁ πρῶτος, καὶ ὁ δεύτερος μετὰ μο α καὶ δυ θ. ςς ς. * ὁ δὲ δεύτερος μετὰ μο α ἐστὶ τετράγωνος. γέγονέ μοι ζητῆσαι τίς τετράγωνος μετὰ δυ θ ςς ς. ποιεῖ τετράγωνον. ἐκτίθεμαι δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ἡ δυνάμεις θ ςςοὶ ς. καὶ εἰσὶ ςςοὶ θ μο ς καὶ ςὸ α. ὧν ὑπεροχὴ ςοὶ η μο ς. καὶ αὐτῆς τὸ ἥμισυ ςὸ δ μο γ. ταῦτα ἐφ᾽ ἑαυτὰ γίνεται δυνάμεις ις ἀριθμοὶ κδ μο θ. ἀφαιρῶ μο α. καὶ τάσσω τὸν δεύτερον δυ ις ςς κδ. μο η. ἔστι δὲ καὶ ὁ πρῶτος δυ θ ςς ς. καὶ ἑκάτερος καὶ συναμφότερος μετὰ μο α ποιεῖ τετράγωνον. λοιπόν ἐστι τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν μετὰ μο α ποιεῖν τετράγωνον. ἔστι ἄρα δυ ζ ςς ιη μονάδες θ ἴσος τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μονάδων γ λεῖψει ἀριθμῶν γ καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιη. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ὁ μὲν πρῶτος ͵γκδ. ὁ δὲ δεύτερος ͵εχκδ. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

INVENIRE duos numeros, vt alteruter, & amborum summa, sed & ipsorum interuallum addita vnitate quadratum faciat. Si vnitatem auferam ab aliquo quadrato, habebo primum. Formo quadratum aliquem a numeris quotlibet & vnitate, esto à 3 N. + 1. ipse erit 9 Q. + 6 N. + 1. & si inde auferam vnitatem, ponam primum 9 Q. + 6 N. Rursus quia volumus primum & secundum simul, addita vnitate facere quadratum; sed & secundum adscita vnitate esse quadratum, quærendum mihi obtigit quis quadratus coniunctus cum 9 Q. + 6 N. faciat quadratum. Expono duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 9 Q. + 6 N. & sunt 9. N. + 6. & 1 N. horum interuallum 8 N. + 6. cuius semissis 4 N. + 3. quo in se ducto fit 16 Q. + 24 N. + 9. Hinc aufero vnitatem, & pono secundum 16 Q. + 24 N. + 8. Est autem primus 9 Q. + 6 N. & alteruter, & vterque simul addita vnitate facit quadratum. Superest vt & interuallum ipsorum adscita vnitate faciat quadratum. Igitur 7 Q. + 18 N. + 9. æquantur quadrato à latere 3 − 3 N. & fit 1 N. 18. Ad positiones. Erit primus 3024. secundus 5624. & demonstratio manifesta.

IN QVAESTIONEM XIV.

VERBA illa asteriscis inclusa, ἀλλὰ συναμφότερος ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος μετὰ μο α καὶ δυ θ ςς ς. subreptitia sunt, & omnino reiicienda. Vt contrà fuerunt adiicienda illa quæ virgulis inclusa vides. Sic emendato textu nulla est hic difficultas. Ad inueniendum quadratum qui additus ad 9 Q. + 6 N. faciat quadratum, non recurrit ad duplicatam æqualitatem Diophantus, vt malè arbitratur Xilander, non enim sunt hîc duo numeri quadrato æquandi. Sed vtitur Canone vltimo vndecimæ secundi, cuius etiam vsus est in duplicata æqualitate ad reperiendum duos quadratos dato interuallo differentes. Diuersitas autem operationis, & solutionis à triplici capite oritur. Primò enim primus diuersimodè poni potest, nimirum quilibet quadratorum numerus quadratus + duplo lateri illius. Vt 9 Q. + 6 N. vel 4 Q + 4 N. vel 16 Q. + 8 N. &c. Secundò eodem manente primo, secundus variari potest in infinitum, quia verbi gratia in hypothesi Diophanti per vndecimam secundi, reperiri possunt infiniti quadrati diuersi, qui cum 9 Q. + 6 N. quadratum faciant, quorum singuli multati vnitate statui poterunt pro secundo. Denique in fingendo latere quadrati qui numerorum interuallo æquetur, mira contingere potest varietas. Nam verbi gratia in hypothesi Diophanti quadrati 7 Q. + 18 N. + 9. latus fingi potest à 3 − quolibet Numerorum numero, cuius quadratus superet 7.

Non est etiam dissimulandum quæstionem hanc ad quemlibet quadratum extendi, ac proinde vniuersalius proponi posse hoc pacto.

Quærantur duo numeri, quorum summa, ipsorum vterque, sed & interuallum

ipſorum addito dato quadrato, quadratum faciant.

Eſto datus quadratus 4.

Si auferam 4. ab aliquo quadrato habebo primum. Formo quadratum à Numeris quotlibet + 2. latere dati quadrati. Eſto à 3 N. + 2. ipſi erit 9 Q. + 12 N. + 4. hinc auferendo 4. ſtatuo primum 9 Q. + 12 N. Iam vt habeam ſecundum, quæram quis quadratus adſumpto 9 Q. + 12 N. faciat quadratum. Expono duos numeros quorum mutuo ductu fiat 9 Q. + 12 N. hi ſunt 9 N. + 12. & 1 N. horum interualli ſemiſſis eſt 4 N. + 6. cuius quadratus 16 Q. + 48 N. + 36. vnde ſi auferam 4. reſtabit pro ſecundo numero 16 Q. + 48 N. + 32. Primus autem eſt 9. Q. + 12 N. Et hi tribus poſtulati partibus ſatisfaciunt, nam & alteruter, & vtriuſque ſumma adſumpto 4. quadratum facit. Reſtat vt & eorum interuallum adiecto 4. quadratum faciat, facit autem 7 Q. + 36 N. + 36 Hoc ergo æquatur quadrato, cuius latus fingo 6 − 3 N. & fit 1 N. 36. ſunt igitur quæſiti numeri 12096. & 22496. qui ſoluunt quæſtionem, nam vtrique ſigillatim addendo 4. fiunt quadrati 12100, & 22500. quorum latera 110. & 150. At ſi ſummæ amborum, & interuallo eorundem addatur rurſus 4. fiunt quadrati 34596. & 10404. quorum latera 186 & 102.

QVÆSTIO XV.

INVENIRE tres numeros quadratos, qui coniuncti æquales ſint interuallis ipſorum coniunctis. Quoniam differentia maximi & medij, & differentia medij & minimi, & differentia maximi & minimi, ſimul iunctæ tribus numeris æquantur, at tres differentiæ ſunt duplum differentiæ maximi & minimi. Ergo duplũ differentiæ maximi & minimi æquatur tribus numeris. Ponatur minimus quadratus 1. maximus 1 Q. + 2 N. + 1. iam duplum interualli maximi & minimi eſt 2 Q. + 4 N. Ergo tres quadrati ſimul ſunt 2 Q. + 4 N. quorum duo cùm ſint 1 Q. + 2 N. + 2. relinquitur vtique medius 1 Q. + 2 N. − 2 Oportet igitur hæc æquari quadrato. Eſto quadrato à latere 1 N. − 4. & fit 1 N. $\frac{9}{5}$. Ad poſitiones. Erit maximus $\frac{196}{25}$. medius $\frac{121}{25}$. minimus 1. & omnia per 25. erit maximus 196. medius 121. minimus 25.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς τετραγώνους οἳ συντεθέντες ἴσοι ἔσονται ταῖς ὑπεροχαῖς αὐτῶν συντεθείσαις. ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ μέσου, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, καὶ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἴση ἐστὶ τοῖς τρισὶν, ἀλλ᾽ αἱ τῶν τριῶν ὑπεροχαὶ δίς ἐστι ἡ τοῦ μεγίστου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου ὑπεροχὴ, δὶς ἄρα ἡ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τοῖς τρισί. τετάχθω ὁ ἐλάσσων τετράγωνος μ° ᾱ. ὁ δὲ μέγιστος δ^υ ᾱ ςς β̄ μ° ᾱ. καὶ δὶς ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐστὶ δ^υ β̄ ςς δ̄. εἰσὶ ἄρα οἱ τρεῖς τετράγωνοι δ^υ β̄ ςς δ̄. ὧν οἱ δύο εἰσὶ δ^υ ᾱ ςς β̄ μ° β̄. λοιπὸς ἄρα ὁ μέσος ἔσται δ^υ ᾱ ςς β̄ ⋔ μ° β̄. δεῖ ἄρα ταῦτα ἴσα εἶναι τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς^ῶ ᾱ ⋔ μ° δ̄. καὶ γίνεται ὁ ς° μ° θ^{ε}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν μέγιστος ρϟς^{κε}. ὁ δὲ μέσος ρκα^{κε}. ὁ δὲ ἐλάχιστος μ° ᾱ. καὶ πάντα κε. ἔσται ὁ μὲν μέγιστος ρϟς. ὁ δὲ μέσος ρκα. ὁ δὲ ἐλάχιστος κε.

IN QVAESTIONEM XV.

TEXTV reſtituto, vt nos fecimus, non magna eſt hîc difficultas. Aduertendum tamen quod nec attigit Diophantus, nec vidit Xilander in fingendo latere quadrati 1 Q. + 2 N. − 2 aliquam adhibendam eſſe cautionem. Cùm enim tres inæquales numeri quærantur, oportet vtique medium maiorem eſſe minimo. At minimus poſitus eſt 1. medius 1 Q. + 2 N. − 2. Oportet igitur talem inueniri valorem Numeri, vt per eum reſoluendo hypoſtaſes 1 Q. + 2 N. − 2. ſit plus quàm 1. Hoc autem vt fiat, oportet 1 Q. + 2 N. excedere ternarium, & hoc etiam vt contingat, oportet valorem Numeri excedere vnitatem, vt manifeſtum eſt. Porrò fit valor Numeri à quodam quadrato binario aucto, & diuiſo per duplum ſui lateris binario auctum. Quare ſi ponatur huiuſmodi quadratus 1 Q. fiet valor Numeri $\frac{1 Q. + 2}{2 N. + 2}$. Hoc ergo cùm maius eſſe oporteat vnitate, erit & 1 Q. + 2. maior quàm 2 N. + 2. & tandem 1 Q. maior erit quàm 2. N. vnde conſtat vnitates in latere fictitio ponendas plures eſſe debere quàm 2. Ita Diophantus finxit huiuſmodi latus 1 N. − 4. Poterat etiam poni 1 N. − 3. vel 1 N. − 5. &c. Sed ſi ponas 1 N. − 1. vel 1 N. − 2. incides vtique in aliquod abſurdum.

Aduertendum præterea minimum quæſitorum, non ſolùm poni poſſe 1. ſed & alium quemlibet quadratum, puta 8. 9. 25. &c. Sed tunc maximi latus ponetur certus Numerorum numerus +

latere eiusdem quadrati, qui pro minimo positus erit. Et tandem in fingendo latere quadrati qui pro medio statuetur, adhibenda erit eadem cautio, de qua supra est actum, erit enim necesse vt per valorem Numeri resoluendo hypostases, medius inueniatur maior minimo.

Denique communi denominatore abiecto, solos numeratores retinet Diophantus, quia hi æquè bene soluunt quæstionem. Cuius rei ratio est, quod in fractionibus eiusdem denominationis, tam summa quàm interuallum penes solos Numeratores consideratur, vnde ad hoc vt trium fractionum eiusdem denominationis summa æqualis sit ipsarum interuallis, necesse est prius Numeratorum summam, ipsorum interuallis æquari. Sed & vniuersaliter verissimum est. Quamcunque rationem trium Numerorum summa habeat ad ipsorum interualla, eandem habere, summam trium aliorum in eadem ratione sumptorum, ad ipsorum interualla, vt facile est demonstrare. Sed hoc tyronibus exercitationis gratia relinquatur.

QVÆSTIO XVI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως δύο ὁποιοιοῦν συντεθέντες καὶ ἐπὶ τὸν λοιπὸν πολλαπλασιασθέντες ποιῶσι τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. ἐπιτετάχθω δὴ συναμφότερον τὸν πρῶτον, καὶ τὸν δεύτερον ἐπὶ τὸν τρίτον πολλαπλασιασθέντα ποιεῖν μο λε. συναμφότερον δὲ τὸν δεύτερον, καὶ τὸν τρίτον ἐπὶ τὸν πρῶτον πολλαπλασιασθέντα ποιεῖν μο κζ. καὶ ἔτι συναμφότερον τὸν πρῶτον, καὶ τὸν τρίτον πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὸν δεύτερον ποιεῖν μο λβ. τετάχθω ὁ τρίτος ϛ α. λοιπὸν ἄρα ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος λε ϛ^{οῦ}. ἔστω ὁ πρῶτος ι ϛ^{οῦ}. ὁ δεύτερος ἄρα ἔσται κε ϛ^{οῦ}. καὶ λοιπόν ἐστι δύο ἐπιτάγματα τὸ συναμφότερον τὸν δεύτερον, καὶ τὸν τρίτον ἐπὶ τὸν πρῶτον ποιεῖν μο κζ. τό τε συναμφότερον τὸν τρίτον, καὶ τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν δεύτερον ποιεῖν μο λβ ἀλλ' ὁ δεύτερος, καὶ ὁ τρίτος ἐπὶ τὸν πρῶτον ποιεῖ μο ι καὶ σν δυ^{οῦ}. μονάδες ἄρα ι μο σν δυ^{οῦ} ἴσαι μο κζ. ὁ δὲ τρίτος καὶ ὁ πρῶτος ἐπὶ τὸν δεύτερον ποιεῖ μο κε καὶ σν δυ^{οῦ}. μονάδες ἄρα κε μο σν δυ^{οῦ} ἴσαι μο λβ. καὶ μο καὶ σν δυ^{οῦ} ἴσαι μο κζ. καὶ ὑπερέχουσιν αἱ μονάδες τὰς μονάδας μο ε. ὡς εἰ καὶ αἱ μο κε. καὶ σν δυ^{οῦ} ὑπερεῖχον μο ε. ἦν ἂν ἴση ἡ ὑπεροχή. ἀλλὰ μο κε ἐκ τοῦ δευτέρου εἰσίν, αἱ δὲ μο ι ἐκ τοῦ πρώτου εἰσί. θέλομεν οὖν τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι μο ε. αὐτοὶ δὲ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος οὐκ εἰσὶ τυχόντες, ἀλλὰ συναμφότερος μο λε. γέγονεν οὖν μοι τὸν λε διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ἵνα ὁ ἕτερος τοῦ ἑτέρου ὑπερέχῃ μο ε. καὶ ἔστιν ὁ μὲν ιε. ὁ δὲ κ. τάσσω τὸν μὲν πρῶτον ιε ϛ^{οῦ}. τὸν δὲ δεύτερον κ ϛ^{οῦ}. καὶ συναμφότερος ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος ἐπὶ τὸν πρῶτον ποιεῖ μο ιε καὶ τ δυ^{οῦ} ἴσας μο κζ. συναμφότερος δὲ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος ἐπὶ δεύτερον ποιεῖ μο κ καὶ τ δυ^{οῦ}. ἴσας μο λβ. καὶ ἐπεὶ μο ιε καὶ τ δυ^{οῦ}. ἴσωσα μο κζ. γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο γ. ὁ δὲ δεύτερος μο δ. ὁ δὲ τρίτος μο ε.

INVENIRE tres numeros, quorum bini quilibet coniuncti, & in reliquum ducti, faciant datos numeros. Imperetur vt summa primi & secundi in tertium ducta faciat 35. summa secundi & tertij in primum ducta faciat 27. At summa primi & tertij in secundum faciat 32. Ponatur tertius 1 N. Ergo primus & secundus simul erunt $\frac{35}{N}$. Esto primus $\frac{10}{N}$. secundus igitur erit $\frac{25}{N}$. duo adhuc postulata restant implenda, nimirum vt secundus & tertius simul in primum ducti faciant 27. & vt tertius & primus simul in secundum faciant 32. sed secundus & tertius in primum faciunt 10 + $\frac{250}{Q}$. Proinde 10 + $\frac{250}{Q}$ æquantur 27. At tertius & primus in secundum faciunt 25. + $\frac{250}{Q}$. Proinde 25 + $\frac{250}{Q}$ æquantur 32. sed vt ostensum est, etiam 10 + $\frac{250}{Q}$ æquantur 27. & excessus vnitatum super vnitates est 5. vt si etiam 25. + $\frac{250}{Q}$ vltra 10 + $\frac{250}{Q}$ habuissent 5. æqualia vtique fuissent interualla. Sed 25. vnitates à secundo sunt, & vnitate 10. à primo. Volumus ergo harum interuallum esse 5. Ipsi autem primus & secundus non sunt quiuis, sed coniuncti faciunt 35. vsu venit ergo mihi vt 35. diuidam in duos numeros, quorum differentia sit 5. & est alter 15. alter 20. Pono ergo primum $\frac{15}{N}$. secundum $\frac{20}{N}$. & summa secundi & tertij in primum ducta facit 15 + $\frac{300}{Q}$ æqualia 27. At summa primi & tertij in secundum facit 20 + $\frac{300}{Q}$. æqualia 32. & si 15 + $\frac{300}{Q}$ æquem 27. fit 1 N. 5. Ad positiones, erit primus 3. secundus 4. tertius 5.

IN.

IN QVAESTIONEM XVI.

TEXTVS alio morbo non laborat, nisi quod fractiones Numericæ & Quadraticæ ambiguè exprimuntur, vt iam semel atque iterum monuimus passim in hoc codice contingere. Sed ex nostra versione omnis tollitur ambiguitas. Operatio artificiosa est, quam etsi totam ita tradat Xilander, veram tamen eius causam, & æquationis resoluendæ rationem non intellexit, ait enim abiici debere vtrimque 300. & comparandos inuicem antecedentes 15. & 20. itemque consequentes 27. & 32. quorum idem interuallum 5. valor Numeri. In quo turpiter errat, si existimat idcirco 5. esse valorem Numeri. Quod fiet manifestum si statuas secundum vel tertium 1 N. quod fieri posse docebimus infrà. Tunc enim simili prorsus logismo inuenies valorem Numeri longè diuersum ab interuallo similium antecedentium & consequentium. Itaque resoluitur æquatio via ordinaria. Comparando verbi gratia 15 Q. + 300. cum 27 Q. auferendo scilicet vtrimque 15 Q. vnde tandem 12 Q. manent æquales 300. & fit 1 Q. 25. ac proinde 1 N. 5. similiter æquando 20 Q. + 300. & 32 Q. auferendo scilicet vtrimque 20 Q. manent vt prius 12 Q. æquales 300. vnde fit rursus idem valor Numeri 5. Cùm autem vtraque æqualitas necessariò inferatur, necesse est vtique eundem vtrobique reperiri valorem Numeri, in quo totum artificium Diophanti consistit. Si enim auferendo 15 Q. à 27 Q. idem supersit quod superest auferendo 20 Q. à 32 Q. sumus in vado, nam illud residuum vtrobique æquabitur eidem numero 300. Id autem continget si inter 15. & 20. idem sit interuallum quod inter 27. & 32. Nam datis quatuor Numeris 15. 20. 27. 32. ita vt inter 15. & 20. primum & secundum idem sit interuallum, quod inter 27. & 32. tertium & quartum, [1] erit & permutando idem interuallum, inter 15. & 27. primum & tertium, quod inter 20. & 32. secundum & quartum. Quod est intentum. Hinc patet vera & germana causa totius operationis Diophanti, & cur cogatur diuidere 35. in partes 15. & 20. eodem distantes interuallo, quo distant 27. & 32. 7. 1. porisͦ.

Cæterùm, vt jam monui, tripliciter variari potest operatio, quia 1 N. pro quolibet trium quæsitorum numerorum statui potest, quod in tyronum gratiam non pigebit vno exemplo confirmare. Ponatur secundus 1 N. erunt igitur primus & tertius simul $\frac{32}{1N}$. Iam vt inueniantur primus & tertius separati, & duplicata æqualitas ritè procedat, oportet diuidere $\frac{32}{1N}$ in duas partes, seruantes idem interuallum quod est inter 35. & 27. nimirum 8. id fiet per primam primi. Erit ergo primus $\frac{12}{1N}$ tertius $\frac{20}{1N}$. Itaque ducendo primum & secundum simul in tertium fit 20 + $\frac{240}{1Q}$ æqualis 35. Et rursus ducendo secundum & tertium simul in primum, fit 12 + $\frac{240}{1Q}$ æqualis 27. & omnia ducendo in 1 Q. fit hinc quidem 20 Q. + 240. æqualis 35 Q. Inde verò 12 Q. + 240. æqualis 27 Q. & vtraque æquatione resoluta fit vtrobique 1 Q. 16. ac proinde 1 N. 4. sunt igitur quæsiti numeri qui prius 3. 4. 5. Hinc error Xilandri manifestè deprehenditur. Nam si vt ipse argumentatur abiicias vtrimque 240. & comparando antecedentes 20. & 12. itemque consequentes 35. & 27. quorum interuallum idem 8. Inde colligas valorem Numeri esse 8. vides quantum aberres à veritate.

Porrò vt solutio sit rationalis, oportet, vt vno datorum numerorum diuiso in duas partes, quarum idem sit interuallum, quod est inter duos reliquos numeros, planus sub dictis partibus comprehensus habeat rationem quadrati ad quadratum, ad interuallum quo maior dictarum partium superat minorem ex duobus reliquis numeris, vel quo minor pars superatur à maiore duorum reliquorum numerorum.

QVÆSTIO XVII.

INVENIRE tres numeros æquales quadrato, ita vt quadratus cujuslibet ipsorum adscito sequente numero faciat quadratum. Ponatur medius, Numerorum quotlibet, ac sit 4 N. & quia volo quadratum primi adscito secundo facere quadratum, eò res redit vt inueniam quis quadratus adiectis 4 N. faciat quadratum. Quæro duos numeros quorum mutuo, ductu fiat 4 N. hi sunt qui eum metiuntur, nimirum 2 N. & 2. & si interualli horum semissem statuo pro primo, erit is 1 N − 1. Iam ergo hoc confectum est vt primi quadratus cum secundo numero fa-

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μέσος ςς ὅσων δήποτε, ἔστω ςς δ. καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀπῆκται εἰς τὸ εὑρεῖν τὶς τετράγωνος προσλαβὼν ςςοὺς δ ποιεῖ τετράγωνον. ζητήσω ἀριθμοὺς δύο ὧν τὸ ὑπό ἐστι ςςοὶ δ. μετρήσουσι ςςοὶ β καὶ μο β. καὶ ἐκ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τοῦ ἡμίσεος τάξω τὸν πρῶτον. ἔσται ςς α λείψει μο α. καὶ λέλυταί μοι ὥστε τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. λοιπὸν ἐστι τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον, τουτέστι δυ ις,

V

μετὰ τοῦ τρίτου ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω τὰς δυ ιϛ ἕξω τὸν τρίτον. τάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τῶν δυ ιϛ. τουτέστι ϛϛ δ μο α. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δυ ιϛ ἀριθμῶν η μο α. ἐὰν ἀφέλω τὰς δυ ιϛ. λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ τρίτος ϛϛ η μο α. πάλιν ἐπεὶ θέλω τοὺς τρεῖς ἴσους εἶναι τετραγώνῳ. εἰσὶ δὲ οἱ τρεῖς ϛϛ ιγ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ, ἔστω τετραγωνικῶν δυ ρξθ. καὶ γίνεται ὁ ϛο δυ ιγ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος δυ ιγ λείψει μο α. ὁ δεύτερος δυ νβ. ὁ τρίτος δυ ρδ μο α. καὶ λέλυταί μοι ἐν τῷ ἀορίστῳ τρία τῶν ἐπιταγμάτων. λοιπόν ἐστι τὸ τὸν ἀπὸ τοῦ τρίτου τετράγωνον, τουτέστι δυ δυ α, ωιϛ. δυ ση μο α. μετὰ τοῦ πρώτου, τουτέστι δυ ιγ [illegible] μο α. ποιεῖν τετράγωνον. ποιεῖ δὲ δυ δυ α, ωιϛ δυ σκα. ἴσα τετραγώνῳ πάντα παρὰ δυνάμεις. γίνονται ἄρα δυ α, ωιϛ μο σκα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ϛϛ ρδ μο α. καὶ γίνεται ὁ ϛο νε [illegible]. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο γ, ςχκα [illegible] ὁ δὲ δεύτερος ιε, ζτ [illegible] ὁ δὲ τρίτος μο λα, ζτδ [illegible].

ciat quadratum. Restat vt secundi quadratus, hoc est 16 Q. adscito tertio faciat quadratum. Si ergo ab aliquo quadrato auferam 16 Q. habebo tertium. Formo quadratum à latere ipsius 16 Q. nempe abs 4 N. + 1. is erit 16 Q. + 8. N. + 1. hinc ablatis 16 Q. reliquus est tertius 8 N + 1. Rursus quia volo trium summam æquari quadrato, est autem trium summa 13 N. hoc æquabitur quadrato, esto itaque quadratis numero quadrato, puta 169 Q. & fit 1 N. 13 Q. Ad positiones erit primus 13 Q. − 1. secundus 52 Q. tertius 104 Q. + 1. Ita indefinitè impleta sunt tria postulata. Restat vt quadratus tertij, nimirum 10816 QQ. + 208 Q. + 1. adscito primo numero, hoc est 13 Q. − 1. faciat quadratum. Facit autem 10816 QQ. + 221 Q. hoc ergo æquatur quadrato. Omnia per quadratum diuidantur, fit 10816 Q. + 221. æquale quadrato à latere 104 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{55}{52}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{36621}{2704}$. secundus $\frac{157300}{2704}$. tertius $\frac{317304}{2704}$.

OBSERVATIO D. P. F.

Elegantius fortassè ita soluetur hac quæstio, ponatur primus numerus 1. N. secundus 2 N + 1 vt cum quadrato primi conficiat quadratum, ponatur tertius quilibet vnitatum & numerorum numerus, eâ conditione vt additus quadrato secundi conficiat quadratum, V. G. sit 4. N. + 3. ita igitur duabus propositi partibus fit satis, superest vt summa trium, sed & quadratus tertij vnâ cum primo conficiat quadratum, summa trium est 4 + 7 N. summa verò quadrati tertij & primi est. 9 + 25 N + 16 Q. oriturque duplicata æqualitas cuius solutio in promptu si vnitates quadratas ad eundem numerum quadratum in vtrouis numero quadrato adæquando reuoces.

Eademque viâ facillimè extendetur quæstio ad 4. numeros & infinitos cauendum enim solummodo erit vt summa vnitatum quæ in singulis numeris ponuntur conficiat quadratum quod quidem facillimum est.

IN QVAESTIONEM XVII.

ARTIFICIOSISSIMÈ Diophantus per duas operationes propositum absoluit problema. Hic itaque multa sunt obseruanda, quæ vel non vidit Xilander, vel parum feliciter adnotauit. Primo enim medius quæsitorum numerorum poni poterat non solùm 4 N. sed & alius quilibet Numerorum Numerus, vt non obscurè indicat Diophantus.

Secundò sumi possunt etiam diuersi numeri, quorum mutuo ductu fiant 4 N. & sic primi Numeri positio variari, cùm inueniri possint infiniti quadrati qui adsumptis 4 N. quadratum faciant. Sed hic aliqua cautio adhibenda est. Curandum enim vt ex duobus huiusmodi Numeris, quorum mutuo ductu fient 4 N. ille qui constat ex solis vnitatibus absolutis habeat pro semisse quadratum numerum. Sic Diophantus selegit 2 N. & 2. vbi vides semissem ipsius 2. esse 1 quadratum numerum. Sic etiam sumi possent $\frac{1}{2}$ N. & 8. quia semissis ipsius 8. est quadratus 4. & sic alij infiniti cum eadem cautione deligi possunt. Huius verò rei causa subtili indiget indagatione. Equidem certum est semis-

ſem huiuſmodi vnitatum abſolutarum ſemper reperiri in hypoſtaſi primi numeri cum ſigno vt in hypotheſi Diophanti ponitur primus Numerus 1 N. − 1. Etſi ſumpſiſſes $\frac{1}{2}$ & 8. ad conficiendum 4 N. mutuo ductu, ſtatueretur primus Numerus $\frac{17}{4}$ N. − 4. hoc autem accidit, quia primus Numerus habetur ſumendo ſemiſſem interualli duorum numerorum quorum mutuo ductu fiunt 4 N. Cæterùm vnitates quæ ponuntur in primo Numero cum ſigno defectus debere conflare quadratum ex eo colligitur, quod hæ debent æquari illis quæ ponuntur in tertio numero cum ſigno +. vt ſic vnitatibus ſe mutuò elidentibus cùm tres numeri ſimul adduntur, eorum ſumma conſtet ex ſolis Numeris, vt in Diophanto fit hujuſmodi ſumma 13 N. Atqui vnitates quæ ponuntur in tertio numero ſemper quadratas eſſe manifeſtum eſt. Etenim tertius Numerus eſt pars cuiuſdam quadrati, cujus latus conſtat ex Numeris qui ponuntur pro ſecundo + quotlibet vnitatibus, ſic Diophantus poſito ſecundo 4 N. vt inueniat tertium, fingit quadratum à latere 4 N + 1. qui eſt 16 Q. + 8 N. + 1. vnde ablatis 16 Q. ſtatuit tertium 8 N. + 1. Quare manifeſtum eſt vnitates tertij Numeri ſemper eſſe quadratum vnitatum in latere dicti quadrati poſitarum. Vt ergo illis æquentur vnitates primi numeri, illas oportet conficere quadratum eundem.

Tertiò in prima operatione Diophantus æquare potuit 13 N. cuilibet numero quadratorum quadrato, puta 16 Q. 25 Q. 36 Q. &c. Sumpſit author 169. Q. ad vitandas fractiones. Voluit autem in hac operatione valorem Numeri exhiberi in Quadratis, quia per eam non inquiritur vltimus valor Numeri per quem propoſita quæſtio ſoluatur, ſed tantùm id agitur vt per eam hypoſtaſes trium quæſitorum numerorum ita conſtituantur, vt per eas tribus propoſiti partibus indefinitè ſatisfiat, vt diſertis verbis indicat Diophantus. Rectè itaque concludit ſi 13 N. æquentur 169. Q. ſequi 1 N. æquari 13 Q. Quod ex ſola proportionum regula perſpicuum eſt. Deinde ad hanc Numeri æſtimationem reducendo ante factas poſitiones, infert primum qui erat 1 N. − 1. fore iam 13 Q. − 1. ſecundum qui erat 4 N. fore iam 52 Q. Ac demum tertium qui erat 8 N. + 1. fore iam 104 Q. + 1. Quare patet allucinari Xilandrum cùm putat 13 N. æquari 169 QQ. qua æquatione quid ad rem conducens conſequi poſſit non video. Siue enim per regulam trium colligat 1 N. æquari 169 QQ. ſiue depreſſis characteribus 13. æquari 169 QC. vnde fit ſolutio irrationalis, in manifeſtum abſurdum eum incidere neceſſe eſt. Adde in Græco rectè reperiri ad 109. adiectam notam Q. non autem QQ. vt verè dici poſſit corruptum hoc loco Diophantum à Xilandro.

Quartò in vltima æquatione vbi fingitur latus numeri 10816 Q. + 221. qui fit addendo primum numerum ad quadratum tertij, magna etiam cautio eſt adhibenda. Quia enim primus poſitus eſt 13. Q. − 1 oportet talem inueniri valorem Numeri, vt 13 Q. excedant vnitatem. Hoc autem vt fiat, oportet 1 Q. maiorem eſſe quàm $\frac{1}{13}$. quare cùm latus vero maius ipſius $\frac{1}{13}$ ſit $\frac{1}{10}$. Oportet valorem Numeri excedere $\frac{1}{10}$. Porro fit valor Numeri auferendo quadratum aliquem à 221. & reſiduum diuidendo per latus eiuſdem quadrati ductum in 208. Quare poſito illo quadrato 1 Q. fit valor Numeri $\frac{221}{208}\frac{1Q}{N}$ qui debet excedere $\frac{1}{10}$. quare 221 − 1 Q. debet excedere $\frac{104}{5}$ N. & tandem 1 Q debet eſſe maior quàm $\frac{104}{5}$ N. + 221. Qua æquatione per approximationem reſoluta fit 1 N. $\frac{16}{5}$. Quamobrem manifeſtum eſt fingendum latus quadrati 104 N. + tot vnitatibus quæ non excedant $\frac{16}{5}$. Vnde ſi ponas latus illud 104 N. + 4 incides in abſurdum, nam fiet 1 N. $\frac{205}{832}$ per quem reſoluendo hypoſtaſes, primus numerus inuenitur minor nihilo, & ſic de aliis.

Denique ne nos ignauiæ arguat Xilander, examen quæſtionis ſubiicere libet. Summa trium numerorum eſt $\frac{511225}{2704}$ quadratus à latere $\frac{715}{52}$. Quadratus autem primi nempe $\frac{1341097641}{7311616}$ adſcito ſecundo quadratum facit $\frac{1766436841}{7311616}$ à latere $\frac{42029}{2704}$. Quadratus porrò ſecundi, nempe $\frac{24743290000}{7311616}$ adſcito tertio quadratum facit $\frac{25601280016}{7311616}$ à latere $\frac{160004}{2704}$. Denique quadratus tertij, nempe $\frac{100958828416}{7311616}$ adſumpto primo quadratum conficit $\frac{100780851600}{7311616}$ à latere $\frac{317460}{2704}$.

QVAESTIO XVIII.

INVENIRE tres numeros æquales quadrato, vt cuiuſuis ipſorum quadratus dempto qui eum ordine ſequitur, faciat quadratum. Ponatur rurſus medius 4. N. & quia volo primi quadratum dempto ſecundo facere quadratum, oportet inuenire quadratum, qui demptis 4 N. faciat quadratum. Quæro primùm duos numeros, quorum mutuo ductu fiant 4 N. hi ſunt qui eum metiuntur 2 N. & 2. Nunc ergo ſummæ illorum ſemiſſem capiens,

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος λείψας τὸν ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω πάλιν ὁ μέσος ἀριθμῶν δ. καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον, λείψει τοῦ δευτέρου ποιεῖν τετράγωνον. ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ εὑρεῖν τίς τετράγωνος λείψας ςς δ ποιεῖ τετράγωνον, καὶ ζητῶ πρότερον ἀριθμοὺς δύο, ὧν τὸ ὑπό ἐστι ςς δ. μετροῦσι δὲ ἀριθμοὶ β μο β. νῦν τῆς συνθέσεως αὐτῶν λαβὼν τὸ ἥμισυ, τάσσω τὸν πρῶτον ἀριθμὸν α μο α. καὶ λείψαι

μοι ἓν τῶν ἐπιταγμάτων. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον, τουτέστι δυνάμεις ις λείψαντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῶν δυνάμεων ις ἄρωμεν τινα τετράγωνον, ἕξομεν τὸν τρίτον. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ἀριθμῶν δ λείψει μονάδος α. γίνονται δυνάμεις ις μ° α λείψει ἀριθμῶν η. ταῦτα ἀφαιρῶ ἀπὸ δυ ις. λοιπός ἐστι ὁ τρίτος ςς η λείψει μ° α. καὶ λέλυται ἕτερον ἐπίταγμα. πάλιν ἐπεὶ θέλω τοὺς τρεῖς, τουτέστι ἀριθμοὺς ιγ ἴσους εἶναι τετραγώνῳ. ἔστω δυ ρξθ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δυνάμεις ιγ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος δυ ιγ μ° α. ὁ δὲ δεύτερος δυνάμεις νβ. ὁ δὲ τρίτος δυ ρδ λείψει μ° α. καὶ πάλιν λέλυταί μοι ἐν τῷ ἀορίστῳ τρία τῶν ἐπιταγμάτων. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ τρίτου τετράγωνον ↑ τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ ὁ ἀπὸ τοῦ τρίτου τετράγωνος λήψας τὸν πρῶτον ποιεῖ δυδυ δυ α, ωις ↑ δυ σκα. ἴσας τετραγώνῳ, καὶ πάντα παρὰ δύναμιν, γίνονται δυ α, ωις ↑ μ° σκα ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς ρδ ↑ μ° α. καὶ γίνεται ὁ ς° ρια ιδ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ιζ. μ° ωπθ, ... ὁ δὲ δεύτερος ξδ. μ° χϟβ ... ὁ δὲ τρίτος ρκζ. φξη ...

pono primum 1 N. + 1. sic vni postulatorum satisfit. Rursus quoniam volo secundi quadratum, hoc est 16 Q. dempto tertio facere quadratum, si abs 16. Q. auferamus aliquem quadratum, habebimus tertium. Formo quadratum à 4 N. − 1. fit 16 Q. + 1 − 8 N. hunc aufero de 16. Q. relinquitur tertius 8 N. − 1. & alteri postulato satisfactum est. Rursus quia volo trium summam, hoc est 13 N. æquari, quadrato esto 169 Q. & fit 1 N. 13 Q. Ad positiones. Erit primus quidem 13 Q. + 1. secundus 52 Q. tertius autem 104 Q. − 1. & rursus indefinitè tribus postulatis est satisfactum. Superest vt & tertij quadratus dempto primo faciat quadratum. Sed tertij quadratus dempto primo facit 10816 QQ. − 221 Q. æquale quadrato. Omnia per quadratum diuidantur, fiunt 10816 Q. − 221. æqualia quadrato à latere 104 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{111}{104}$. Erit primus $\frac{170989}{10816}$ secundus $\frac{640692}{10816}$ tertius $\frac{1270568}{10816}$.

OBSERVATIO D. P. F.

Eodem quo in superiori quæstione vsi sumus ratiocinio hanc quoque soluemus & ad quotlibet numeros extendemus.

IN QVAESTIONEM XVIII.

OMNIA quæ ad præcedentem dicta sunt, hîc etiam locum habent, vt non opus sit ea repetere. Eodem errore lapsus est Xilander, cùm notam QQ. temerè inserit loco notæ Q. sed & falsos exhibet numeros solutionis, vt videre est ex comparatione verorum quos in Diophanti contextu reposuimus. Examen quæstionis tale est. Summa trium numerorum fit $\frac{2082249}{10816}$ quadratus à latere $\frac{1443}{104}$. A quadrato primi qui est $\frac{29237238121}{116985856}$ si auferas secundum, superest quadratus $\frac{22307513449}{116985856}$ à latere $\frac{149357}{10816}$. A quadrato secundi qui est $\frac{410486238864}{116985856}$ si auferas tertium, superest quadratus $\frac{396743775376}{116985856}$ à latere $\frac{629876}{10816}$. Denique à quadrato tertij qui est $\frac{1614343042624}{116985856}$ si auferas primum, superest quadratus $\frac{1612493625600}{116985856}$ à latere $\frac{1269840}{10816}$. Hîc etiam vides in Græco ita exprimi solutionis numeros, vt Myriades à reliquis vnitatibus distinguantur, quod familiare esse Diophanto iam monuimus ad vigesimam secundam tertij.

QVÆSTIO XIX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ πρώτου κύβος προσλαβὼν τὸν δεύτερον ποιῇ κύβον, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνος προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ς° α. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται μονάδες κυβικαὶ η λείψει κυ α. καὶ γίνεται ὁ ἀπὸ τοῦ πρώτου κύβος προσλαβὼν τὸν δεύτερον,

INVENIRE duos numeros, vt primi cubus adscito secundo faciat cubum, at secundi quadratus adscito primo faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. secundus ergo erit 8 − 1 C. & cubus prioris adsumens secundum fit cubus. Restat vt & quadratus secundi adsumpto primo fa-

ciat quadratum, sed secundi quadratus adsumpto primo facit 1 CC. + 1 N. + 64 − 16 C. hæc æquantur quadrato à latere 1 C. + 8. hoc est 1 CC. + 16 C. + 64. & additis vtrimque communibus defectibus, & auferendo similia à similibus relinquuntur 32 C. æquales 1 N. & omnibus per numerum diuisis 32 Q. æquantur 1. & est 1. quadratus. Quare si 32 Q. esset quadratus, explicari posset æquatio. Sed 32. Q. proueniunt ex duplo 16. C. Ipsi autem 16 C. orti sunt ex duplo producti 8. in 1. C. hoc est ex duplo ipsius 8. Proinde 32 Q. gignuntur ex quadruplo eiusdem 8. Id ergo mihi incumbit, vt inueniam cubum qui quater sumptus faciat quadratum. Esto quæsitus 1 C. hic quater fit 4 C. æquandus quadrato. Esto 16 Q. fit 1 N. 4. Ad positiones erit cubus 64. Pono itaque secundum 64. − 1 C. & superest vt quadratus secundi adsumpto primo faciat quadratum. Sed quadratus secundi adsumpto primo facit 1 CC. + 4096. + 1 N. − 128 C. hoc ergo æquatur quadrato à latere 1 C. + 64. hoc est 1 CC. + 4096 + 128 C. & reliquuntur 256 C. æquales 1 N. & fit 1 N. $\frac{1}{16}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{1}{16}$. secundus $\frac{262143}{4096}$.

κύβος. λοιπὸν ἐστὶ καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνος προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιεῖ κυβόκυβον ᾱ ς̄ ᾱ μο ξδ λείψει κυ ις. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς κυ ᾱ μο η̄ τουτέστι κυ κυ ᾱ κυ ις μο ξδ. καὶ κοινῶν προστιθεμένων τῶν λειπόντων, καὶ ἀφαιρουμένων τῶν ὁμοίων ἀπὸ τῶν ὁμοίων, λοιποὶ κυ λβ ἴσοι ς̄ ᾱ. καὶ πάντα παρὰ ς̄ δυ λβ ἴσοι μο ᾱ. καὶ ἐστὶν ἡ μο τετράγωνος, καὶ δυ λβ εἰ ἦσαν τετράγωνος λελυμένη ἂν μοι ἦν ἡ ἴσωσις. ἀλλ' αἱ δυ λβ εἰσὶ δὶς κυ ις. οἱ δὲ κυ ις εἰσὶν ἀπὸ τοῦ δὶς μο η̄. καὶ τοῦ κυ ᾱ. τουτέστι δὶς τῶν μο η̄. ὥστε αἱ λβ δυνάμεις ἐκ τετράκις τῶν η̄ μο γέγονε. γέγονεν οὖν μοι εὑρεῖν κύβον ὃς τετράκις γινόμενος ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ ζητούμενος κυ ᾱ. οὗτος τετράκις γινόμενος ποιεῖ κυ δ̄ ἴσους τετραγώνῳ. ἔστω δυ ις. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μο δ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ κύβος μο ξδ. τάσσω ἄρα τὸν δεύτερον μο ξδ λείψει κυ ᾱ. καὶ λοιπόν ἐστι τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ δευτέρου προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιεῖ κυ κυ ᾱ μο δϙϛ ς̄ ᾱ ⋔ κυ ρκη. ἴσους τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς κυ ᾱ μο ξδ. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος κυ κυ ᾱ μο δϙϛ κυ ρκη. καὶ γίνονται λοιποὶ κυ σνϛ ἴσοι ἀριθμῷ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ᾱ ιϛ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος ᾱ ιϛ ὁ δὲ δεύτερος κϛ βρμγ. δϙϛ.

IN QVAESTIONEM XIX.

TExtvs lacunas repleuimus, vt vides; quo præstito parum, aut nihil superest difficultatis in huius quæstionis tractatione. Vnum est quod moneam numeri quadrato æquandi 1 CC. + 4096 + 1 N. − 128 C. latus ingeniosè fingi 1 C. + 64. vt quadrato vtriusque partis fiant 1 CC. + 4096. ac proinde cubocubis & vnitatibus vtrimque sublatis, maneat æquatio inter Cubos & Numeros, vnde fit solutio rationalis, quia prouisum est, vt vtraque Cuborum & Numerorum multitudo sit quadratus Numerus, lemmatis scilicet auxilio, quo reperitur cubus, cuius quadruplum, faciat quadratum. Possumus etiam ex ipsa operatione satis expeditum formare Canonem, hac arte.

Sume $\frac{1}{16}$ cuiuslibet cubocubi, & per illius latus quadratum, diuide vnitatem, quotiens erit primus quæsitorum. Huius cubum aufer ab $\frac{1}{64}$ sumpti cubocubi, relinquetur secundus.

Vt sumpto cubocubo 64. erit illius $\frac{1}{16}$. 4. cujus latus 2. per quod si diuidas 1. fit $\frac{1}{2}$ primus quæsitorum, cuius cubum $\frac{1}{8}$ si auferas ab $\frac{1}{64}$ ipsius 64. videlicet ab 1. relinquetur secundus $\frac{7}{8}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{1}{2}$ & $\frac{7}{8}$. Nam primi cubus adsumpto secundo facit cubum 1. At secundi quadratus adsumpto primo, facit quadratum $\frac{81}{64}$.

Quod spectat ad verbum διαχρίνειν, quo in hac & in sequenti quæstione, & alibi etiam vsum esse Diophantum existimat Xilander, pro eo quod est quadruplicare, moneo adulterinam vocem librarij inscitia, vel oscitantia in textum Diophanti irrepsisse pro vera & germana τετράκις, quam vbique reposui. Porrò erroris ansam præbuit quod hæc vox vt plurimum expressa erat nota quaternarij δ cum χ superscripto, hoc modò δχ, vnde διαχρίνειν sciolus nescio quis efformauit. Sic propositione ista post illa verba, ὥστε αἱ λβ δυνάμεις ἐκ τετράκις τῶν η̄ μο, statim sequitur in codice manu exarato, γέγονε οὖν μοι εὑρεῖν κύβον, ὃς δχ γινόμενος ποιεῖ τετράγωνον.

Tum paulò post. ἐπεὶ διακεκριμένος γενόμενος, &c. Vbi patet idem esse prorsus quod primo positum est τετράκις, deinde δὶς demum διακεκριμένος. Vigesima etiam propositione sequente eadem dictio ter repetitur, vbi euidens est eam loco τετράκις esse positam. Primo enim legitur, ἀλλὰ δὶς οἱ ςοὶ ἐπὶ δὶς τοὺς ςους. ὁ διακεκριμένος ὑπὸ τῶν ςς ἐστι. Deinde θέλω οὖν τὸν διακεκριμένον ὑπ' αὐτῶν, &c. Ac demum, ἀλλὰ μὴν καὶ πάντων δύο ἀριθμῶν ὁ διακεκριμένος ὑπ' αὐτῶν, &c. Vbi etiam, ὁ διακεκριμένος ὑπ' αὐτῶν. mutatur statim in τετράκις ὑπ' αὐτῶν. Sequitur enim ἐὰν οὖν τὸν ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν μονάδα μίαν κατασκευάσωμεν, ὁ τετράκις ὑπ' αὐτῶν, &c. Facessat igitur subreptitia vox, & eius insolentiam cum Xilandro miretur nemo. Equidem me non latet verbum διακρίνειν inter ea quibus vtuntur Arithmetici cõnumerari à Polluce lib. 4. cap. 22. sed quo sensu soleat vsurpari non docet Pollux. Ergo sanè nunquam adducar, vt credam sumi pro eo quod est quadruplicare. Quid autem significet doceant eruditi.

QVÆSTIO XX.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῷ ἀορίστῳ, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν μετὰ μο α. ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου μετὰ μο α ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω τὴν μο. ἕξω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου. πλάσσω τετράγωνον ἀπὸ ςς ὅσων δήποτε, καὶ μο α. ἔστω ς α. μο α. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δυ α. ςςοὶ β. μο. α. ἐὰν ἀφέλω τὴν μο α. λοιπὸν δυ α. ςςοὶ β. ἔσται τὸ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου. ἔστω ὁ δεύτερος ς α. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται ς α μο β. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου ποιεῖν τετράγωνον μετὰ μο α. ἐὰν ὁμοίως ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω μο α. ἕξω τὸν ἀπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου. πεπλάσθω ὁ τετράγωνος ἀπὸ ςς γ μο α. ἔσται ὁ τετράγωνος δυ θ ςς ς. μο α. ἐὰν ἄρα ἀφέλω μο α γίνονται δυ θ ςςοὶ ς. δεῖ ἄρα τὸν ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου εἶναι δυ θ ςς ς. ὧν ὁ δεύτερος ἐστι ς α. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ςς θ. μο ς. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ τρίτου μετὰ μο α. ποιεῖν τετράγωνον. ἔστι δυ. θ. ςςοὶ κδ μο ιγ. ἴσος τετραγώνῳ. καὶ ἔχω τὰς δυνάμεις τετραγωνικάς, εἰ δὲ καὶ αἱ μονάδες ἦσαν τετραγωνικαί, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τῶν δυνάμεων καὶ τῶν μονάδων ἴσον ἦν τοῖς ἀριθμοῖς, ἦν ἂν ἀορίστως τὰ τρία ἐπιτάγματα λελυμένα. ἀλλ' αἱ μονάδες ιγ. εἰσὶν ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν μο β καὶ μο ς. μετὰ μο α. ἀλλ' αἱ μὲν μο. β. ἐκ τοῦ δὶς ὑπὸ ς α καὶ μο α. αἱ δὲ μο ς πάλιν ἐκ τοῦ δὶς ὑπὸ ςς γ. καὶ μο α. θέλω οὖν δὶς τοὺς ςους ἐπὶ δὶς τοὺς ςους μετὰ μο α. ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ δὶς οἱ ςοὶ ἐπὶ δὶς τοὺς ςους. ὁ τετράκις ὑπὸ τῶν ςς ἐστι. θέλω οὖν τὸν τετράκις ὑπ' αὐτῶν μετὰ μο α ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ μὴν καὶ πάντων δύο

INVENIRE tres numeros indefinitè, vt quem bini producunt mutua multiplicatione, adscita vnitate faciat quadratum. Quia volo productum ex primo in secundum addita vnitate facere quadratum, si ab aliquo quadrato abstulero vnitatem, habebo productum ex primo in secundum. Formo quadratum à numeris quotcunque & vnitate. Esto ab 1 N. + 1. erit is 1 Q. + 2 N. + 1. hinc ablata vnitate, quod superest 1 Q. + 2 N. est productum ex primo in secundum. Esto secundus 1 N. Primus ergo erit 1 N. + 2. Rursus quia volo productum ex secundo in tertium facere quadratum adscita vnitate, si eodem modo ab aliquo quadrato abstulero vnitatem, habebo productum ex secundo in tertium. Formetur quadratus a 3 N. + 1. erit is 9 Q. + 6 N. + 1. vnde ablata vnitate, relinquuntur 9 Q. + 6 N. Oportet ergo productum ex secundo in tertium esse 9 Q. + 6 N. At secundus est 1 N. erit igitur tertius 9 N. + 6. Rursus quia volo productum ex primo in tertium addita vnitate facere quadratum, erit vtique 9 Q. + 24 N. + 13. æqualis quadrato. Et numerus quadratorum est quadratus. Quod si etiam vnitates quadratæ essent, & duplum producti ex latere quadratorum in latus vnitatum æquale esset Numeris, indefinitè iam satisfactum esset tribus postulatis. At vnitates 13. fiunt ducto 2. in 6. & addita vnitate. Porro 2. fit ex 1 N. in 1. bis. At 6. fiunt ex 3 N. in 1. etiam bis. Volo itaque vt bis numeri in bis numeros ducti faciant quadratum adscita vnitate. Sed bis nume-

rij in bis numeros est quadruplum producti ex numeris in numeros. Volo igitur quadruplum hoc addita vnitate facere quadratum. Enimuero quorumcunque duorum numerorum vnius in alterum producti, quadruplum cum quadrato interualli ipsorum facit quadratum. Proinde si quadratum interualli constituamus vnitatem, quadruplum producti adscita vnitate faciet quadratum. Atqui si quadratorum interuallum sit 1. erit & laterum interuallum 1. Oportet ergo formare quadratos à numeris deinceps, puta ab 1 N. + 1. & a 2 N. + 1. Quadratus ab 1 N. + 1. fit 1 Q. + 2. N. + 1. Vnde ablata vnitate relinquitur 1 Q. + 2 N. Quare oportet productum ex primo in secundum esse 1. Q. + 2 N. Ponatur secundus 1 N. ergo primus erit 1 N. + 2. Rursus quia quadratus abs 2 N + 1. est 4. Q. + 4 N. + 1. Vnde sublata vnitate relinquitur 4 Q. + 4 N. oportet productum ex secundo in tertium esse 4 Q. + 4 N. Sed secundus est 1. N. Ergo tertius erit 4 N. + 4. Atque ita soluta est quæstio indefinitè, vt bini quique mutùa multiplicatione producant numerum qui addita vnitate fiat, quadratus. Et fit 1 N. quot quis voluerit vnitatum. Hoc enim est indefinitè quærere, cùm ita positiones instituuntur, vt quamcunque numeri æstimationem iis accommodes, semper postulatis satisfiat.

ἀριθμῶν ὁ τετράκις ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τετραγώνου, ποιεῖ τετράγωνον. ἐὰν οὖν τὸν ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν μονάδα μίαν κατασκευάσωμεν, ὁ τετράκις ὑπ' αὐτῶν μετὰ μο α ποιεῖ τετράγωνον. εἰ οὖν ὁ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν μο α. καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἐστι μονὰς μία. δεῖ οὖν ἀπὸ τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς ςς πλάσσειν τετραγώνους. ἔστω ἀπὸ ς α. καὶ ἀπὸ ςς β μο α. καὶ ἔσται ὁ μὲν ἀπὸ ς α μο α. τετράγωνος δυ α. ςς β. μο α. ἐὰν ἀφέλω τὴν μονάδα, λοιπὸς γίνεται δύναμις μία, ςς β. δεῖ ἄρα τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου εἶναι δυ α ςς β. τετάχθω ὁ δεύτερος ς α. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ς α μο β. πάλιν ἐπεὶ ὁ ἀπὸ ςς β μο α τετράγωνός ἐστι δυ δ. μο α. ἐὰν ὁμοίως ἀφέλω τὴν μονάδα μίαν λοιπὸς γίνεται δυ δ ςς δ. δεῖ δὴ τὸν ὑπὸ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου εἶναι δυ δ ςς δ. ὧν ὁ δεύτερός ἐστιν ς α. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ςς δ. καὶ λέλυται ἐν τῇ ἀορίστῳ, ὥστε τὸν ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν μετὰ μο α ποιεῖν τετράγωνον, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ὅσου τις θέλει. τὸ γὰρ ἀορίστως ζητεῖν ἐστιν ἵνα ἡ ὑπόστασις τοιαύτη ᾖ, ἵνα ὅσου τις θέλει τὸν ἀριθμὸν εἶναι, ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ποιήσας σώσῃ τὸ ἐπίταγμα.

OBSERVATIO D. P. F.

Proponatur inuenire tres numeros vt quem bini producunt mutuâ multiplicatione adscitâ vnitate faciat quadratum & præterea vnusquisque trium adscitâ vnitate faciat quadratum.

Hujus quæstionis solutionem subiungemus & jam confecta est. Ita fiat solutio indefinita præsentis quæstionis vt vnitates primi & tertij numeri addita vnitate conficiant quadratos v. g. sint tres numeri indefinitè primus $\frac{169}{5184}$ N. + $\frac{13}{36}$ Secundus 1 N. Tertius $\frac{7225}{5184}$ N + $\frac{85}{36}$ Patet solutionem hanc indefinitam satisfacere conditionibus huius quæstionis secundæ.

Supereſt vt singuli ex illis numeris adscitâ vnitate conficiant quadratos & orietur triplicata æqualitas cuius solutio erit in promptu ex nostrâ methodo cum numerus vnitatum in quolibet ex istis numeris vnitate auctis sit quadratus.

IN QVAESTIONEM XX.

LEMMA quod assumit Diophantus, nimirum. Quorumcunque duorum numerorum vnius in alterum producti quadruplum cum quadrato interualli ipsorum, facit quadratum, idem est prorsus cum quinta secundi porismatum, per quam constat etiam fieri inde quadratum summæ ipsorum numerorum. Vnde optimè concludit Diophantus, si Numeri vnitate distent, quadruplum producti eorum adscita vnitate facere quadratum. Sed & hinc colligo vniuersaliùs.

Si quadruplum producti duorum numerorum vnitate distantium ducatur in quemlibet quadratum, & producto addatur idem quadratus, fit quadratus.

Hoc enim nil aliud eſt quàm quadratum ſummæ duorum numerorum vnitate diſtantium ducere in alium quadratum. Quamobrem inde produci quadratum neceſſe eſt. Ita ſi ſedecuplo producti addas 4. fiet quadratus, hoc enim idem eſt ac ducere quadratum ſummæ numerorum in 4. At ſi trigecuplo ſeſcuplo producti addas 9. fiet etiam quadratus, hoc enim idem eſt ac ducere quadratum ſummæ numerorum in 9. & ſic de aliis.

Cæterùm ſi quid obſcuritatis eſt in huius quæſtionis tractatione, hoc vnum eſſe videtur, quòd non ſtatim apparet quomodo poſitionibus trium numerorum ſumptis à quadratis continenter proximis conſtet productum ex primo in tertium adſcita vnitate facere quadratum. Hoc ergo vt perfectè demonſtretur, ſit primus A + B. tertius C. + D. (nam ſecundus ſemper ponitur 1 N.) & methodo à Diophanto tradita ſint A & C. Numerorum numeri quadrati continenter proximi. Ipſi verò B D ſint vnitatum numeri dupli laterum ipſorum A C. Ductoque A in C. fiat E quadratorum numerus, ductiſque A in D. & B in C. fiat ſumma productorum F Numerorum numerus. Denique ducto B. in D. & producto addendo vnitatem fiant G. vnitates, dico ipſum E + F + G. eſſe quadratum. Hoc vt probetur, oportet oſtendere ipſos E. G. quadratos eſſe, & ex latere vnius in latus alterius bis produci F. ſic enim per quartam ſecundi totum E F G quadratum eſſe conſtabit. Itaque cùm numeri Numerorum A C quadrati ſint continenter proximi, ſumantur eorum latera H K quæ vnitate diſtent. Primùm igitur patet ex quadrato A in quadratum C. productum E eſſe quadratum, cuius latus eſt productus ex H in K. Secundo, quia B duplus eſt ad H, & D ad K productus ex B in D. adſcita vnitate, puta G. æquatur quadruplo producti ex H. in K. adſcita vnitate. Igitur G. quadratus eſt per lemma ſupra explicatum, cuius latus eſt ſumma ipſorum H K. Denique quia F conſtat productis ex A in D & ex C in B. ſeu ex A in K bis, & ex C. in H. bis. At producti ex A in K. & ex C in H. ſemel æquantur productis ex ſumma ipſorum H K in planum ſub ipſis contentum, ac proinde ſumma productorum ex A in D. & ex C in B. ſeu F æquatur duplo producti ex ſumma ipſorum H K in planum ſub ipſis, latus autem ipſius G eſt ſumma ipſorum H K, & latus ipſius E eſt planus ſub H K continens, vt oſtenſum eſt, patet F produci ex latere ipſius E in latus ipſius G. bis Quamobrem totus E F G quadratus eſt, cuius latus conſtat ex lateribus ipſorum E G. Quod erat demonſtrandum.

A 4 N. + B 4.	H 2.
C 9 N. + D 6.	K 3.
E 36 Q. + F 60 N. + G 25.	

18. 2. poriſ.

Hinc apparet poſito ſecundo ſemper 1 N. poſitiones primi & tertij infinitis modis poſſe variari, dum ſumantur duo numeri Numerorum quadrati, quorum latera vnitate diſtent, & his addantur vnitates quæ ſint duplum lateris cujuſlibet. Sic poſuit eos Diophantus 1 N. + 2. & 4 N. + 4. Poni etiam poterant 4 N. + 4. & 9 N. + 6. vel adhuc 9 N. + 6. & 16 N. + 8. & ſic in infinitum.

Hanc autem quæſtionem ſi libet non ſoli vnitati applicabis, ſed ad quemlibet quadratum extendes eodem prorſus artificio, ampliando lemma Diophanti, vt ſuprà docuimus. Verbi gratia, quærantur indefinitè tres numeri, vt bini quem producent mutuo ductu is adſcito 9. faciat quadratum. Vt habeas productum ex primo in ſecundum, aufer 9. ab aliquo quadrato, cuius latus ſit quotcunque Numerorum + 3. ſit latus 1 N. + 3. erit quadratus 1 Q. + 6 N. + 9. Ergo productus ex primo in ſecundum erit 1 Q. + 6 N. ſit ſecundus 1 N. erit igitur primus 1 N. + 6. Rurſus vt habeas tertium, finge quadratum à latere 2 N. + 3. (vt ſcilicet numerus Numerorum ſuperet vnitate numerum Numerorum lateris prioris quadrati) erit quadratus 4 Q. + 12 N. + 9. vnde auferendo 9. manet productus ex ſecundo in tertium 4 Q. + 12 N. Quare cùm ſecundus ſit 1 N. erit tertius 4 N. + 12. Igitur tres numeri quæſtionem infinitè ſoluentes ſunt 1 N. + 6. 1 N. 4 N. + 12. Porro lemma Diophanti hîc ampliari intelligitur modo ſupra tradito, nam patet 6. vnitates primi Numeri eſſe ſeſcuplum numerorum lateris prioris quadrati, & 12. vnitates tertij Numeri eſſe ſeſcuplum Numerorum poſterioris quadrati. Quare cùm productus ex ſeſcuplo vnius numeri in ſeſcuplum alterius, ſit æquale trigecuplo ſeſcuplo producti eorundem numerorum, patet hîc ſupponi, trigecuplum ſeſcuplum producti duorum numerorum vnitate diſtantium, adſcito 9. facere quadratum, quod ſanè concluditur per ſupradictum lemma.

Hæc quidem Diophanti veſtigiis inſiſtendo facilè fuit excogitare. Verùm ſi propoſitum ſit inuenire tres numeros indefinitè, vt bini quem producunt mutuo ductu, is adſcito quocunque numero quadratum faciat; iam non licebit Diophantæam analyſim imitari. Nec fortè temerarium fuerit aſſerare huius problematis enodationem ipſum ignoraſſe Diophantum, quod mirum non eſt, quandoquidem, vt veriſſimè cecinit poëta, Non omnia poſſumus omnes. Nobis tamen ope Canonum ad duodecimam tertij traditorum, rem abſoluere pronum erit. Etenim ſit propoſitum quærere indefinitè tres numeros, vt bini quem producunt adſcito 6. faciat quadratum. Fingantur duo quadrati à quotlibet numeris Numerorum diuerſis + eodem numero vnitatum, cuius quadratus ſuperet 6. puta fingantur quadrati à lateribus 1 N. + 3. & 2 N. + 3. erunt hi 1 Q. + 6 N. + 9. & 4 Q. + 12 N. + 9. auferatur 6. ab vtroque, & reſidua diuidantur per interuallum laterum quod eſt 1 N. fiet ergo primus quæſitorum 1 N. + 6 + $\frac{3}{1N}$. ſecundus 4 N. + 12 + $\frac{3}{1N}$. tertius 1 N. qui ſatisfaciunt poſtulatis ex Canone primo duodecimæ tertij. vel iiſdem manentibus primo & ſecundo, erit

erit tertius duplum summæ illorum inultatum laterum interuallo 1 N. puta 9 N. + 36 + $\frac{120}{1N}$. vt constat ex secundo Canone. Eadem arte per Canones ad decimam tertiam tertij traditos licebit & hanc soluere quæstionem.

Inuenire tres numeros indefinitè, vt quem bini producunt mutuo ductu, detracto quouis dato numero quadratum relinquat.

Datus esto 10.

Fingantur duo quadrati, alter à quotlibet vnitatibus, alter ab 1 N. + latere prioris. Sint igitur latera 1. & 1 N. + 1. erunt quadrati 1. & 1 Q. + 2 N. + 1. Vtrique addatur 10. & summæ diuidantur sigillatim per laterum interuallum 1 N. Eritque primus quæsitorum $\frac{11}{1N}$. secundus 1 N. + 2 + $\frac{11}{1N}$. tertius horum summæ duplum multatum 1 N. puta 1 N. + 4 + 44 − 1 N. vel iisdem manentibus primo & secundo, erit tertius ipsum interuallum laterum, nimirum 1 N.

QVÆSTIO XXI.

INVENIRE quatuor numeros, vt qui fit ex binorum mutua multiplicatione adscita vnitate faciat quadratum. Quia volo productum ex primo in secundum cum vnitate facere quadratum, si ab aliquo quadrato detraxero vnitatem, habebo productum ex primo in secundum. Formo quadratum ab 1 N. + 1. & fit 1 Q. + 2 N. + 1. hinc aufero vnitatem, restant 1 Q. + 2 N. pro producto ex primo in secundum esto primus 1 N. ergo secundus erit 1 N. + 2. Rursus quia volo productum ex primo in tertium cum vnitate facere quadratum, formo quadratum abs 2 N. + 1. nimirum à numeris continenter proximis, ob ea quæ supra demonstrata sunt, & ab illius quadrato, aufero vnitatem, & statuo productum ex primo in tertium 4 Q. + 4 N. Quare cùm primus sit 1 N. erit vtique tertius 4 N. + 4. Rursus quia volo productim ex primo in quartum cum vnitate facere quadratum, formo quadratum à numeris continenter proximis, nimirum à 3 N. + 1. & à quadrato sublata vnitate statuo productum ex primo in quartuin 9 Q. + 6 N. Proinde cùm primus sit 1 N. erit quartus 9 N. + 6. & contingit præterea productum ex tertio in quartum cum vnitate facere quadratum. Cæterùm ex secundo in quartum productus addita vnitate facit 9 Q. + 24 N. + 13. Hoc ergo æquandum quadrato, esto latus 3 N. − 4. & fit 1 N. $\frac{1}{16}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{1}{16}$. secundus $\frac{33}{16}$. tertius $\frac{68}{16}$. quartus $\frac{105}{16}$.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν περιλαβὼν μονάδα μίαν, ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου μετὰ μονάδος μιᾶς, εἶναι τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἄρω μο α. ἕξω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου, πλάσσω τετράγωνον ἀπὸ ςου α μο α καὶ γίνεται αὐτὸς ὁ τετράγωνος δυ α ςς β μο α. ἐὰν ἀφέλω τὰς μο α. λοιπὸς γίνεται δυ μία ςοὶ β. ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου. ἔστω ὁ πρῶτος ςου α. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται ςου α μο β. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου μετὰ μονάδος μιᾶς, ποιεῖν τετράγωνον. πλάσσω τετράγωνον ἀπὸ ςς β μο α τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς διὰ τὸ προδειχθὲν, καὶ λαβὼν τὸν ἀπὸ, αἴρω τὴν μονάδα α. καὶ τάσσω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου δυνάμεις δ ςς δ. ὧν ὁ πρῶτος ἐστὶ ςου α. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἐστὶ ςς δ μο δ. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τετάρτου μετὰ μονάδος μιᾶς, ποιεῖν τετράγωνον. πλάσσω τετράγωνον ἀπὸ τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς ςς γ μο α. καὶ λαβὼν τὸν ἀπὸ, καὶ ἀφελὼν μο α. ἕξω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τετάρτου δυ θ ςςων ς. ὧν ὁ πρῶτος ἐστὶν ἀριθμοῦ α. λοιπὸς ἄρα ὁ τέταρτος ἔσται ςς θ μο ς. καὶ ἔτι συμβαίνει τὸν ὑπὸ τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου μετὰ μονάδος μιᾶς ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ ὁ ὑπὸ δευτέρου καὶ τετάρτου μετὰ μο α. ποιεῖ δυνάμεις θ ςςων κδ. μο ιγ ἴσας τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς γ λείψει μο δ. καὶ γίνεται ὁ ςος α ιϛων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος α ιϛων. ὁ δὲ δεύτερος λγ ιϛων. ὁ δὲ τρίτος ξη ιϛων. ὁ δὲ τέταρτος ρε ιϛων.

OBSERVATIO D. P. F.

INuenientur tres numeri quilibet vt qui fit binorum mutuâ multiplicatione adscita vnitate faciat quadratum, v. g. sint illi numeri 3. 1. 8. quæratur iam quartus eâ

conditione vt qui fit sub tribus inuentis sigillatim in quartum adscita vnitate sit quadratus, ponatur inueniendus esse 1 N. ergo 3 N + 1. item 1 N + 1. item 8 N + 1. æquantur quadrato & oritur triplicata æqualitas cuius solutio inuentioni nostræ debetur. Vide quæ adnotauimus ad quæstionem 24. libri 6.

IN QVAESTIONEM XXI.

NON apparet ex verbis Diophanti quomodo producti ex secundo in tertium, & ex tertio in quartum adscita vnitate quadratum faciant. Id autem omisit quasi euidens ex lemmate præcedentis quia secundus, tertius & quartus finguntur à quadratis continenter proximis, vnde sequitur ex supra demonstratis productos ex duobus proximis, videlicet ex secundo in tertium, & ex tertio in quartum addita vnitate facere quadratos. Quamobrem cùm etiam ex constructione manifestum sit productos ex primo in singulos ex aliis addita vnitate facere quadratos, vnum sanè restat curandum, vt scilicet productus ex secundo in quartum adscita vnitate fiat quadratus. Fit autem 9 Q. + 24 N. + 13. hoc ego æquabimus quadrato à latere 3 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus superet 13. vt à 3. N. − 4. cum Diophanto.

Hæc etiam quæstio ad quemlibet quadratum extendi potest, eodem artificio quo præcedens. verbi gratia. Quærantur quatuor numeri, vt bini quem producunt adsumpto 4. quadratus fiat. Posito primo 1 N. fingantur quadrati à lateribus 1 N. + 2. 2 N. + 2. 3 N. + 2 erunt hi 1 Q. + 4 N. + 4. 4 Q. + 8 N. + 4. 9 Q. + 12 N. + 4. A singulis auferatur 4. & erit productus ex primo in secundũ 1 Q. + 4 N. ex primo in tertium 4 Q. + 8 N. ex primo in quartum 9 Q. + 12 N. Quare cùm primus sit 1 N. erit secundus 1 N. + 4 tertius 4 N. + 8. quartus 9 N. + 12 & quidem tam ex constructione, quàm ex demonstratis ad precedentem, constat productos ex primo in singulos ex aliis, itemque productos ex secundo in tertium, & ex tertio in quartum adsumpto 4. facere quadratos. Superest igitur vt productus ex secundo in quartum adscito 4. faciat quadratum. Sed facit 9. Q. + 48 N + 52. hoc ergo æquatur quadrato sit eius latus 3 N. − 8 fit 1 N. $\frac{1}{8}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{1}{8}$. $\frac{33}{8}$. $\frac{17}{2}$. $\frac{105}{8}$. Producti ex primo in reliquos, adscito 4. faciunt quadratos $\frac{289}{64}$. $\frac{81}{16}$. $\frac{361}{64}$ quorum latera $\frac{17}{8}$ $\frac{9}{4}$ $\frac{19}{8}$. Producti ex secundo in tertium & quartum adsumpto 4. faciunt quadratos $\frac{625}{16}$. $\frac{3721}{64}$. quorum latera $\frac{25}{4}$. $\frac{61}{8}$. Denique productus ex tertio in quartum adscito 4. quadratum facit $\frac{1849}{16}$. cuius latus $\frac{43}{4}$.

Cæterùm quomodo in vniuersum solui possit huiusmodi quæstio, vt scilicet productus ex binorum mutuo ductu adscito quocumque dato numero faciat quadratum colligi non potest ex Diophanto, & id eum latuisse audacter asserere ausim, alioquin non in sola vnitate vel in solis quadratis perfecisset, quod in omnibus numeris absoluere poterat. Nos pulcherrimum hoc problema explicauimus ad duodecimam tertij. Et rursus idem perfecimus additione in detractionem mutata ad decimam tertiam eiusdem.

QVÆSTIO XXII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἀνάλογον, ὅπως δύο ὁποιωνοῦν ἡ ὑπεροχὴ ᾖ τετράγωνος. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς$^{\overline{ος}}$ $\bar{α}$. ὁ δὲ μέσος ς$^{\overline{ος}}$ $\bar{α}$. μ$^{\circ}$ $\bar{δ}$. ἵνα ἡ ὑπεροχὴ ᾖ τετράγωνος. ὁ δὲ τρίτος ς$^{\overline{ος}}$ $\bar{α}$. μ$^{\circ}$ $\overline{ιγ}$. ἵνα καὶ ἡ τούτου πρὸς τὸν μέσον ὑπεροχὴ ᾖ τετράγωνος. ἔτι δὲ εἰ τοῦ μεγίστου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου ὑπεροχὴ ᾖ τετράγωνος, ἦν ἀναλελυμένον ἐν τῷ ἀορίστῳ, δύο ὁποιωνοῦν ἡ ὑπεροχὴ τετράγωνος. ὁ δὲ μέγιστος τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχει μ$^{\circ}$ ιγ. αἱ δὲ μονάδες $\overline{ιγ}$. σύνθεμα εἰσὶ τετραγώνων τοῦ $\bar{δ}$. καὶ τοῦ $\bar{θ}$. γέγονεν οὖν μοι εὑρεῖν δύο τετραγώνους. ἴσους ἑνὶ τετραγώνῳ τοῦτο δὲ ῥᾴδιον ἀπὸ τριγώνου ὀρθογωνίου. ἔστι δὲ ὁ $\bar{θ}$. καὶ ὁ $\overline{ις}$. καὶ τάσσω τὸν μὲν ἐλάχιστον ς^{οῦ} $\bar{α}$. τὸν δὲ μέσον ς^{οῦ} $\bar{α}$ μ$^{\circ}$ $\bar{θ}$. τὸν δὲ τρίτον ς^{οῦ} $\bar{α}$. μ$^{\circ}$ $\overline{κε}$. καὶ δύο ὁποιωνοῦν ἡ ὑπεροχή ἐστι τετράγωνος. λοιπὸν ἐστι αὐτοὺς ἀνάλογον εἶναι. ἐὰν δὲ τρεῖς ἀριθ-

INVENIRE tres numeros proportionales, vt duorum quorumlibet interuallum sit quadratus numerus. Ponatur minor 1 N. Medius 1 N. + 4. vt interuallum sit quadratus. Tertius autem sit 1 N. + 13. vt & huius excessus supra medium sit quadratus. Porrò si maximi & minimi differentia esset quadratus, iam indefinitè satisfactum esset parti quæstionis qua postulatur, vt differentia duorum quorumlibet sit quadratus. At maximus minimum superat vnitatibus 13. & 13. est summa quadratorum 4. & 9. Quærendi igitur sunt duo quadrati æquales quadrato. Quod facilè fit trianguli rectanguli sumptis lateribus, suntque 9. & 16. statuo minimum 1 N. Medium 1 N. + 9 tertium 1. N. + 25. & sic duorum quorumlibet

interuallum quadratus eſt. Supereſt vt ipſi ſint proportionales. At cùm tres numeri proportionales ſunt, qui ſub extremis continetur æqualis eſt quadrato medij, ſed contentus ſub maximo & minimo, hoc eſt ſub extremis eſt 1 Q. + 25 N. Quadratus autem medij eſt 1 Q. + 18 N. + 81. Hæc ergo æquantur inter ſe, & fit 1 N. $\frac{81}{7}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{81}{7}$. ſecundus $\frac{144}{7}$. tertius $\frac{256}{7}$.

μοὶ ἀνάλογον ὦσι, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου. ἀλλὰ ὁ ὑπὸ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, τουτέστιν ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἐστὶ δυ α̅ ςς κε̅. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ μέσου δυ α̅ ςς ιη̅ μο πα̅. ἴσοι δυ α̅ ςς κε̅. καὶ γίνεται ὁ ς πα̅ ζ ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος πα̅ ζ ὁ δὲ δεύτερος ρμδ̅ ζ. ὁ δὲ τρίτος σνς̅ ζ.

IN QVAESTIONEM XXII.

TOTA diuerſitas ſolutionum pendet hîc à duobus quadratis qui ſimul iuncti quadratum efficiant, nam ſi vtaris iiſdem, eadem ſemper continget ſolutio, quamuis pro primo quæſitorum numerorum ſtatuas quemlibet Numerorum numerum, ſic quamuis ſtatuas quæſitos numeros 3 N. 3 N. + 9. & 3 N. + 25. eandem ſolutionem inuenies quam reperit Diophantus poſitis iiſdem numeris 1 N. 1 N. + 9. & 1 N. + 25. & ſic quantumuis varietur primus, dum in ſecundo & tertio ponantur iidem quadrati 9. & 25. eadem continget ſolutio, quod patet experientia, & facile eſt demonſtrare.

Cæterùm eſt quod moneam ex duobus quadratis qui ſimul quadratum conficiunt, minorem ſtatuendum in medio numero, non autem maiorem, ſic Diophantus medium poſuit 1 N. + 9. non 1 N. + 16. Quamuis poſito eo 1 N. + 16. tribus quoque poſtulati partibus ſatisfiat, cùm binorum interuallum ſit quadratus. Sed in æquatione qua medij quadratus æquatur plano ſub extremis, inueniuntur tandem 32 N. + 256. æquales 25 N. Quod eſt impoſſibile, quia 32 N. ſunt plus quàm 25 N. fiunt autem 32 N. ex duplo quadrati 16. qui poſitus eſt in medio, at 25 N. eſt ſumma quadratorum 16. & 9. Oportet igitur duplum quadrati qui ponitur in medio minus eſſe ſumma quadratorum, quare oportet minorem quadratum collocari in medio. Quandoquidem duplum maioris duorum numerorum excedit ſummam ipſorum, ſicut duplum minoris deficit ab eadem ſumma. Porrò ex ipſa operatione elicitur Canon faciliſſimus.

Sume duos quadratos quadratum conficientes, per horum interuallum diuide quadratum minoris quadrati, orietur primus quæſitorum. Cui ſi addas minorem quadratum, fiet ſecundus. Et huic ſi addas maiorem quadratum, fiet tertius.

QVÆSTIO XXIII.

INVENIRE tres numeros, vt ſolidus ſub ipſis contentus adſcito quolibet ipſorum faciat quadratum. Ponatur ſolidus ſub ipſis contentus 1 Q. + 2 N. & & primus 1. vt ſolidus aſcito primo faciat quadratum. Rurſus quia volo ſolidum ſub tribus contentum cum ſecundo facere quadratum, ſi ab aliquo quadrato detraxero 1. Q + 2 N. habebo ſecundum. Formo quadratum ab 1 N. + 3. huius quadrati detractis 1 Q. + 2 N. facit 4 N. + 9. Pono ergo ſecundum 4 N. + 9. Iam cùm ſolidus ſub tribus contentus ſit 1 Q. + 2 N. & ex primo in ſecundum producatur 4 N. + 9. ſi diuidamus 1 Q. + 2 N. per 4 N. + 9. habebimus tertium. Verùm hæc diuiſio non eſt poſſibilis. Vt autem fieri poſſit curandum eſt vt ſe habeat 1 Q. ad 4 N. ſicut 2 N. ad 9. & permutatim 1 Q. ad 2 N. ſicut 4 N. ad 9.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς προσλαβὼν ἕκαστον αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἐκ τριῶν στερεὸς δυ α̅ ςς β̅. ὁ δὲ πρῶτος μο α̅. ἵνα ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς μετὰ τοῦ πρώτου ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν μετὰ τοῦ δευτέρου ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀρῶ δύναμιν α̅ ςςους β̅. ἕξω τὸν δεύτερον. πλάσσω τετράγωνον ἀπὸ ςου α̅ μο γ̅. καὶ ὁ ἀπὸ τούτου τετράγωνος ⋔ δυ α̅ ςς β̅. ποιεῖ ςςους δ̅ μο θ̅. τάσσω οὖν τὸν δεύτερον ςς δ̅ μο θ̅. ἀλλ' ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς δυ α̅ ςςοι β̅. ὁ δὲ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ςοι δ̅ μο θ̅. ἐὰν ἄρα δυ α̅ ςςους β̅ παραβάλλω παρὰ ςς δ̅ μο θ̅. ἕξω τὸν τρίτον. οὐ δύναται δὲ ἡ παραβολή, ἵνα δὲ δύνηται ἡ παραβολή, δεῖ εἶναι ὡς δυ μία πρὸς ςςους δ̅. οὕτως ςςοι β̅ πρὸς μονάδας θ̅. καὶ ἐναλλάξ. ὡς δυ μία πρὸς ςςους β̅. οὕτως ςςοι δ̅ πρὸς μο θ̅. ἡ δὲ

δύναμις μία τῶν ςς β ἥμισύ ἐστιν τῷ πλήθει. ὡς εἰ οὖν καὶ ςςοὶ δ̅ τῶν μο θ ἥμισυς ἦν. ἦν ἂν δυνατὴ ἡ παραβολή. ἀλλὰ οἱ ςςοὶ δ̅ ἐκ τῆς ὑπεροχῆς εἰσὶν, ἧς ὑπερέχουσιν ςςοὶ ς̅ δυσὶν ἀριθμοῖς, ἀλλὰ οἱ ἀριθμοὶ ς̅ ἐκ τοῦ δὶς εἰσιν, ὑπὸ μο τριῶν καὶ ς α̅. τουτέστι δὶς τῶν μο τριῶν· αἱ δὲ μο θ̅. ὁ ἀπὸ μο τριῶν ἐστὶ τετράγωνος. ἀπήχθη οὖν μοι εὑρεῖν τινα ἀριθμὸν, ὡς τὰς μονάδας τρεῖς, ὅστις δὶς γινόμενος, καὶ λείψας δυάδα τὸ ἥμισυ ᾖ τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου. ἔστω ὁ ζητούμενος ς εἷς. οὗτος δὶς γινόμενος καὶ λείψας δυάδα, γίνεται ςςοὶ β̅. ὁ λείψει μο β. ὁ δὲ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος ἐστὶ δυ α̅. θέλομεν οὖν ἀριθμοὺς β̅ λείψει μο β̅. τὸ ἥμισυ εἶναι δυ α̅. δύναμις ἄρα α̅ ἴση ςςοῖς δ̅ λείψει μο δ̅. καὶ γίνεται ὁ ς β̅. νῦν ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ εἶχον τὸν μὲν πρῶτον ἀριθμὸν μο α. τὸν δὲ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν δυ α ςςοὺς β̅. δεῖ δὲ καὶ τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν προσλαβόντα τὸν δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω τὸν δυ α ςς β̅. ἕξω τὸν δεύτερον. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς α̅. καὶ μονάδων τοσούτων, ἵνα αἱ μονάδες δὶς γινόμεναι καὶ λείψασαι δυάδα, ἥμισυ ᾖ τοῦ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνου, καὶ προδέδεικται, καὶ ἔστι μο β̅. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς α μο β̅. καὶ μονάδων τοσούτων, ἵνα αἱ μονάδες δὶς γινόμεναι καὶ λείψασαι δυάδα, ἥμισυ ᾖ τοῦ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνου, καὶ προδέδεικται, καὶ ἔστι μο β. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς α μο β̅ ἔσται ἄρα δυ α ςς δ̅ μο δ̅. ἐὰν ἄρω τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν, τουτέστι δυ α ςςοὺς β̅ λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ δεύτερος ςς β̅ μο δ̅. εἰ δὲ καὶ τὸν ὑπὸ τριῶν στερεὸν μερίσω εἰς τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου, τουτέστι εἰς ἀριθμοὺς β̅ μο δ̅. ἕξω τὸν τρίτον, καὶ ἔστιν ὁ μερισμὸς ς τὸ ἥμισυ. καὶ λοιπόν ἐστι τὸν ἐκ τριῶν στερεὸν μετὰ τοῦ τρίτου ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς μετὰ τοῦ τρίτου ἐστὶ δυνάμεις α̅ ἀριθμοὶ β̅ καὶ ἥμισυ. ἴσος τετραγώνῳ δυνάμεων δ̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε̅ ς. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ς ς. ὁ δὲ δεύτερος λδ̅ ς. ὁ τρίτος β̅ ς καὶ ἥμισυ.

at 1 Q. ſemiſſis eſt (quantum ad vnitates attinet) de 2 N. vt ſi 4 N. quoque eodem modo fuiſſent ſemiſſis ex 9. inſtitui poſſet diuiſio. Atqui 4 N. oriuntur ex eo quo 6 N. ſuperant 2 N. Sed 6 N. orti ſunt ex duplo eius quod fit ex 3. in 1 N. hoc eſt ex duplo ternarij. Vnitates autem 9. eſt quadratus de 3. Cogor igitur inuenire numerum loco ipſius 3. cuius duplum multatum binario ſit ſemiſſis quadrati ipſius numeri. Eſto quæſitus 1 N. Huius duplum binario multatum eſt 2 N. — 2. quadratus autem eiuſdem eſt 1 Q. Volumus igitur 2 N. —2. eſſe dimidium de 1 Q. Proinde 1 Q. æquatur 4 N. — 4. & fit 1 N. 2. Reuertor nunc ad primò propoſitum. Poſueram primum 1. ſolidum autem ſub tribus contentum 1 Q. + 2 N. Oportet autem ſolidum adſumpto ſecundo facere quadratum. Ergo ſi ab aliquo quadrato ſubduxero 1 Q. + 2 N. habebo ſecundum. Formo quadratum ab 1 N. & tot vnitatibus, vt duplum vnitatum dempto binario ſit dimidium quadrati earum, eas autem iam oſtenſum eſt eſſe 2. Formo ergo quadratum ab 1 N. + 2. is eſt 1 Q. + 4 N. + 4. Aufero hinc ſolidum ſub tribus contentum, nimirum 1 Q. + 2 N. relinquitur ſecundus 2 N. + 4. Itaque ſi ſolidum ſub tribus contentum diuido per productum ex primo in ſecundum, nempe per 2 N. + 4. habeo tertium, nimirum $\frac{1}{2}$ N. Reſtat vt ſolidus ſub tribus contentus adſcito tertio faciat quadratum, ſed ſolidus ille adſcito tertio facit 1 Q. + 2 $\frac{1}{2}$ N. Hoc ergo æquatur quadrato 4 Q. & fit 1 N. $\frac{5}{6}$ Ad poſitiones. Erit primus $\frac{6}{6}$. ſecundus $\frac{34}{6}$. tertius $\frac{2}{6}\frac{1}{2}$.

IN QVAESTIONEM XXIII.

OPERATIO Diophanti ſubtilis eſt, ſed tamen perſpicua. Lemma quo quærit numerum, cuius duplum binario multatum ſit ſemiſſis quadrati eiuſdem numeri, ſoluitur per tertiam regulam compoſitarum, nam manent 4 N. æquales 1 Q. + 4. & quia quadratus ſemiſſis Numerorum æquatur vnitatibus, ſequitur ipſum ſemiſſem Numerorum eſſe valorem Numeri, vt liquet ex ipſius regulæ demonſtratione. Verùm alicui non immeritò videri poſſit caſu quodam fieri vt lemmatis huius ſolutio contingat rationalis, cùm regulæ compoſitæ ſi nulla cautio adhibeatur ſolutionem vt plurimum exhibeant irrationalem. Quamobrem vt hoc ſcrupulo careamus, aliam placet tradere operationem ſimilem prorſus illi qua in ſequenti quæſtione vtitur Diophantus. Ponatur primus numerus 1 N. ſolidus autem ſub tribus contentus eſto 1 Q. — 1 N. ſic enim primo adſumpto fiet quadratus.

Iam ſi ſolidus ſub tribus contentus per primum diuidatur, quotiens 1 N. − 1 erit productus ex ſecundo in tertium. Ponatur ſecundus 1. erit tertius 1 N. − 1. Supereſt vt ſolidus 1 Q. − 1 N. tam ſecundo quàm tertio adſcito faciat quadratum. At ſecundo adſcito facit 1 Q. + 1 − 1 N. adſcito tertio facit 1 Q. − 1. vterque igitur æquatur quadrato. Hìc iam duplicata occurrit æqualitas, quæ reſoluenda eſt modo quem ad decimam quintam tertij explicauimus, quoque rurſus vſus eſt Diophantus vigeſima & vigeſima prima eiuſdem. Horum videlicet interuallum eſt 2 − 1 N. proinde quæro duos numeros, quorum mutuo ductu id fiat ita vt tam in ſemiſſe ſummæ ipſorum, quàm interualli, inueniatur 1 N. ſunt hi $\frac{1}{2}$ & 4 − 2 N. horum ſummæ ſemiſſis quadratus æquatur 1 Q. + 1 − 1 N. & fit 1 N. $\frac{65}{56}$. tantus eſt primus, ſecundus 1. tertius $\frac{9}{56}$. qui ſoluunt quæſtionem. Nam ſolidus ſub ipſis contentus eſt $\frac{585}{3136}$. qui adſumens ſigillatim ipſos tres numeros, facit quadratos $\frac{4225}{3136}$. $\frac{3721}{3136}$. $\frac{1089}{3136}$. quorum latera ſunt $\frac{65}{56}$. $\frac{61}{56}$. $\frac{33}{56}$.

Quoniam verò ſiue ita opereris, ſiue ſecundum Diophantum, ſemper vnus quæſitorum ponitur vnitas, placet explicare modum quo perficiatur operatio Diophanti, & reddatur vniuerſalior, ita vt primus ſtatuatur quilibet quadratus numerus, & abſque lemmate illo quo ad regulas compoſitas deuenitur, inſtituantur commodè poſitiones ſecundi & tertij. Ponatur ergo primus, quilibet quadratus puta 9. & fingatur quadratus ab 1 N. + 3. is erit 1 Q. + 6 N. + 9. vnde auferendo 9. ſtatuatur 1 Q. + 6 N. pro ſolido ſub tribus numeris contento. Itaque quoniam primus eſt 9. oportet talem ſtatui ſecundum, vt eo ducto in 9. per productum diuidi poſſit ſolidus 1 Q. + 6 N. vt oriatur ex hac diuiſione tertius. Fingatur igitur quadratus ab 1 N. + 6. (tot ſcilicet vnitatibus quot ſunt Numeri in ſolido, ſicut fecit Diophantus, eſtque hæc regula generalis) erit is 1 Q. + 12 N. + 36. vnde auferendo ſolidum, reſtat ſecundus 6 N. + 36. quo ducto in primum 9. fit 54 N. + 324. per quem ſi diuidas ſolidum 1 Q. + 6 N. oritur tertius $\frac{1}{54}$ N. Supereſt igitur vt ſolidus adſumpto tertio faciat quadratum, facit autem 1 Q. + 6 $\frac{1}{54}$ N. hoc ergo æquatur quadrato. Eſto quadrato 2 $\frac{1}{4}$ Q. fiet 1 N. N. $\frac{130}{27}$. Ad poſitiones. Erit primus 9. ſecundus $\frac{584}{9}$ tertius $\frac{65}{729}$. qui ſoluunt quæſtionem. Nam ſolidus ſub ipſis contentus eſt $\frac{341640}{6561}$ qui ad adſumens ſigillatim ipſos tres numeros, facit quadratos $\frac{400689}{6561}$. $\frac{767376}{6561}$. $\frac{342225}{6561}$. quorum latera $\frac{633}{81}$. $\frac{876}{81}$. $\frac{585}{81}$.

Porrò ne quis ſuperſit dubitandi locus, poſitionibus ita inſtitutis, diuiſionem ſolidi per productum ex primo in ſecundum ſemper commodè fieri (in quo totum negotium conſiſtit) ſic demonſtrabitur.

1 Q. + A 6 N. D 9.
1 Q. + B 12 N. + C. 36.
E 6 N. + C. 36.
F 54 N. + G 324.

Sit ſolidus 1 Q. + A certo Numerorum numero & ſemiſſis numeri A quadratus eſto D. primus quæſitorum numerorum. Tum fingatur quadratus ab 1 N. + A. qui ſit 1 Q. + B + C. patet ergo numerorum Numerum B. eſſe duplum ipſius A. & vnitates C. eſſe quadratum numeri A. Quare cùm auferetur ſolidus 1 Q. + A. à quadrato 1 Q. + B + C. relinquetur E + C. eritque E. æqualis ipſi A. cùm ſuperſit E. auferendo A. ex B. duplo ſui. Cæterùm conſtat ex modo operandi tradito E. + C. fore hypoſtaſim ſecundi Numeri. Ducatur ergo primus D. in ſecundum E + C. & fiat F + G. dico per hoc productum commodè diuidi ſolidum 1 Q. + A hoc eſt eandem eſſe rationem 1 Q. ad F. quæ eſt A ad G. Nam quoad ſpecierum denominationes ſpectat patet quadratos ad Numeros ſe habere vt Numeri ad vnitates. Quare reſtat vt probetur ipſos numeros à ſpeciebus denominatos eandem quoque ſeruare rationem, hoc eſt eſſe 1 ad F. ſicut A ad G. Quia igitur ducto eodem D. in ipſos E C. fiunt F G. erit F. ad G. vt E. ad C. hoc eſt vt A. ad C. (cùm A E. oſtenſi ſint æquales) ſed vt A. ad ſuum quadratum C. ita & vnitas ad A. Igitur vt 1. ad A. ſic & F. ad G. & permutando vt 1. ad F. ſic A ad G. Quod erat demonſtrandum.

OBSERVATIO D. P. F.

Non ſolum abſque lemmate Diophanti, ſed etiam abſque duplicata æqualitate ſoluetur quæſtio. Ponatur ſolidum ſub tribus 1. q. − 2. N. primus numerorum ſit vnitas ſecundus 2. N. Ita namque duabus partibus propoſitionis ſatisfit, pro tertio diuidatur ſolidum ſub tribus 1. Q − 2 N. per rectangulum ſub primo & ſecundo quod eſt 2 N. orietur ex hac diuiſione tertius ½ N − 1 quo addito ad ſolidum ſub tribus fit 1 Q − ½ N. − 1 quod æquari debet quadrato. Oportet autem valorem numeri maiorem eſſe binario propter poſitiones iam factas. Æquetur igitur quadrato cuius latus 1 N − aliquo vnitatum numero binario maiori. Omnia conſtabunt.

QVÆSTIO XXIV.

INVENIRE tres numeros, vt ſolidus ſub ipſis contentus dempto quolibet

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς λείψας ἕκαστον, ποιῇ τετράγωνον.

τετάχθω ὁ πρῶτος ςˢ ᾱ. ὁ δὲ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς δʸ ᾱ ςˢ ᾱ. καὶ λείψας τὸν πρῶτον ποιεῖ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς δʸ ᾱ ἀριθμὸς ᾱ. ὁ δὲ πρῶτός ἐστι ςˢ ᾱ. ὁ ἄρα ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου ἔσται ςˢ ᾱ μ° ᾱ. ἔστω ὁ δεύτερος μ° ᾱ. λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ τρίτος ςˢ ᾱ μ° ᾱ. λοιπόν ἐστι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν λείποντα τὸν δεύτερον καὶ τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον. λιπὼν δὲ ὃν μὲν ποιεῖ δʸ ᾱ ςˢ ᾱ ⋔ μ° ᾱ ἴσον τετραγώνῳ. ὃν δὲ δʸ ᾱ ⋔ μ° ᾱ ἴσον τετραγώνῳ, καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης, καὶ λαμβάνω τὴν ὑπεροχήν· ἔστι δὲ ςˢ ᾱ. ἐκτίθεμαι ἀριθμοὺς δύο, ὧν τὸ ὑπὸ τηλικοῦτός ἐστι. τούτων ςˢ ᾱ. μετρείτω μ° τὸ ἥμισυ καὶ ςˢ β. τουτέστι κατὰ πλευρᾶς δύο τῆς δυνάμεως. καὶ ἔστιν αὐτῶν ὡς οἴδαμεν ἡ ἴσωσις. καὶ γίνεται ὁ ςˢ μ° ιζ ^η. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ιζ ^η. ὁ δὲ δεύτερος μ° ᾱ. ὁ δὲ τρίτος μ° κε ^η.

ipsorum faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. solidus autem 1 Q. + 1 N. & dempto primo facit quadratum. Et quia solidus sub tribus est 1 Q. + 1 N. at primus 1 N. erit productus ex secundo in tertium 1 N. + 1. esto secundus 1. ergo tertius erit 1 N. + 1. Superest vt solidus sub tribus dempto tam secundo quàm tertio faciat quadratum. Dempto verò secundo facit 1 Q. + 1 N. − 1 æqualem quadrato, at dempto tertio facit 1 Q. − 1. æqualem quadrato. Et existit duplicata æqualitas. Capio interuallum quod est 1 N. & expono duos numeros, quorum mutuo ductu id fiat, ij sunt qui metiuntur 1 N. nimirum $\frac{1}{2}$ & 2 N. quod est duplum lateris quadrati. Est ergo quam nostri æquatio, & fit 1 N. $\frac{17}{8}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{17}{8}$. secundus 1. tertius $\frac{25}{8}$.

IN QVAESTIONEM XXIV.

OPERATIO Diophanti facilis est, & vtitur duplicata æqualitate modo quem explicauimus ad decimam quintam tertij. Cæterùm moneo secundum poni posse non tantùm 1. sed & quemlibet vnitatum numerum. Ponatur verbi gratia 2. cùm igitur productus ex secundo in tertium sit 1 N. + 1. erit tertius $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{2}$. Solidus autem 1 Q. + 1 N. detracto tam secundo quàm tertio fiet, hinc 1 Q. + 1 N. − 2. inde 1 Q. + $\frac{1}{2}$ N. − $\frac{1}{2}$. quorum vterque quadrato æquandus est eorum interuallum est $\frac{1}{2}$ N. − 1 $\frac{1}{2}$. quod producunt mutuo ductu 2 N. − 6. & $\frac{1}{4}$. horum summæ semissis quadratus 1 Q. − $\frac{23}{4}$ N. + $\frac{529}{64}$. æqualis est 1 Q. + 1 N. − 2. & fit 1 N. $\frac{73}{48}$. tantus est primus, secundus 2. tertius $\frac{121}{96}$. qui soluunt quæstionem, nam solidus sub ipsis contentus est $\frac{8833}{2304}$. qui detractis sigillatim ipsis tribus numeris, facit quadratos $\frac{5329}{2304}$. $\frac{4225}{2304}$. $\frac{5929}{2304}$. quorum latera $\frac{73}{48}$. $\frac{65}{48}$. $\frac{77}{48}$.

Sed & quadratorum numerus qui ponitur in solido, pro arbitrio variari potest, dum ponatur quadratus. Etenim sit primus 1 N. solidus 4 Q. + 1 N. erit ergo productus ex secundo in tertium 4 N. + 1. Ponatur secundus quotlibet vnitatum, puta 2. erit igitur tertius 2 N. + $\frac{1}{2}$. superest vt solidus 4 Q. + 1 N. adscito, tum secundo, tum tertio faciat quadratum, proinde 4 Q. + 1 N. − 2 & 4 Q. − 1. N. − $\frac{1}{2}$ æquantur quadratis. Horum interuallum est 2 N. − 1 $\frac{1}{2}$ quod producatur ex $\frac{1}{2}$ in 4 N. − 3. Quare horum summæ semissis quadratus 4 Q. − 5 N. + $\frac{25}{16}$. æquatur 4 Q. + 1 N. − 2. & fit 1 N. $\frac{19}{32}$. tantus est primus. secundus 2. tertius $\frac{27}{16}$ qui soluunt quæstionem. nam solidus sub ipsis contentus est $\frac{513}{256}$ qui singulis detractis quadratos facit $\frac{361}{256}$. $\frac{1}{256}$. $\frac{81}{256}$. quorum latera $\frac{19}{16}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{9}{16}$.

Eodem prorsus artificio soluetur quæstio sequens, quæ & hîc desiderari videtur.

Inuenire tres numeros, vt qui sub iis continetur solidus detractus à quolibet ipsorum quadratum relinquat.

Esto primus 1 N. solidus autem 1 N. − 1 Q. vt detractus à primo quadratum relinquat. Iam solido per primum diuiso, fiet 1 − 1 N. productus ex secundo in tertium. Ponatur secundus 1. erit tertius 1 − 1 N. superest vt ab vtroque detrahendo solidum 1 N. − 1 Q. supersint quadrati, & remanent 1 Q. + 1 − 1 N. & 1 Q. + 1 − 2 N. vterque igitur horum æquatur quadrato. Eorum interuallum est 1 N. quod fit ex 2 N. in $\frac{1}{2}$. Quare horum summæ semissis quadratus, puta 1 Q. + $\frac{1}{2}$ N + $\frac{1}{16}$. æquatur 1. Q. + 1 − 1 N. vnde fit 1 N. $\frac{5}{8}$. tantus est primus, secundus 1. tertius $\frac{3}{8}$. & soluunt quæstionem. Nam solidus sub ipsis contentus est $\frac{15}{64}$ qui à quolibet sigillatim detractus relinquit quadratus $\frac{25}{64}$. $\frac{49}{64}$. $\frac{9}{64}$.

QVAESTIO XXV.

ΔΟΘΕΝΤΑ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς, καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν, κύβον παρὰ πλευράν. ἔστω ὁ δοθεὶς ὁ ς.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione fit cubus suo multatus

latere. Esto datus 6. Ponatur primus 1 N. relinquitur ergo secundus 6 — 1 N. Superest vt productus eorũ multiplicatione sit cubus suo multatus latere. Est autem hic productus 6 N. — 1 Q. Hunc ergo æquari oportet cubo cui suum desit latus. Formo cubum à numeris quotlibet cum defectu vnitatis, esto à 2 N. — 1. huius cubus latere detracto fit 8 C. + 4 N. — 12 Q. Hæc æquantur 6 N. — 1 Q. & si numeri vtrimque multitudine æquales essent, restarent cubi æquales quadratis, & rationali numero exprimeretur solutio. At 4 N. proficiscuntur ab excessu ex ter 2 N. supra 2. N. & si ter 2 N. amittãt 2 N. fiunt vtique bis 2 N. At verò 6. dantur ex hypothesi. Eò itaque redactus sum vt inueniam loco 2 N. aliquem numerum cuius duplum faciat 6. Est autem 3. huiusmodi numerus. Quærens ergo 6 N. — 1 Q. æquales cubo cui suum latus deest, statuo cubi latus 3 N. — 1. & huius cubus latere ipso multatus facit 27 C. + 6 N. — 27 Q. quod æquatur 6 N. — 1 Q. & fit 1 N. $\frac{26}{27}$. Ad positiones, erit primus $\frac{26}{27}$. At secundus $\frac{136}{27}$.

τετάχθω ὁ πρῶτος ἀριθμῶν α̅ λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται μο ς̅ λεῖψει ςοῦ α̅. λοιπὸν δὴ εἶναι τὸν ὑπ' αὐτῶν, κύβον παρὰ πλευράν. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστιν ἀριθμῶν ς̅ λεῖψει δυν α̅. ταῦτα ἴσα κύβῳ παρὰ πλευράν. πλάσσω κύβον ἀπὸ ςς ὅσων δή ποτε λεῖψει μο α̅. ἔστω δὲ ἀπὸ ςς β̅ ⋔ μο α̅. καὶ ὁ ἀπὸ τούτου κύβος λείψας αὐτὸν ποιεῖ κυ η̅ ἀριθμοὺς δ̅ ⋔ δυ ιβ̅. ταῦτα ἴσα ςςοῖς ς̅ λεῖψει δυ α̅. καὶ εἰ ἦσαν οἱ ςςοὶ ἐν ἑκατέρᾳ τῇ ἰσώσει ἴσοι, λοιπὸν ἐγίνετο ἰσῶσαι κύβοις δυνάμεσι, καὶ ὁ ςὸς ἦν ῥητός. ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ δ̅. ἐκ τῆς ὑπεροχῆς εἰσιν ὑπὲρ ςςοὺς δύο, τουτέστιν ἐκ τῶν τρὶς τῶν β̅ ςς. καὶ ἐὰν τρὶς οἱ δύο ἀριθμοὶ λείψωσι ςςοὺς β̅. ποιοῦσι δὶς τοὺς ἀριθμοὺς β̅. οἱ δὲ ς̅. τυχόντες εἰσὶ κατὰ τὴν ὑπόστασιν. ἀπῆκται οὖν μοι εὑρεῖν τινα ςὸν, ὡς τοὺς ἀριθμοὺς β̅. ὃς δὶς γινόμενος ποιεῖ ς̅. ἔστι δὲ ὁ γ̅. ζητῶ οὖν ςςοὺς ς̅ ⋔ δυν α̅. ἴσους κύβῳ παρὰ πλευράν. νῦν τάσσω τὴν τοῦ κύβου πλευρὰν ἀπὸ ςς γ̅ ⋔ μο α̅. καὶ ὁ ἀπὸ τούτου κύβος λείψας αὐτὸν ποιεῖ κυ κζ̅ ςςοὺς ς̅ ⋔ δυ κζ̅ ἴσους ςςοῖς ς̅ ⋔ δυν α̅. καὶ γίνεται ὁ ςὸς κς̅ κζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κς̅ κζ. ὁ δὲ δεύτερος ρλς̅ κζ.

IN QVAESTIONEM XXV.

ARTIFICIOSE' Diophantus vt æquet 6 N. — 1 Q. cubo multato suo latere, fingit cubum à 3 N. — 1. vt in cubo illius contineatur — 1. quod aboleatur detractatione lateris, in quo etiam — 1. positum est. At Numeri aboleantur per Numeros qui sunt ex altera æquationis parte, & sic remaneat æqualitas inter cubos & quadratos. Vt autem in cubo multato suo latere reperiantur 6 N. cùm ex formatione cubi tradita ad primam huius constet numerum Numerorum in cubo contentorum triplum fore numeri Numerorum positorum in latere, quia in latere cum Numeris ponitur vnitas; oportet vtique talem poni in latere numerum Numerorum, à cuius triplo auferendo ipsum numerum, supersit 6. sed à triplo alicuius numeri auferendo ipsum numerum, superest duplum eiusdem numeri. Igitur rectè concludit Diophantus ponendum in latere cubi, numerum Numerorum, cuius duplum sit 6. hoc est 3. Itaque nulla hic solutionum varietas accidit, cùm per hujusmodi operationem vnica duntaxat reperiri possit solutio. Verùm inde formatur Canon satis expeditus.

Dodrantem quadrati dati numeri vnitate multatum diuide per octantem cubi eiusdem, orietur primus quæsitorum. Quare huius subtractione à dato numero, habebis secundum. Porrò productus ex primo in semissem dati numeri vnitate multatus, est latus cubi quæsiti.

Eodem quoque artificio soluetur huiusmodi quæstio.

Inuenire duos numeros dato interuallo differentes, vt productus eorum multiplicatione sit cubus suo multatus latere.

Sit datum interuallum 6.

Ponatur primus 1 N. secundus 6 + 1 N. erit productus 6 N. + 1 Q. qui æquandus est cubo multato suo latere, qui ob causam supra traditam fingi debet à latere 3 N. — 1. fietque cubus suo latere multatus 27 C. + 6 N. — 27 Q. æqualis 6 N. + 1 Q & fit 1 N. $\frac{28}{27}$. tantus est primus. Secundus autem $\frac{190}{27}$. & soluunt quæstionem, nam productus eorum multiplicatione $\frac{5320}{729}$. est cubus $\frac{6859}{729}$. multatus suo latere $\frac{19}{9}$. Hinc fit Canon.

Dodrantem quadrati dati numeri vnitate auctum, diuide per octantem cubi eiusdem, orietur primus quæsitorum. Cui addendo datum interuallum, fiet secundus. Porrò productus ex primo in semissem dati numeri vnitate multatus, est latus cubi quæsiti.

QVÆSTIO XXVI.

ΔΟΘΕΝΤΑ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς ποιῇ κύβον, οὗ ἡ πλευρὰ ᾖ ἴση ταῖς ὑπεροχαῖς αὐτῶν συντεθείσαις. ἔστω ὁ δοθεὶς ὁ δ̄. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τριῶν στερεὸς κύβος ἐστίν, ἔστω κυ η̄. οὗ πλευρά ἐστι ςςοὶ β̄. ἀλλὰ ἡ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ πρώτου ὑπεροχή, καὶ ἡ τοῦ τρίτου καὶ δευτέρου ὑπεροχή, καὶ ἔτι τοῦ τρίτου καὶ τοῦ πρώτου δίς ἐστιν ὑπεροχὴ τοῦ τρίτου καὶ τοῦ πρώτου. τουτέστιν ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ τρεῖς ἄνισοι, ἡ τῶν τριῶν ὑπεροχὴ διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ἄκρων. ἔχομεν δ' ἐν τῇ ὑποστάσει τὴν πλευρὰν τοῦ κύβου ςςῶν β̄. δεῖ δὲ τοὺς ςςοὺς β̄ τῶν τριῶν τὴν ὑπεροχὴν εἶναι, ὁ τρίτος ἄρα τοῦ πρώτου ὑπερέχει ςῷ ᾱ. ἔστω ὁ πρῶτος ςς β̄. ἢ ὅσων δήποτε, ὁ τρίτος ἔσται ἄρα ςς γ̄. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς ἐστι κυ η̄. ὁ δὲ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου δυ ς̄. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται ςου ᾱ. ᾱ γων. καὶ εἰ μὲν ἦν ὁ δεύτερος τοῦ πρώτου μείζων, ἐλάσσων δὲ τοῦ τρίτου, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον. ἀλλ' ὁ δεύτερος ἐγένετο ἐκ τοῦ τῶν η̄ μερισθῆναι εἰς τὸ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου. ἀλλ' ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος οὐκ εἰσὶ τυχόντες, ἀλλὰ μονάδι διαφέροντες. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντας, ὅπως ὁ η̄ μεριζόμενος εἰς τὸ ὑπ' αὐτῶν ποιῇ τινα, ὃς τοῦ μὲν ἐλάσσονος μείζων ᾖ, τοῦ δὲ μείζονος ἐλάσσων. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμοῦ ᾱ. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ςο α μο ᾱ. καὶ τὸν η̄ ἐὰν μερίσω εἰς τὸν ὑπ' αὐτῶν, τουτέστιν εἰς δυ ᾱ ςοὶ ᾱ. εὑρεθήσεται ὁ μέσος μο η̄ μορίου δυ ᾱ ςου ᾱ. θέλομεν δὲ τοῦτον μείζονα μὲν εἶναι ςου ᾱ. ἐλάσσονα δὲ ςου ᾱ μο ᾱ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ἐλάσσων ἐστὶ μονάδος μιᾶς. ὥστε ὁ δεύτερος μετὰ μονάδος μιᾶς μείζων ἐστὶ τοῦ πρώτου. ἀλλ' ὁ δεύτερος προσλαβὼν τὴν μονάδα καὶ ἀναλυθεὶς εἰς τὴν δύναμιν ᾱ. γίνεται δυ ᾱ ςο ᾱ μο η̄. μορίου δυ ᾱ. ςου ᾱ ὥστε ταῦτα μείζονά ἐστι ςου ᾱ μο ᾱ. καὶ πάντα ἐπὶ τὸ μόριον δυ ᾱ ςο ᾱ μο η̄. μείζονά εἰσιν κυ ᾱ. δυ β̄ ςου ᾱ καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, γίνονται μο η̄ μείζονες κυ ᾱ δυ ᾱ. πλάσσω κύβον ὃς ἔχει κύβον ᾱ. δύναμιν ᾱ ἔσται ἄρα ἡ πλευρὰ τοῦ κύβου ςου α, μο ᾱ γον. ἀλλ' ἐπεὶ μο η̄ μείζονες εἰσὶ κύβου ᾱ δυ ᾱ. ἐστὶ δὲ ὁ ἀπὸ ςου ᾱ μο ᾱ γου. κύβος μείζων κυ ἑνὸς δυ ᾱ. ἐὰν ἰσώσω καὶ τὰς πλευράς, τουτέστι μο β̄. ἴσαι ςου ᾱ μο ᾱ γου. γίνεται ὁ ςο μο ε̄ γων. ἐπὶ τὰς ὑποστά-

DATVM numerum diuidere in tres numeros, è quibus ortus solidus sit cubus latus habens summam interuallorum, quibus bini inter se distant. Esto datus 4. & quia solidus sub tribus contentus est cubus, esto 8 C. cuius latus 2 N. Iam interuallum primi & secundi, & interuallum secundi & tertij, itemque interuallum primi & tertij, duplum faciunt interualli primi & tertij. Hoc est. Si fuerint numeri tres inæquales, trium interualla sunt duplum interualli extremorum. Habemus autem in positione lateris cubi 2 N. Quare oportet 2 N. æquari summæ interuallorum. Proinde interuallum tertij suprà primum est 1 N. Esto primus numerorum quotlibet, puta 2 N. erit ergo tertius 3 N. Et quia solidus ex tribus ortus, est 8 C. at productus ex primo in tertium est 6 Q. erit vtique secundus $1 \frac{1}{3}$ N. Hoc loco si secundus tertio minor, maior primo extitisset soluta erat quæstio. Sed secundus prodiit diuiso 8 per productum ex primo in tertium. Primus autem & tertius non sunt temerè sumpti, sed vnitate differentes. Eò itaque deuenimus, vt quærendi sint duo numeri vnitate differentes, vt diuiso 8. per productum multiplicationis eorum, fiat quotiens minore illorum maior, & maiore minor. Ponatur minor 1 N. maior erit 1 N. + 1 & si diuidam 8. per productum multiplicationis eorum quod est 1 Q. + 1 N. fiet medius $\frac{8}{1Q. + 1N.}$ Volumus autem hunc maiorem quidem esse quàm 1 N. minorem verò quàm 1 N. + 1. Cùm igitur horum interuallum sit 1. erit interuallum primi & secundi vnitate minus, ideoque secundus addita vnitate maior erit primo. Atqui secundus adscita vnitate, & resolutus in minutiam, cuius denominator 1 Q. + 1 N. fit $\frac{1Q. + 1N. + 8}{1Q. + 1N.}$ Hoc ergo maius est quàm 1 N. + 1. & omnibus per denominatorem multiplicatis fit 1 Q. + 1 N. + 8. maior quam 1 C. + 2 Q. + 1 N. Auferantur similia à similibus, relinquitur 8. maior quàm 1 C. + 1 Q. Formo cubum

bum in quo sit 1 C. + 1 Q. erit vtique latus eius 1 N. + $\frac{1}{3}$. & quoniam 8. maius sunt quàm 1 C. + 1 Q. Cubus quoque à latere 1 N. + $\frac{1}{3}$ maior est quàm 1 C. + 1 Q. si æquemus latera, nempe 2. & 1 N. + $\frac{1}{3}$. fiet 1 N. $\frac{5}{3}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{8}{3}$. secundus $\frac{9}{5}$. tertius $\frac{5}{3}$. & omnibus per 15. multiplicatis. Erit primus 40. secundus 27. tertius 25. Communis enim denominator hic abiicitur, & inuenti sunt tres numeri, quorum ex multiplicatione ortus solidus, est cubus latus habens summam interuallorum ipsorum. Pono ergo primum 40 N. secundum 27 N. tertium 25 N. & est solidus sub ipsis contentus cubus cuius latus æquatur interuallis ipsorum simul junctis. Volo autem trium summam æquari dato numero 4. Igitur 92 N. æquantur 4. & fit 1 N. $\frac{1}{23}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{40}{23}$. secundus $\frac{27}{23}$. tertius $\frac{25}{23}$.

στῆς. ἔσται ὁ πρῶτος η̄ γων. ὁ δεύτερος θ̄ εων. ὁ τρίτος ε̄ γων. καὶ πάντα εἰς πεντεκαίδεκα. ἔσται ὁ πρῶτος μ̄. ὁ δεύτερος κζ̄. ὁ τρίτος κε̄. κοινὸν γὰρ ἤρθη τὸ ιε μόριον, καὶ εὑρημένοι εἰσὶν τρεῖς ἀριθμοί. ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς ᾖ κύβος πλευρὸν ἔχων τὰς ὑπεροχὰς αὐτῶν συντεθείσας. τάσσω τοίνυν τὸν μὲν πρῶτον ςς μ̄. τὸν δὲ δεύτερον ςς κζ̄. τὸν δὲ τρίτον ςς κε̄. καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς κύβος, οὗ ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπεροχαῖς αὐτῶν συντεθείσαις. θέλω δὲ τοὺς τρεῖς ἴσους εἶναι δοθεῖσι μονάσιν. ἐδόθησαν δὲ μο δ̄. ἀριθμοὶ ἄρα ϟβ̄ ἴσοι μο δ̄. καὶ γίνεται ὁ ς α κγων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̄ κγων. ὁ δὲ δεύτερος κζ̄ κγων. ὁ δὲ τρίτος κε̄ κγων.

IN QVAESTIONEM XXVI.

QVÆRENS Diophantus tres numeros quorum summa sit 4. Ita vt solidus sub ipsis contentus sit cubus latus habens summam interuallorum quibus bini inter se distant, seu quod idem est, latus habens duplum interualli maximi & minimi, primùm quærit in vniuersum tres numeros reliquis propositi partibus satisfacientes nulla habita ratione summæ quàm conficiunt, his enim inuentis, puta 40. 27. 25. Iam statuit quæsitos numeros 40 N. 27 N. 25 N. quorum summam 92 N. æqualem faciendo ipsi 4. soluit quæstionem propositam. Itaque totum negotium in eo consistit vt inueniantur tres numeri, vt solidus sub ipsis contentus sit cubus latus habens duplum interualli maximi & minimi. Ponatur solidus ille quilibet cuborum numerus cubicus, puta 8 C. Cùm ergo illius latus sit 2 N. patet hoc esse duplum interualli maximi & minimi, quare ipsum interuallum maximi & minimi erit 1 N. Ponendi ergo sunt maximus & minimus certi numerorum numeri vnitate distantes; sed quia per eorum productum diuidendo 8 C. solidum, debet oriri medius qui minimo maior esse debet, & minor maximo, apparet necessitas assumpti lemmatis, quo quæruntur duo numeri vnitate distantes per quorum productum diuidendo 8. fiat quotiens minore maior, & minor maiore. In huius autem lemmatis enodatione quantum à scopo aberrarit Xilander, qui eius commentarios legerit, facilè intelliget. Nobis non vacat in refellendis inanibus illius coniecturis diutiùs immorari, quibus propositum est Diophantum explicare, non aliorum errata omnia persequi. Ponuntur ergo quæsiti numeri 1 N. & 1 N. + 1. fitque productus eorum multiplicatione 1 Q. + 1 N. per quem diuidendo 8. fit quotiens $\frac{8}{1Q. + 1N}$ qui debet esse maior quàm 1 N. minor quàm 1 N. + 1. Hîc si quis asserat Diophantum non satis accuratè rem persequi (nisi quid ex illius verbis exciderit) non falletur, vt puto. Nam vt vtrumque quod instat, ritè procuretur, omnia reducendo ad eandem denominationem patet 8. maiorem esse debere quàm 1 C. + 1 Q. minorem autem quàm 1 C. + 2 Q. + 1 N. & primum quidem sollicitè cauet Diophantus, postremum verò negligit omnino. Atqui si hoc neglecto ad illud tantùm respiciamus, sæpè in absurdum deueniemus. Nam verbi gratia vt 8. sit maior quàm 1 C. + 1 Q. sufficit si æquemus 8. alicui cubo maiori quàm 1 C. + 1 Q. dum is non sit maior quàm 8. At talis est 1 C. + 3 Q. + 3 N. + 1 Huic ergo æquemus 8. & latus lateri comparantes fient 2. æquales 1 N. + 1. & erit 1 N. 1. Quare quæsiti numeri erunt 1. & 2. quod est absurdum, nam per eorum productum 2. si diuidas 8. fiet 4. qui maior est vtroque, cùm deberet esse maior minimo, minor maximo. Non sufficit igitur vt cubus cui æquatur 8. sit maior quàm 1 C. + 1 Q. sed oportet simul vt sit minor quàm 1 C. + 2 Q. + 1 N. Hoc vt arte certa consequamur fingemus cubũ in quo præter 1 C. contineatur 1 Q. & aliquid amplius, quod tamen non æquet 2 Q. Quare cùm latus cubi ponendum sit 1 N. + aliquot vnitatibus, ac proinde quadratorum numerus in cubo contentorum sit triplum illarum vnitatum, patet in latere ponendas tot vnitates, vt earum triplum sit minus quàm 2. sed non minus quàm 1. Quare vtriusque trientem sumentes concludemus, fingendum latus cubi 1 N. +. tot vnitatibus quæ sint minus quàm $\frac{2}{3}$ sed non minus quàm $\frac{1}{3}$. sic Diophantus posuit hujusmodi latus 1 N. + $\frac{1}{3}$ quod æquans lateri ipsius 8. puta 2. inuenit valorem Numeri $\frac{5}{3}$. & si fingas latus 1 N. + $\frac{1}{2}$. hoc æquabitur 2. & fiet

1 N. $\frac{1}{2}$. Erunt ergo quæſiti duo numeri $\frac{3}{2}$ & $\frac{5}{2}$. quorum productus $\frac{15}{4}$ per quem diuidendo 8. fit medius $\frac{32}{15}$. tres enim $\frac{3}{2}$ $\frac{32}{15}$. $\frac{5}{2}$. ſatisfaciunt propoſito, hoc eſt ſolidus ſub ipſis contentus, eſt cubus latus habens ſummam interuallorum quibus bini inter ſe diſtant, & omnia reducendo ad integros, fient 45. 64. 75. per quos ſi velis ſoluere quæſtionem propoſitam, pones quæſitos Numeros 45 N. 64 N. 75 N. horum ſumma 184 N. æquatur 4. & fit 1 N. $\frac{1}{46}$ ſunt ergo quæſiti Numeri $\frac{45}{46}$. $\frac{64}{46}$. $\frac{75}{46}$.

Itaque vt compendioſiſſimè propoſitum lemma perficiatur, cùm fiat valor Numeri auferendo à binario vnitates poſitas in latere fictitio cubi, & oſtenſum ſit vnitates illas minores eſſe debere quàm $\frac{2}{3}$ non minores quàm $\frac{1}{3}$. his autem à binario detractis, ſuperſint $\frac{4}{3}$ & $\frac{5}{3}$. patet valorem Numeri maiorem eſſe debere quàm $\frac{4}{3}$ non maiorem quàm $\frac{5}{3}$. ſic ſumi poterunt pro valore Numeri $\frac{5}{4}$. $\frac{3}{2}$. $\frac{7}{5}$. $\frac{8}{5}$. & alij infiniti. Vnde conſtat allucinari Xilandrum, cùm aſſerit valorem numeri eſſe poſſe $\frac{5}{4}$. nam is cadit extra limites conſtitutos, eumque propoſito non ſatisfacere ſenties experiendo.

Reſtat videndum cur Diophantus loco ipſorum $\frac{8}{5}$. $\frac{9}{5}$. $\frac{5}{8}$. ſumat ipſos 40. 27. 25. in iiſdem rationibus. Quod ne cui ſcrupulum moueat, demonſtrabitur hoc Theoremate.

Si fuerint tres numeri, ita vt ſolidus ſub ipſis contentus, ſit cubus latus habens duplum interualli maximi & minimi, & tres alij quicunque in iiſdem rationibus idem præſtabunt.

F 27000.
D 30. E 15.
A 40. B. 27. C 25.
G 80. H 54. K 50.
L 60. M 30.
P 216000.

Sint tres A B C. & interuallum extremorum eſto E. cuius duplum D. At ſolidus ſub ipſis A B C. eſto F cubus, cuius latus ſit D. & ſumantur tres G H K in iiſdem rationibus cum ipſis A B C. & ſit extremorum interuallum M. cuius duplum L. & ſolidus ſub ipſis G H K eſto P. dico P. eſſe cubum cuius latus eſt L. Etenim cùm latera A B C. G H K ſint proportionalia, erunt ſolidi F P ſimiles ex definitione. Quare [1] habebunt inter ſe rationem cubi ad cubum, ac proinde cùm F ſit cubus, [2] erit & P cubus. Quoniam verò ex hypotheſi eſt A ad C. vt G ad K. erit diuidendo E ad C. vt M ad K. ac proinde erit D, duplus ipſius E, ad C; ſicut L. duplus ipſius M. ad K, & permutando erit D ad L. vt C ad K. Atqui ſolidi ſimiles F P [3] ſunt in triplicata ratione laterum C K. & ſimiliter cubi F P. [4] ſunt in triplicata ratione lateris D ad latus ipſius P. Igitur eſt C ad K. ſicut D ad latus cubi P. ſed vt C ad K. ſic eſt D ad L. vt oſtenſum eſt. Igitur L eſt latus cubi P. Quod erat demonſtrandum.

[1] 27 Octaui.
[2] 25 Octaui.
[3] 19 Octaui.
[4] 12 Octaui.

Cæterùm eodem artificio ſoluetur huiuſmodi quæſtio.

Inuenire tres numeros, vt ſolidus ſub ipſis contentus ſit cubus, latus habens ſummam interuallorum, quibus bini inter ſe diſtant, ipſa autem ſumma interuallorum ſit datus numerus.

Eſto ſumma interuallorum 15. Quærentur vt prius tres numeri, ita vt ſolidus ſub ipſis contentus ſit cubus ſummæ interuallorum, & inuenientur 40. 27. 25. Quare ponentur quæſiti 40 N. 27 N. 25 N. & fit ſumma interuallorum 30 N. æqualis 15. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Sunt igitur quæſiti numeri $\frac{40}{2}$ $\frac{27}{2}$ $\frac{25}{2}$.

QVÆSTIO XXVII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν προσλαβὼν ἑκάτερον ποιῇ κύβον. τάσσω τὸν πρῶτον ἐκ κυβικῶν ςς. ἔστω δὲ ςς η̅. τὸν δὲ δεύτερον δυ α̅ ↑ μο α̅. καὶ συμφωνεῖ μοι ἓν ἐπίταγμα. ὁ γὰρ ὑπ᾽ αὐτῶν προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιεῖ κύβον. λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπ᾽ αὐτῶν προσλαβόντα τὸν δεύτερον ποιεῖν κύβον. ἀλλ᾽ ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν προσλαβὼν τὸν δεύτερον ποιεῖ κύβους η̅ δύναμιν α̅ λείψει ςς η̅ μο α̅ ἴσους κύβῳ. πλάσσω τὸν κύβον ἀπὸ ἀριθμῶν β̅ λείψει μο α̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιδ ιγ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ριβ ιγ. ὁ δὲ δεύτερος κζ ρξθ.

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione vtrolibet adiecto faciat cubum. Pono primum, aliquot numerorum cubicorum, puta 8 N. ſecundum verò 1 Q. − 1. Ita alteri poſtulatorum ſatisfit. Nam productus eorum multiplicatione adſcito primo, facit cubum. Reſtat vt idem productus adſcito ſecundo faciat cubum. Sed productus ille adſcito ſecundo facit 8 C. + 1 Q. − 8 N. − 1. hæc ergo æquantur cubo. Formo cubum à 2 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{14}{13}$. Ad poſitiones. erit primus $\frac{112}{13}$, ſecundus $\frac{27}{169}$.

IN QVAESTIONEM XXVII.

NVMERI cubo æquandi 8 C. + 1 Q. − 8 N. − 1. latus ingenioſè fingitur 2 N. − 1. vt cubo vtriuſque partis elidantur 8 C. − 1. & remaneat æqualitas inter Numeros & quadratos. Cæterùm poſitiones diuerſis modis inſtitui poſſunt. Nam primus quæſitorum poni poteſt quilibet Numerorum numerus ſiue cubicus, ſiue non, dum ſecundus ſtatuatur certus quadratorum numerus −

1. ita tamen vt ex primo in quadratos secundi fiat numerus cubus, ita si ponatur primus 4 N. ponetur secundus 2 Q. – 1. fitque productus 8 C. – 4 N. qui adscito primo cubum facit. Restat ergo vt idem productus adscito secundo cubum faciat, facit autem 8 C. + 2 Q. – 4 N. – 1. Hoc ergo cubo æquatur, cuius latus fingetur 2 N. – 1. & fiet 1 N. $\frac{5}{7}$. erunt ergo quæsiti numeri $\frac{20}{7}$ & $\frac{1}{49}$. qui soluunt quæstionem, nam eorum productus $\frac{20}{343}$ vtroque adscito cubos facit $\frac{1000}{343}$ & $\frac{27}{343}$. Verùm aduerte talem statuendum esse Numerorum numerum pro primo, vt sit maior vel æqualis numero quadratorum qui ponitur in secundo, nam si ponatur minor, æquatio quidem ritè procedet, sed valorem Numeri applicando positionibus, secundus inuenietur nihil, vel minor nihilo. Ita si ponas primum 2 N. secundum 4 Q. – 1. erit productus 8 C. – 2 N. qui adscito primo cubum facit. At idem productus adscito secundo facit 8 C. + 4 Q. – 2 N. – 1. æqualem cubo à latere 2 N. – 1. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Quare secundus inuenitur nihil. At si ponas primum 8 N. secundum 8 Q. – 1. fiet tandem 64 C. + 8 Q. – 8 N. – 1. æqualis cubo à latere 4 N. – 1. & fiet 1 N. $\frac{5}{14}$ eruntque quæsiti numeri qui suprà $\frac{20}{7}$ & $\frac{1}{49}$.

QVÆSTIO XXVIII.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, vtrolibet detracto faciat cubum. Vt prius ponatur primus 8 N. secundus autem 1 Q. + 1. & productus eorum multiplicatione, dempto primo fit cubus; sed idem productus dempto secundo facit 8 C. + 8 N. – 1 Q. – 1. Hoc æquatur cubo, & est impossibile. Statuo ergo rursus primum, numerorum cubicorum aliquot addita vnitate, puta, 8 N. + 1. secundum autem 1 Q. & productus eorum multiplicatione dēpto secundo fit cubus; sed dempto primo fit 8 C. + 1 Q. – 8 N. – 1. Hæc æquantur cubo à latere 2 N. – 1. & fit 1 N. $\frac{14}{13}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{125}{13}$. secundus $\frac{196}{169}$.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας ἑκάτερον, ποιῇ κύβον. ὁμοίως ὁ πρῶτος τετάχθω κυβικῶν ςς η̅. ὁ δὲ δεύτερος δυ α̅ μο α̅ καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν πρῶτον, κύβος, ἀλλὰ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν δεύτερον ποιεῖ κυ η̅ ςς η̅ ⋔ δυ α̅ μο α̅. ταῦτα ἴσα κύβῳ. καὶ ἔστιν ἀδύνατον. τάσσω τοίνυν πάλιν τὸν πρῶτον κυβικῶν ςς μετὰ μο α̅. ἔστω ςς η̅ μο α̅. τὸν δὲ δεύτερον δυ α̅. καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν δεύτερον, κύβος, ἀλλὰ λείψας τὸν πρῶτον ποιεῖ κυ η̅ δυ α̅ λείψει ςς η̅ μο α̅. ταῦτα ἴσα κύβῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς β̅ ⋔ μο α̅. καὶ γίνεται ὁ ς ιδ ιγ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρκε ιγ. ὁ δὲ δεύτερος ρϟς ρξθ.

IN QVAESTIONEM XXVIII.

TEXTVS lacunas malè cùm repleuisset Xilander, non mirum est si Diophanti mentem minimè assequutus est. Attamen satis apparet Diophantum primò voluisse imitari operationem præcedentis quæstionis. Quemadmodum enim posuerat ibi primum 8 N. secundum 1 Q. – 1 vt producto 8 C. – 8 N. addendo primum fieret cubus. Ita hîc ponere voluit primum 8 N. secundum 1 Q. + 1. vt à producto 8 C. + 8 N. detrahendo primùm, cubus superesset. Verùm ab eodem producto auferendo secundum relinquebatur 8 C. + 8 N. – 1 Q. – 1. quod est impossibile cubo æquari, nam is cubus non potest fingi nisi à latere 2 N. – 1. vt tollantur cubi & vnitates. Quare hac æquatione tandem 11 Q. + 2 N. remanent æquales nihilo. Idcirco vt hoc incommodum vitetur aliter instituendæ sunt positiones, & primus ponendus est 8 N. + 1. secundus 1 Q. resque optimè succedit.

Cæterùm infinitis alijs modis institui possunt positiones, dum primus ponatur quilibet numerus Numerorum + 1. & secundus quilibet Quadratorum numerus, qui ductus in numerum Numerorum primi, cubum faciat. Ita si ponas primum 4 N. + 1. secundum 2 Q. erit productus 8 C. + 2 Q. qui multatus secundo, cubum relinquit. At multatus primo, manet 8 C. + 2 Q. – 4 N. – 1. qui æquabitur cubo à latere 2 N. – 1. & fiet 1 N. $\frac{5}{7}$. Erunt ergo quæsiti numeri $\frac{27}{7}$ & $\frac{50}{49}$ qui soluunt quæstionem, nam productus fit $\frac{1350}{343}$. Vnde auferendo ipsos numeros, remanent cubi $\frac{27}{343}$ & $\frac{1000}{343}$. Sed hîc etiam aduerte talem statuendum Numerorum numerum in primo, vt sit æqualis vel maior numero quadratorum qui ponitur pro secundo. Alioquin si ponatur minor, non poterit à producto detrahi vterque numerus. Ita si ponas primum 8 N. + 1. secundum 8 Q. res bene succedet, nam erit productus 64 C. + 8 Q. qui multatus secundo cubum relinquit, at multatus primo, remanet 64 C. + 8 Q. – 8 N. – 1. æqualis cubo à latere 4 N. – 1. & fit 1 N. $\frac{5}{14}$. Sunt ergo quæsiti numeri qui suprà $\frac{27}{7}$ & $\frac{50}{49}$. Sed si ponas primum 2 N. + 1. secundum 4 Q. erit productus 8 C. + 4 Q. qui detracto

ſecundo cubum relinquit, at primo detracto, relinquit 8 C. + 4 Q. − 2 N. − 1. æqualem cubo à latere 2 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. ſuntque quæſiti numeri 2. & 1. à quorum producto ſi primum auferas, nihil remanet.

QVÆSTIO XXIX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λείψῃ ποιῇ κύβον. ἐπεὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν συναμφότερον ποιεῖ κύβον ποιείτω μο ξδ. πάλιν ἐπεὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον, ποιεῖ κύβον, ποιείτω μο η. δὶς ἄρα συναμφότερος ποιῶν αὐτῶν τὴν ὑπεροχὴν, ἔσαι μο νϛ. ὥστε συναμφότερος ἔσαι μο κη. ἀλλὰ καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖ μο ξδ. λοιπὸς ἄρα ὁ ὑπ' αὐτῶν ἔσαι μο λϛ. ἀπῆκται οὖν μοι εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς, οἳ συντεθέντες ποιοῦσι μο κη. ὧν ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστὶ μο λϛ. τετάχθω ὁ μείζων ϛο α μο ιδ. ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσαι μο ιδ. λείψει ϛο α. λοιπόν ἐστι τὸν ὑπ' αὐτῶν τουτέστι μο ρϟϛ λείψει δυνάμεως α. ἰσῶσαι μο λϛ. καὶ γίνεται δυ α ἴση μο ρξ. καὶ εἰ ἦσαν μονάδες ρξ τετραγωνικαὶ, λελυμένον μὲν ἦν τὸ ζητούμενον. ἀλλ' αἱ μο ρξ. ὑπεροχή ἐστι ᾗ ὑπερέχουσι μο ρϟϛ τὰς λϛ. ἀλλ' αἱ μο ρϟϛ ἀπὸ μο ιδ ἐστὶ τετράγωνος. ὁ δὲ ιδ ἥμισύ ἐστι τῶν κη. ὥστε τὰ ρϟϛ τὸ ἥμισύ ἐστι τῶν κη ἐφ' ἑαυτό. ἀλλ' ὁ κη ἥμισύ ἐστι τῶν νϛ. ἀλλ' ὁ νϛ δύο κύβων ἐστὶ ὑπεροχὴ τοῦ ξδ καὶ τοῦ η. ὁ δὲ λϛ συναμφοτέρων ἐστὶ τῶν κύβων τὸ ἥμισυ. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο κύβους ὅπως τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τὸ τέταρτον, ἐφ' ἑαυτὸ γενόμενον, καὶ λείψας συναμφοτέρου τὸ ἥμισυ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ἡ τοῦ μείζονος κύβου πλευρὰ ϛο α μο α. ἡ τοῦ ἐλάσσονος ϛο α ⋔ μο α. καὶ γίνονται οἱ κύβοι ὁ μὲν μείζων κυ α δυ γ ϛϛ γ μο α. ὁ δὲ ἐλάσσων κυ α ϛϛ γ λείψει δυ γ μο α. καὶ τῆς τούτων ὑπεροχῆς τὸ τέταρτον δυ α. α ϛ μο α ϛ. ταῦτα ἐφ' ἑαυτά, γίνονται δυναμοδυνάμεις β. α δ δυ α. α ϛ μο α δ. ταῦτα ἐὰν λείψῃ συναμφοτέρου τῶν κύβων τὸ ἥμισυ, ὅπερ ἐστὶ κυ α ϛϛ γ. λοιπὸν γίνονται δυ δυ β. α δ δυ α. α ϛ μο α δ ⋔ κυ α ϛϛ γ ἴσαι τετραγώνῳ. καὶ πάντα τετράκις διὰ τὸ μόριον γίνεται δυ δυ θ δυ ϛ μο α λείψει κυ δ ϛϛ ιβ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ἀπὸ δυνάμεων τριῶν μο α ⋔ ϛϛ ϛ. αὐτὸς ἄρα ἔσαι δυ δυ θ δυ μβ μο α λείψει κυ λϛ ϛϛ ιβ ἴσων δυναμοδυνάμεσι θ δυ ϛ μο α ⋔ κυ δ ϛϛ ιβ.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, ſumma ipſorum ſiue addita, ſiue detracta cubum faciat. Quoniam productus eorum multiplicatione adſumens vtrumque facit cubum, faciat 64. Rurſus quia idem productus vtroque detracto facit cubum, faciat 8. Itaque duplum ſummæ numerorum æquatur interuallo horum cuborum 56. Proinde ſumma numerorum eſt 28. ſed productum multiplicationis cum ſumma facit 64. relinquitur ergo productum multiplicationis eſſe 36. Eo itaque loci deducta res eſt, vt inueniendi ſint duo numeri, quorum ſumma ſit 28. productum multiplicationis 36. Ponatur maior 1 N. + 14. Minor ergo erit 14 − 1 N. ſupereſt vt productum multiplicationis nimirum 196 − 1 Q. æquetur 36. & fit 1 Q. æqualis 160. & ſi vnitates 160. eſſent quadratæ, ſoluta eſſet quæſtio. Sed 160. eſt exceſſus quo 196. ſuperat 36. & 196. eſt quadratus ipſius 14. qui eſt ſemiſſis de 28. Quare 196 eſt ſemiſſis de 28. in ſe ductus. Atqui 28. eſt ſemiſſis ipſius 56. atque ideo 14. eſt quarta pars eiuſdem 56. Cæterùm 56. eſt interuallum duorum cuborum 64. & 8. ipſe verò 36. eſt ſummæ cuborum ſemiſſis. Itaque eo redactus ſum vt inueniam duos cubos quorum interualli quadrans in ſe ſi ducatur, & ab hoc quadrato auferatur ſummæ cuborum ſemiſſis, fiat quadratus. Sit latus maioris cubi 1 N. + 1. minoris verò 1 N. − 1. & fiunt cubi maior quidem 1 C. + 3. Q. + 3 N. + 1. minor autem 1 C. + 3 N. − 3 Q. − 1. & horum interualli quadrans eſt 1 $\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{2}$ hoc in ſe ducto fiunt 2 $\frac{1}{4}$ QQ. + 1 $\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{4}$. hinc ſi auferatur ſummæ cuborum ſemiſſis, nempè 1 C. + 3 N. relinquitur 2 $\frac{1}{4}$ QQ. + 1 $\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{4}$ − C. − 3 N. Hoc æquatur quadrato. Sed propter minutias, omnia quadruplicentur, fit 9 QQ. + 6 Q. + 1 − 4 C. − 12 N. hæc quadrato æquantur à latere 3 Q. + 1 − 6 N. Ipſe quadra-

tus est 9 QQ. + 42 Q. + 1 − 36 C. − 12 N. qui æquatur 9 QQ. + 6 Q. + 1 − 4 C. − 12 N. Communis addatur defectus, & à similibus auferantur similia, relinquuntur 32 C. æquales 36 Q. & fit 1 N. $\frac{9}{8}$. Ad positiones. Posueram latera cuborum, hoc quidem 1 N. + 1. illud verò 1 N. − 1. Erit ergo alterum $\frac{17}{8}$. alterum $\frac{1}{8}$. Ipsi ergo cubi erunt, primus quidem $\frac{4913}{512}$. secundus autem $\frac{1}{512}$. venio ad id quod initio propositum erat, ac quæro quomodo dentur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione cum vtriusque summa faciat $\frac{4913}{512}$ & idem productus detracta eadem summa faciat $\frac{1}{512}$. Quoniam ergo productum multiplicationis additum summæ facit cubum $\frac{4913}{512}$. & idem productum detracta summa facit cubum $\frac{1}{512}$. horum cuborum interuallum, nempè $\frac{4912}{512}$. est vtique duplum summa. Ipsa igitur summa est $\frac{2456}{512}$. sed productum multiplicationis cum summa facit $\frac{4913}{512}$. & summa inuenta est $\frac{2456}{512}$. erit igitur productum multiplicationis $\frac{2457}{512}$. Quod reliquum est vt conficiatur demonstratum est libro primo, sed explicandæ caussa quæstionis denuo ostendamus. Ponatur primus 1 N. cum semisse vnitatum quæ summam exprimunt, hoc est $\frac{1228}{512}$. secundus erit $\frac{1228}{512}$ − 1 N. & est summa illorum $\frac{2456}{512}$. Sed productum multiplicationis est $\frac{1507984}{262144}$. − Q. hoc ergo æquatur $\frac{2457}{512}$ & omnia per denominatorem 262144. multiplicentur, & auferantur similia à similibus fiunt 262144. Q. æquales 250000. & fit 1 N. $\frac{500}{512}$. Ad positiones erit primus $\frac{1728}{512}$. secundus $\frac{728}{512}$. & demonstratio est euidens.

καὶ κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, καὶ λοιποὶ κύβοι λβ ἴσοι δυνάμεσι λϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς θ η^{ων}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὰς τῶν κύβων πλευρὰς, τὴν μὲν ἀριθμοῦ α καὶ μονάδος α. τὴν δὲ ἀριθμοῦ α λείψει μονάδος α. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ιζ η^{ων}. ἡ δὲ α η^{ων}. αὐτοὶ ἄρα οἱ κύβοι ἔσονται ὁ μὲν πρῶτος δϡιγ φιβ^{ων}. ὁ δὲ δεύτερος α φιβ^{ων}. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ ζητῶ τὸν ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν κύβον τὸν δϡιγ φιβ^{ων}. τὸν δὲ ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον ποιεῖν κύβον τὸν α φιβ^{ων}. ἐπεὶ οὖν ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖ κύβον, τουτέστι μονάδας δϡιγ φιβ^{ων}, ὁ δὲ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον ποιεῖ κύβον, τουτέστι μονάδος α φιβ^{ων}. ὁ δὶς ἄρα συναμφότερός ἐστιν αὐτῶν ἡ ὑπεροχὴ, τουτέστι δϡιβ φιβ^{ων}. ὥστε συναμφότερος ἔσται βυνϛ φιβ^{ων}. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ἐστὶ δϡιγ φιβ^{ων}. ὧν συναμφότερος βυνϛ φιβ^{ων}. ἔσται ἄρα ὁ ὑπ' αὐτῶν μονάδων βυνζ φιβ^{ων} καὶ προδέδεικται αὕτη ἡ ἀπόδειξις ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. καὶ νῦν δὲ δειχθήσεται διὰ τὸ πρόβλημα. τετάχθω ὁ πρῶτος ἀριθμοῦ α καὶ μονάδων τῆς ἡμισείας, ὧν εἰσι συναμφότεροι, τουτέστι μονάδων ασκη φιβ^{ων}. ὁ δὲ δεύτερος ἔσται μονάδων ασκη φιβ^{ων} λείψει ἀριθμοῦ α. καὶ ἐστὶ μὲν συναμφότερος μονάδων βυνϛ φιβ^{ων}. ἀλλὰ ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστὶ μονάδων ρν. ζπηδ μορίου κϛ. βρμδ λείψει δυνάμεως α. ταῦτα ἴσα μονάσι βυνζ φιβ^{ων}. καὶ πάντα ἐπὶ μόριον τουτέστι κϛ. βρμδ. καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, γίνεται δυνάμεις κϛ. βρμδ ἴσαι μονάσι μυρ. κε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων φ φιβ^{ων}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος αψκη φιβ^{ων}. ὁ δεύτερος ψκη φιβ^{ων}. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XXIX.

HIC duo imprimis supponuntur à Diophanto.

Primùm interuallum cuborum qui fiunt addita & adempta summa numerorum producto multiplicationis ipsorum, esse duplum eiusdem summæ numerorum, quod facilè est demonstrare.

D 28. D 28.
A 8. B 36. C. 64.

Sit enim A cubus minor: C maior, & B productus multiplicatione quæsitorum numerorum, quorum summa D adempta ipsi B relinquat A, & addita eidem B. faciat C. dico interuallum cuborum C A esse duplum ipsius D. & patet, cùm enim interuallum duorum C B sit D. & duorum B A. interuallum sit rursus D. euidens est extremorum C A. interuallum esse duplum ipsius D. Quod erat propositum.

Secundò supponit Diophantus ipsum productum B. semissem esse summæ cuborum A C. quod etiam euidens est, cùm enim tres A B C. sint in medietate arithmetica ex hypothesi, erit medius B. semissis summæ extremorum. Quod erat intentum. Hinc apparet, quod ait Diophantus quærendos esse duos numeros, quorum summa sit D. productum B. Id autem fiet per trigesimam primi, cuius operationem hîc repetit. Cùm autem ex huiusmodi operatione, vel ex Canone inde eruto constet, vt quæstio solui possit oportere à quadrato semissis summæ auferendo productum, relinqui quadratum, sequitur oportere vt à quadrato semissis ipsius D. auferendo B. relinquatur quadratus. Atqui, vt ostensum est, D. est semissis interualli cuborum A C. ac proinde semissis ipsius D. est 5. 1. porism.

quadrans interualli eorundem cuborum ; & rursus , vt ostensum quoque est , B. est semissis summæ cuborum A C. Igitur euidenter colligitur necessitas lemmatis à Diophanto assumpti, quo quæruntur tales duo cubi , vt à quadrato quadrantis interualli eorum auferendo semissem summæ eorundem, relinquatur quadratus. In huius lemmatis explicatione multa occurrunt obseruanda.

Primò aduerte latera cuborum poni 1 N. + 1. & 1 N. − 1. vt cuborum tam summa quàm interuallum ex paucissimis constet speciebus. Nam horum laterum cubi prorsus similes sunt , nisi quod quadrati & vnitates deficiunt in cubo residui , cùm adsint in cubo binomij , sicut docuimus ad primam huius , cubi genesim explicantes. Vnde colligendo summam cuborum , cùm quadrati & vnitates ob signa contraria sese mutuò elidant , fit vt summa cuborum constet solùm ex cubis & Numeris , vt in hypothesi sit summa cuborum 2 C. + 6 N. similiter cuborum interuallum ex duabus tantùm componitur speciebus , ex quadratis scilicet , & vnitatibus quia cuborum & Numerorum iidem vtrimque reperiuntur numeri, sic in hypothesi est cuborum interuallum 6 Q. + 2. cuius quadratus est $1\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{2}$.

Secundò aduerte quadratum huius quadrantis , necessariò esse trinomium constans ex quadrato quadratis , quadratis , & vnitatibus, vt colligere ex genesi quadrati quam tradidit Euclides quarta secundi. fit enim huiusmodi quadratus $2\frac{1}{4}$ QQ. + $1\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{4}$. Quare cùm ab hoc quadrato auferri debeat semissis summæ cuborum , qui constat , vt iam diximus , ex cubis & Numeris , necesse est hanc subtractionem fieri per signum defectus , cùm in dicto quadrato non reperiantur species eorundem nominum. Itaque fiet huiusmodi subductione qui nomium constans ex quadrato quadratis, quadratis , & vnitatibus , cum defectu cuborum & Numerorum , nimirum $2\frac{1}{4}$ QQ. + $1\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{4}$ − 1 C. − 3. N. qui æquandus est quadrato , vt soluatur propositum lemma. Sed ad vitandas fractiones , omnia per 4. multiplicantur , & fit 9 QQ. + 6 Q. + 1 − 4 C. − 12 N. æqualis quadrato.

Tertiò aduerte ita formandum latus propositi quinomij , vt æqualitas consistat inter duas species proximas. Quare tria potissimum sunt præstanda. Primò tollendi sunt quadrato quadrati. Secundò vnitates quoque tollendæ. Tertiò vel Numeri tollendi sunt , vt æqualitas consistat inter cubos & quadratos. vel tollendi sunt cubi , vt æquales maneant quadrati & Numeri. Duo quidem præstabuntur facilè , quia tam quadrato quadratorum quàm vnitatum numerus , quadratus est , puta 9 QQ. & 1. quare si in latere fictitio ponantur horum quadratorum latera , nimirum 3 Q. & 1. habebitur intentum. Tertium verò , vt perficiatur, adiicienda est in latere fictitio tertia species , qua vel cubi vel Numeri elidantur , vnde duplex æquationis ratio consurgit , quarum primam duntaxat prosequutus est Diophantus , nos vtramque non grauatim explicabimus. Primùm ergo si libeat abolere numeros , curandum nobis erit vt in quadrato fictitio reperiantur − 12 N. Cùm igitur Numeri produci non possint , nisi ex ductu Numerorum in vnitates , patet in latere fictitio numeros ponendos esse ; vt verò eorum multitudo nobis innotescat , cùm latus fictitium debeat esse trionomium constans ex quadratis , Numeris , & vnitatibus , ¹ erit quadratus illius æqualis quadratis singularum partium,& duplo producti ex qualibet parte in quamlibet ex aliis , ac proinde Numeri qui erunt in quadrato fictitio , erunt duplum producti ex vnitatibus in Numeros in latere contentos. Quamobrem cùm vt docuimus , in latere , vnitatum numerus sit 1. vt ex eius ductu in Numeros bis , fiant 12 N. manifestum est in latere ponendos esse 6 N. & quia signi quoque ratio habenda est , & − 12 N. fieri possunt siue ex 6 N. in − 1. bis , siue ex 1. in − 6 N. bis , dubitari potest vtrum latus fictitium ponendum sit 3 Q. + 6 N. − 1. vel 3 Q. + 1 − 6 N. nam vtroque modo , in quadrato reperientur 9 QQ. + 1 − 12 N. Sed si ponatur latus fictitium 3 Q. + 6 N. − 1. fit totus quadratus 9 QQ. + 1 − 12 N. + 36 C. + 30 Q. vbi quoniam vterque cuborum & quadratorum Numerus maior est numero cuborum & quadratorum numeri quadrato æquandi ; manent enim 30 Q. + 36 C. æquales 6 Q. − 4 C. id tandem incommodi accidit , vt 24 Q. + 40 C. æquentur nihilo. Igitur fictitium latus poni non potest 3 Q. + 6 N. − 1. Quamobrem restat vt fingatur 3 Q. + 1 − 6 N. vt fecit Diophantus , & æquatio ritè procedit , nam fit 1 N. $\frac{9}{8}$ sunt ergo cuborum latera $\frac{17}{8}$ & $\frac{1}{8}$ ipsi cubi $\frac{4913}{512}$ & $\frac{1}{512}$. Quorum summæ semissis $\frac{2457}{512}$ interualli verò semissis $\frac{2456}{512}$. Quare si inueniamus duos numeros, quorum summa sit $\frac{2456}{512}$. productus verò $\frac{2457}{512}$ soluta erit quæstio. Inuenientur autem per trigesimam primi , & erunt quæsiti numeri in minimis $\frac{27}{8}$ & $\frac{91}{64}$. quorum productus $\frac{2457}{512}$. cui addendo & detrahendo summam ipsorum numerorum , fiunt cubi $\frac{4913}{512}$. & $\frac{1}{512}$ à lateribus $\frac{17}{8}$ & $\frac{1}{8}$.

¹ 1. 2. poris.

Aliam viam si libeat amplecti , & curare vt æqualitas consistat inter quadratos & Numeros, abolendo cubos , puta − 4 C. Cùm in latere sint 3 Q. patet ex 3 Q. bis in $\frac{2}{3}$ N. fieri 4 C. vnde constat in latere ponendos $\frac{2}{3}$ N. Sed & signi ratio si habeatur − 4 C. æquè bene fiunt ex 3 Q. in − $\frac{2}{3}$ N. atque ex $\frac{2}{3}$ N. in − 3 Q. Verùm si ponas latus fictitium 3 Q. + 1 − $\frac{2}{3}$ N. fiet quadratus 9 QQ. + 1 − 4 C. + $6\frac{4}{9}$ Q. − $\frac{4}{3}$ N. vnde hoc incommodi accidit , vt tam quadratorum quàm Numerorum numerus, excedat numerum quadratorum & Numerorum , qui sunt ex altera æquationis parte , puta 6 Q. − 12 N. ac proinde tandem $\frac{4}{9}$ Q. + $10\frac{2}{3}$ N. æquantur nihilo. Supereſt igitur vt latus fictitium ponatur 1 + $\frac{2}{3}$ N. − 3 Q. & fit quadratus 9 QQ. + 1 − 4 C. + $\frac{4}{3}$ N. − $5\frac{5}{9}$ Q. qui æquatur 9 QQ. + 6 Q. + 1 − 4 C. − 12. N. & fit 1 N. $\frac{15}{13}$. Sunt igitur quæsitorum cuborum latera $\frac{28}{13}$ & $\frac{2}{13}$. ipsi cubi $\frac{21952}{2197}$ &

$\frac{8}{2197}$. Per quos si propositam initio quæstionem soluere velimus, cum horum summæ semissis sit $\frac{10989}{2197}$. Quærendi sunt duo numeri quorum summa sit $\frac{10972}{2197}$ productum verò $\frac{10980}{2197}$. Igitur operantes per Canonem trigesimæ primi sumemus quadratum semissis summæ, puta $\frac{30096196}{4826809}$ à quo auferemus productum, & relinquetur $\frac{5973136}{4826809}$ cuius latus $\frac{2444}{2197}$ additum & ademptum semissi summæ $\frac{5486}{2197}$. dabit quæsitos numeros $\frac{7930}{2197}$ & $\frac{3042}{2197}$ seu in minimis $\frac{610}{169}$, $\frac{18}{13}$. Horum productus est $\frac{10980}{2197}$. cui si addas & adimas summam numerorum $\frac{10972}{2197}$ fient cubi qui suprà. $\frac{21952}{2197}$ & $\frac{8}{2197}$.

Cæterùm & latera cuborum qui per hoc lemma quæruntur diuersimodè fingi possunt, nimirum alterum poni potest quodlibet binomium constans ex Numeris & vnitatibus, alterum verò eiusdem binomij residuum, vt 2 N. + 2 & 2 N. − 2. vel 3 N. + 2. & 3 N. − 2. Semper enim aliquo modorum quos explicauimus, ad æquationem commodam peruenietur.

QVAESTIO XXX.

INVENIRE tres numeros, vt productus eorum multiplicatione siue addita summa ipsorum, siue detracta cubum faciat. Hac in re scias quod quolibet quadrato diuiso in duas partes, quarum altera sit latus eius, productus harum partium multiplicatione addita summa illarum, cubum facit. Ponatur igitur quadratus 1 Q. & diuidatur in latus suum, & in id quod superest, nimirum in 1 N. & 1 Q. − 1 N. & productum multiplicationis eorum, vtroque adscito facit cubum. Superest vt idem productum, detracto vtroque faciat cubum. Atqui facit 1 C. − 2 Q. Hæc ergo cubo æquantur qui sit minor quam 1 C. formo cubum ab $\frac{1}{2}$ N. is est $\frac{1}{8}$ C. & omnia octies fiunt 8 C. − 16 Q. æquales 1 C. & fit 1 N. $\frac{16}{7}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{16}{7}$. secundus $\frac{144}{49}$.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λείψῃ ποιῇ κύβον. ἐν τῷ τοιούτῳ ἅπας τετράγωνος ἀριθμὸς διαιρεθεὶς εἴς τε τὴν πλευρὰν, καὶ τὸν λοιπὸν, ποιεῖ τὸν ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου, κύβον. τετάχθω τοίνυν ὁ τετράγωνος δύναμις α. καὶ διῃρήσθω εἴς τε τὴν πλευρὰν καὶ τὸν λοιπὸν, ἔσται ς α. καὶ δυνάμεως α λείψει ς α. καὶ ἔστιν ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου, κύβος. λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον, ποιεῖν κύβον. ἀλλὰ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον ποιεῖ κύβον α. λείψει δυνάμεων β. ταῦτα ἴσα κύβῳ ἐλάσσονι τοῦ κύβου α. πλάσσω κύβον ἀπὸ τοῦ ς α ς˝. τουτέστι κυ α η˝. καὶ πάντα ὀκτάκις. γίνονται κυ η λείψει δυνάμεων ις ἴσαι κύβῳ α. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις ζ˝. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ις ζ˝. ὁ δὲ δεύτερος ρμδ μθ˝.

IN QVAESTIONEM XXX.

HÆC quæstio eadem est cum præcedente, sed tractatio eius diuersa, & quidem facilior. Lemma quod assumitur de inueniendis duobus numeris, quorum productus adscita amborum summa cubum faciat, facile est demonstratu. Sit enim quilibet Numerus A cuius quadratus B. vnde auferendo ipsum A superſit C. ductoque A in C fiat D. dico si ad ipsum D addatur summa ipsorum A C. seu B fieri cubum. Etenim ducendo A in suum quadratum B. fit cubus ipsius A. Sed ducere A in B idem est, ac ducere A sigillatim in ipsos A. C. ex quibus B componitur; productus autem ex A in A est B, & productus ex A in C est D. Igitur summa amborum B D æquatur cubo ipsius A. Quod erat demonstrandum. Reliqua sunt perspicua, nec maiori explicatione indigent.

A 5. B 25.
C 20. D 100.

Cæterùm simili prorsum artificio soluentur & huiusmodi quæstiones.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione siue addito siue detracto ipsorum interuallo cubum faciat.

Ponatur alter quæsitorum numerorum 1 N. alter 1 Q. + 1 N. nam productus eorum multiplicatione, puta 1 C. + 1 Q detracto interuallo ipsorum, cubum facit. Superest vt idem productus addito eodem interuallo cubum faciat, facit autem 1 C. + 2 Q. hoc ergo æquatur Cubo. Esto 8 C. & fit 1 N. $\frac{2}{7}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{2}{7}$ & $\frac{18}{49}$ qui soluunt quæstionem. Nam eorum productus est $\frac{36}{343}$. cui addendo & adimendo interuallum numerorum, putà $\frac{28}{343}$. fiunt cubi $\frac{64}{343}$ & $\frac{8}{343}$. Vbi & ani-

maduersione dignum est interuallum numerorum esse semper quadratum, sicut & in priore quæstione summa Numerorum quadratus erat.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros, vt eorum summa siue addito siue detracto producto multiplicationis eorundem, cubum faciat.

Ponatur alter 1 N. alter 1 Q. − 1 N. sic enim summa addito producto cubum facit. Superest vt à summa detrahendo productum, cubus fiat. Fit autem 2 Q. − 1 C. æqualis cubo, sit is quilibet numerus cuborum cubicus minor vnitate, vt fiat valor Numeri vnitate minor, & haberi possit alter numerorum qui positus est 1 Q. − 1 N. sit ergo cubus $\frac{1}{8}$ C. æqualis 2 Q. − 1 C. & fit 1 N. $\frac{16}{9}$. sunt ergo quæsiti numeri $\frac{16}{9}$ & $\frac{112}{81}$ qui soluunt quæstionem, nam productus est $\frac{1792}{729}$ summa verò ad eandem denominatorem redacta $\frac{2304}{729}$ cui addendo & adimendo productum, fiunt cubi $\frac{4096}{729}$ & $\frac{512}{729}$ à lateribus $\frac{6}{9}$ & $\frac{8}{9}$.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire duos numeros, quorum interuallum siue addito siue detracto producto cubum faciat.

D − D −
A − B − C −

Vtentes eodem logismo ferè quo vsus est Diophantus quæstione vigesima nona huius. Sint cubi qui fieri debent A C. & productus multiplicatione quæsitorum numerorum esto D. interuallum eorundem B. Igitur ex hypothesi addendo D ad B fiet cubus C. & auferendo eundem D. ab eodem B remanebit cubus A. Quamobrem cuborum A C

5. 1. poris. interuallum duplum est ipsius D. At quoniam A B C sunt in medietate arithmetica, [a] B est semissis summæ ipsorum A C. Eò ergo redacti sumus vt inueniamus duos Numeros, quorum productus sit semissis interualli duorum cuborum, & eorundem interuallum sit semissis summæ eorundem cuborum. Atqui, vt constat ex Canone trigesimæ tertiæ primi, dato interuallo duorum numerorum, & producto multiplicationis, si quærantur numeri, vt solutio contingat rationalis, oportet vt quadrato interualli addendo quadruplum producti quadratus fiat. Igitur quærendi sunt duo cubi tales, vt quadrato semissis summæ ipsorum addendo quadruplum semissis interualli, seu duplum interualli eorundem, fiat quadratus. Ponantur ipsorum latera 1 N. + 1 − 1 & 1 N. Erit summa cuborum 6 Q. + 2. cuius semissis 3 Q. + 1. cuius quadratus 9 QQ. + 6 Q. + 1. cui si addatur duplum interualli cuborum, puta 4 C. + 12 N. fiet 9 QQ. + 6 Q. + 1. + 4 C. + 12 N. æqualis quadrato. Huius latus esto 1 + 6 N. − 3 Q. fiet quadratus 9. QQ. + 30 Q. + 1 + 12 N. − 36 C. æqualis 9 QQ. + 6 Q. + 1 + 4 C. + 12 N. vnde fit 1 N. $\frac{3}{5}$. & sunt cuborum latera $\frac{8}{5}$ & $\frac{2}{5}$. ipsi cubi $\frac{512}{125}$. & $\frac{8}{125}$. semissis summæ horum est $\frac{260}{125}$. semissis interualli $\frac{252}{125}$. Itaque si inueniamus duos numeros quorum interuallum sit $\frac{260}{125}$ productus verò $\frac{252}{125}$ soluta erit quæstio proposita. Inuenientur autem per trigesimam tertiam primi puta $\frac{14}{5}$ & $\frac{18}{25}$. quorum productus $\frac{252}{125}$. at interuallum $\frac{260}{125}$. cui si addatur & adimatur productus, fiunt cubi $\frac{512}{125}$ & $\frac{8}{125}$.

QVÆSTIO QVARTA.

Inuenire duos numeros, vt producto addendo summam, & ab eodem auferendo interuallum numerorum fiat cubus vtrimque.

Patet ex hypothesi, cuborum qui fieri debent interuallum componi ex summa & ex interuallo quæsitorum numerorum. Quare sint cubi qui fieri debent 1. & 8. Igitur horum interuallum 7. est ag-

23. 1. poris. gregatum ex summa & interuallo numerorum. [a] Quare 7. est duplum maioris numeri, & ipse maior numerus est $\frac{7}{2}$. ponatur minor 1 N. erit productus $\frac{7}{2}$ N. cui addendo summam numerorum, puta $\frac{7}{2}$ + 1 N. fit $\frac{7}{2}$ + $\frac{9}{2}$ N. æqualis 8. vel à producto auferendo interuallum numerorum, manet $\frac{9}{2}$ N. − $\frac{7}{2}$ æqualis 1. & vtraque æquatione resoluta fit vtrobique idem valor Numeri 1. Sunt ergo quæsiti Numeri 3 $\frac{1}{2}$ & 1. Ex hac autem operatione sequitur cubos ad placitum sumi posse qui fiant huiusmodi additione & subtractione.

QVÆSTIO QVINTA.

Inuenire duos numeros: vt producto addendo interuallum, & ab eodem auferendo summam numerorum, cubus fiat vtrinque.

Sumantur vt prius cubi ad placitum 8. & 64. qui fiant huiusmodi additione & subtractione. Igi-

13. 1. poris. tur horum interuallum 56. componetur ex summa, & ex interuallo quæsitorum numerorum. [b] Quare 56. est duplum maioris numeri, ipse maior numerus 28. ponatur minor 1 N. erit productus 28 N. cui si addas interuallum numerorum fit 27 N. + 28. æqualis 64. vel si ab eodem producto auferas summam Numerorum fit 27 N. − 28. æqualis 8. & vtraque æquatione resoluta fit vtrobique 1 N. $\frac{4}{3}$. sunt ergo quæsiti numeri 28. & $\frac{4}{3}$.

QVÆSTIO

QVÆSTIO SEXTA.

Inuenire duos numeros, vt ſummæ addendo interuallum, & ab eadem auferendo productum, cubus vtrimque fiat.

Sumantur cubi ad placitum dum duplum minoris non ſuperet maiorem, ſumantur ergo 8. & 64. Quia igitur ſummæ quæſitorum numerorum addendo interuallum ipſorum, fit 64. ' patet 64. eſſe duplum maioris numeri. ergo ipſe maior numerus eſt 32. Ponatur minor 1 N. fiet ſumma 32 + 1 N. à qua auferendo productum 32 N. ſupereſt 32 − 31 N. æqualis 8. & fit 1 N. $\frac{24}{31}$. Sunt ergo quæſiti numeri 32. & $\frac{24}{31}$. 23. 1. *Poriſ.*

QVÆSTIO SEPTIMA.

Inuenire duos numeros, vt ſummæ addendo productum, & ab eadem auferendo interuallum, cubus fiat vtrimque.

Sumantur rurſus cubi quicunque 8. & 64. Quia ergo ex ſumma Numerorum auferendo interuallum remanet 8. ' Patet 8. eſſe duplum minoris numeri. Quare ipſe minor eſt 4. Ponatur maior 1 N. erit productus 4 N. cui addendo ſummam fit 4 + 5 N. æqualis 64. & fit 1 N. 12. ſuntque quæſiti Numeri 4. & 12. 23. 1. *Poriſ.*

QVÆSTIO OCTAVA.

Inuenire duos numeros, vt interuallo addendo ſummam, & ab eodem interuallo auferendo productum, cubus vtrimque conficiatur.

Sumantur duo cubi, quorum maior ſuperet duplum minoris, quales ſunt 8. & 64. Quia igitur interuallo numerorum addendo ſummam, fit 64. erit 64. duplum maioris numeri. Ipſe maior numerus 32. Ponatur minor 1 N. erit interuallum 32 − 1 N. vnde auferendo productum, fiet 32 − 33 N. æqualis 8. & fit 1 N. $\frac{8}{11}$ ſuntque quæſiti numeri 32. & $\frac{8}{11}$.

QVÆSTIO NONA.

Inuenire duos numeros, vt producto multiplicationis, ſiue addatur ſumma, ſiue interuallum ipſorum, fiat cubus.

Ponantur cubi qui fieri debent 8. & 64. Cùm igitur eidem producto addendo interuallum & ſummam numerorum fiant 8. & 64. patet inter ipſos 8. & 64. eandem eſſe differentiam, quæ eſt inter ſummam & interuallum numerorum, ' at hæc dupla eſt minoris Numeri. Igitur 56. eſt duplum minoris numeri, & ipſe minor numerus eſt 28. Ponatur maior 1 N. erit productus 28 N. interuallum 1 N. − 28. quo ad productum addito fit 29 N. − 28. æqualis 8. vnde fit 1 N. $\frac{36}{29}$ maior numerus. Quod eſt impoſſibile, cum minor ſit 28. Porro 36. eſt compoſitum ex minore cubo, & ex ſemiſſe interualli cuborum, at 29. eſt ipſe ſemiſſis interualli cuborum vnitate auctus. Igitur inueniendi ſunt duo cubi, vt aggregatum ex minore & ex ſemiſſe interualli ipſorum, diuiſum per eundem ſemiſſem vnitate auctum, det quotientem maiorem ipſo ſemiſſe interualli cuborum; ſeu quod idem eſt, oportet vt aggregatum ex minore cubo & ex ſemiſſe interualli cuborum, ſuperet productum ex ſemiſſe interualli cuborum in ſeipſum vnitate auctum. At hic productus æquatur quadrato ſemiſſis interualli cuborum aucto ſuo latere. Igitur oportet vt aggregatum ex minore cubo & ex ſemiſſe interualli cuborum, excedat quadratum ſemiſſis eiuſdem interualli auctum ſuo latere, & auferendo vtrimque eundem ſemiſſem interualli cuborum; Oportet vt minor cubus excedat quadratum ſemiſſis interualli cuborum. Statuatur maior, quilibet cubus, puta 8. & diuidatur 8. in duas partes, quarum maior excedat quadratum ſemiſſis minoris. Quoniam ergo diuiſo 8. in partes æquales 4. & 4. contingit alteram æquari quadrato ſemiſſis alterius, patet ſi altera ponatur maior quàm 4. altera minor, haberi quod quæritur nam maior excedet quadratum ſemiſſis minoris. Proinde poſito maiore cubo 8. talis ponendus eſt minor vt ſit maior quàm 4. Sic enim minor cubus excedet quadratum ſemiſſis interualli cuborum. Hoc vt facilè fiat, reducatur 8. ad fractionem cubicam denominatam à maiore aliquo cubo, puta ad $\frac{216}{27}$. & ad eiuſdem denominationis fractionem reducatur 4. fiet $\frac{108}{27}$. Tum ſumatur cubus aliquis inter 108. & 216. puta 125. cui ſubſcribendo denominatorem eundem, fient quæſiti Cubi $\frac{125}{27}$ & $\frac{216}{27}$ ſeu 8. per quos commodè ſoluetur quæſtio. Nam eorum interuallum eſt $\frac{91}{27}$ cuius ſemiſſis $\frac{91}{54}$ eſt minor quæſitorum numerorum. Ponatur maior 1 N. erit ſumma 1 N. + $\frac{91}{54}$ productus verò $\frac{91}{54}$ N. cui addendo ſummam fit $\frac{145}{54}$ N. + $\frac{91}{54}$ æqualis 8. vnde fit 1 N. $\frac{341}{145}$ maior ſcilicet numerus, minor autem eſt $\frac{91}{54}$. & ſoluunt quæſtionem. 23. 1. *Poriſ.*

Vt autem methodus quam tradidi ad inueniendum duos cubos, quorum minor excedat quadratum ſemiſſis interualli ipſorum, firmius comprehendatur: ſtatuatur rurſus maior cubus 64. qui diuidatur in duas partes, quarum maior ſuperet quadratum ſemiſſis minoris. Erit igitur maior pars 32

+ 1 N. minor 32 − 1 N. huius semissis 16 − ½ N. cuius quadratus 256 + ¼ Q. − 16 N. debet esse minor quàm 32 + 1 N. & addendo vtrimque æqualia, tum auferendo similia à similibus, ac demum omnia per 4 multiplicando, fiunt 68 N. maiores quàm 896 + 1 Q. Qua æquatione resoluta fit 1 N. maior, vel certè non minor quàm 18. vnde constat maiorem partem de 64. debere esse 50. vel maiorem quàm 50. Ponatur 50 minor 14. Patet igitur maiore Cubo posito 64. minorem sumendum esse non minorem quàm 50. sic enim eorum interuallum minus erit quàm 14. ac proinde semissis interualli quadratus minor erit minore cubo, vt requiritur. Itaque reducatur 64. ad fractionem cubicam, puta ad $\frac{4096}{64}$ & ad eandem denominationem reducatur 50. fiet $\frac{3200}{64}$ sumatur ergo cubus inter 3200. & 4096. qualis est 3375. Huic igitur eundem denominatorem adscribendo, habebuntur cubi quæsiti $\frac{3375}{64}$ & $\frac{4096}{64}$. seu 64. Per quos rursus, si libet, soluet quæstionem.

QVÆSTIO DECIMA.

Inuenire duos numeros, vt producto multiplicationis siue adimatur summa, siue interuallum ipsorum, fiat cubus.

Eodem ferè logismo quo suprà concludemus, reperiendos esse duos cubos, quorum maior superet quadratum semissis interualli ipsorum. Ponatur ergo minor 8 maior 8 + 1 N. Igitur 8 + 1 N. debet esse maior quàm ¼ Q. Qua æquatione resoluta fit 1 N. minor quàm 8. Quare posito minore cubo 8. debet maior esse minor quàm 16. reducantur 8. & 16. ad fractionem denominationis cubicæ, puta ad $\frac{64}{8}$ & $\frac{128}{8}$. Quærendus ergo est cubus inter 64. & 128. qualis est 125. eruntque quæsiti cubi 8. & $\frac{125}{8}$ Quorum interuallum $\frac{61}{8}$ cuius semissis $\frac{61}{16}$ est minor quæsitorum numerorum. Ponatur maior 1 N. fiet summa 1 N. + $\frac{61}{16}$ productus verò $\frac{61}{16}$ N. vnde auferendo summam, manet $\frac{45}{16}$ N. − $\frac{61}{16}$ æqualis 8. & fit 1 N. $\frac{21}{5}$. Tantus est maior, minor verò $\frac{61}{16}$. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO XXXI.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς τετραγώνους οἳ συντεθέντες καὶ προσλαβόντες τὰς ἰδίας πλευρὰς συντεθείσας ποιοῦσι δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω δὴ τὸν ιβ. ἐπεὶ πᾶς τετράγωνος λαβὼν τὴν ἰδίαν πλευρὰν καὶ μονάδος τέταρτον ποιεῖ τετράγωνον. οὗ ἡ πλευρὰ λείψασα μονάδος ἡμίσεως ποιεῖ ἀριθμόν τινα, ὅς ἐστι τοῦ ἐξ ἀρχῆς τετραγώνου πλευρά, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἄρα προσλαβόντες μὲν τὰς ἰδίας πλευρὰς ποιοῦσι μονάδας ιβ. προσλαβόντες δὲ καὶ τέσσαρα τέταρτα ποιοῦσι τέσσαρας τετραγώνους, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ μονάδες ιβ. μετὰ τεσσάρων τετάρτων. ὅ ἐστι μονὰς μία, μονάδες ιγ. τὰς ιγ ἄρα μονάδας διαιρεῖν δεῖ εἰς τέσσαρας τετραγώνους, καὶ ἀπὸ ἑκάστης πλευρᾶς ἀφελὼν μονάδος τὸ ἥμισυ, ἕξω τῶν τεσσάρων τετραγώνων τὰς πλευράς. διαιροῦνται δὲ οἱ ιγ εἰς δύο τετραγώνους, τόν τε δ καὶ τὸν θ. καὶ πάλιν ἑκάτερος τούτων διαιρεῖται εἰς ξδ κε^ων. καὶ λϛ κε^ων. καὶ ρμδ κε^ων. καὶ πα κε^ων. λαβὼν τοίνυν ἑκάστου τὴν πλευρὰν η ε^ων. ϛ ε^ων. ιβ ε^ων. θ ε^ων. αἴρω ἀπὸ ἑκάστου τούτων μονάδος τὸ ἥμισυ, καὶ ἔσονται αἱ πλευραὶ τῶν ζητουμένων τετραγώνων. ια ι^ων. ζ ι^ων. ιθ ι^ων. ιγ ι^ων. αὐτοὶ ἄρα οἱ τετράγωνοι. ὃς μὲν ρκα ρ^ων. ὃς δὲ μθ ρ^ων. ὃς δὲ τξα ρ^ων. ὃς δὲ ρξθ ρ^ων.

INVENIRE quatuor numeros quadratos, quorum summa cum summa laterum coniuncta, numerum imperatum faciat. Sit is 12. Quandoquidem omnis quadratus suo latere & vnitatis quadrante auctus facit quadratum, cuius latus semisse vnitatis multatum, exhibet prioris quadrati latus. At quatuor numeri qui quæruntur, suis lateribus adsumptis faciunt 12. iidem vtique adsumentes quatuor vnitatis quadrantes, facient quatuor quadratos. Atqui vnitates 12. auctæ quatuor quadrantibus vnitatis, hoc est 1. fiunt 13. Oportet igitur diuidere 13. in quatuor quadratos, tunc si à cuiuslibet latere detraxero ½. habebo quæsitorum quatuor quadratorum latera. Diuiditur autem 13. in duos quadratos 4. & 9. & rursus quilibet ipsorum diuiditur in duos quadratos, nempe alter in $\frac{64}{25}$ & $\frac{36}{25}$. alter in $\frac{144}{25}$ & $\frac{81}{25}$. sumens igitur cuiusque latus, nempe $\frac{8}{5}$. $\frac{6}{5}$. $\frac{12}{5}$. $\frac{9}{5}$. aufero ab vnoquoque illorum ½. & sunt latera quæsitorum quadratorum $\frac{11}{10}$. $\frac{7}{10}$. $\frac{19}{10}$. $\frac{13}{10}$. Ipsi ergo quadrati sunt $\frac{121}{100}$. $\frac{49}{100}$. $\frac{361}{100}$. $\frac{169}{100}$.

IN QVAESTIONEM XXXI.

LEMMA quod assumit Diophantus, sic breuissimè domonstratur. Esto quilibet numerus A B, & semissis vnitatis B C. sintque ipsorum quadrati D, E. & summa ipsorum A B. D. E sit F. Dico F esse quadratum à cuius latere si auferatur B C. relinquitur A B. [a] Etenim quadratus totius A C æquatur quadratis D. E. & producto bis ex A B in B C. sed quia B C. est semissis vnitatis, hic productus bis æquatur ipsi A B. vt euidens est. Igitur quadratus totius A C. æquatur summæ ipsorum A B. D. E. seu ipsi F. Quare F est quadratus, cuius latus A C. à quo auferendo B C. remanet A B. Quod erat demonstrandum. *4. secund*

A..... B ½ C.
D 25. E ¼. F 30¼.

Quoniam vero infra docebimus quæstionem hanc vniuersalius proponi posse, nimirum inueniri posse quatuor quadratos, quorum summa adscito quolibet multiplice summæ laterum, datum conficiat numerum, necesse est & hoc lemma vniuersalius concipi, nimirum sic.

Omnis quadratus quolibet multiplice sui lateris auctus, & quadrato semissis multiplicatoris, quadratum exhibet, cuius latus multatum semisse multiplicatoris, fit prioris quadrati latus.

D 6.
A..... B... C.
E 25. F 9. G 64.

Esto quadratus E cuius latus A B. & sit multiplicator D. cuius semissis B C. cuius quadratus F. & summa ipsorum E F. & producti ex A B in D. esto G. Dico G esse quadratum, à cuius latere si auferatur B C. remanet A B. etenim quadratus totius A C. [a] æquatur quadratis partium, nimirum ipsis E. F & producto bis ex A B in B C. seu producto ex A B in D. quamobrem G. est quadratus ipsius A C. vnde patet auferendo B C. relinqui A B. Quod erat demonstrandum. *4. secundi.*

Cæterùm totum analyseos Diophantææ negotium in eo consistit, vt datus numerus vnitate auctus diuidatur in quatuor quadratos. Quod qui vniuersaliter fieri possit non docuit Diophantus. Equidem si datus numerus vnitate auctus quadratus sit, vel suaptè natura ex duobus quadratis compositus, facilè diuidetur in quatuor, atque etiam in plures quotlibet quadratos per octauam secundi. Sed si harum proprietatum neutra illi accidat, quomodo res absoluenda sit non constat ex Diophanto. Etenim datus numeros esto 13. Tunc numerus 14. diuidendus erit in quatuor quadratos. Sed quo artificio? Nam 14. nec quadratus est, nec ex duobus quadratis compositus. Hæc difficultas non immeritò prima fronte inextricabilis appareat, quamuis rem subtilius consideranti facilè euanescat. Etenim datus numerus vnitate auctus etsi nec quadratus sit, nec ex duobus quadratis compositus, attamen eum ex tribus, vel etiam ex quatuor quadratis suaptè natura componi necesse est. Ita supradictus numerus 14. componitur ex tribus quadratis 1. 4. 9. Quare vno ex illis in duos diuiso per octauam secundi, iam totus numerus in quatuor quadratos diuisus erit. Omnem autem numerum vel quadratum esse, vel ex duobus, aut tribus, aut etiam quatuor quadratis componi satis experiendo deprehendes. Mihi sanè perfectâ id demonstratione assequi nondum licuit quam qui proferet maximas ei habebo gratias, præsertim cùm non solùm in hac quæstione, sed & in nonnullis libri quinti hoc supponere videatur Diophantus. Interim libet id inductione confirmare, ostendendo proprium esse numerorum omnium ab 1. vsque ad 120. vt constat ex sequenti diagrammate.

1. Quadratus
2. ex 1. 1.
3. ex 1. 1. 1.
4. Quadratus.
5. ex 1. 4.
6. ex 1. 4. 1.
7. ex 1. 1. 1. 4.
8. ex 4. 4.
9. Quadratus.
10. ex 1. 9.
11. ex 1. 1. 9.
12. ex 4. 4. 4. vel 1. 1. 1. 9.
13. ex 4. 9.
14. ex 1. 4. 9.
15. ex 1. 1. 4. 9.
16. Quadratus.
17. ex 1. 16.
18. ex 9. 9. vel 1. 1. 16.
19. ex 1. 9. 9. vel 1. 1. 1. 16.
20. ex 4. 16. vel 1. 1. 9. 9.
21. ex 1. 4. 16.
22. ex 4. 9. 9. vel 1. 1. 4. 16.
23. ex 1. 4. 9. 9.
24. ex 4. 4. 16.
25. Quadratus.
26. ex 1. 25. vel 4. 4. 9. 9.
27. ex 1. 1. 25. vel 9. 9. 9.
28. ex 1. 1. 1. 25. vel 1. 9. 9. 9. vel 4. 4. 4. 16.
29. ex 4. 25.
30. ex 1. 4. 25.
31. ex 1. 1. 4. 25. vel 4. 9. 9. 9.
32. ex 16. 16.
33. ex 1. 16. 16.
34. ex 9. 25.
35. ex 1. 9. 25.
36. Quadratus.
37. ex 1. 36.
38. ex 1. 1. 36.
39. ex 1. 1. 1. 36. vel 1. 4. 9. 25.
40. ex 4. 36.
41. ex 16. 25. vel 1. 4. 36.
42. ex 1. 16. 25.

43. ex 9. 9. 25. vel 1. 1. 16. 25.
44. ex 4. 4 36.
45. ex 9. 36. vel 4. 4. 16. 25.
46. ex 1. 9. 36. vel 1. 4. 16. 25.
47. ex 1. 1. 9. 36. vel 4. 9. 9. 25.
48. ex 16. 16. 16. vel 4. 4. 4. 36.
49. Quadratus.
50. ex 1. 49. vel 25. 25.
51. ex 1. 1. 49. vel 1. 25. 25.
52. ex 16. 36.
53. ex 4. 49. vel 1. 16. 36.
54. ex 1. 4. 49.
55. ex 1. 1. 4. 49. vel 1. 9. 9. 36.
56. ex 4. 16. 36.
57. ex 1. 4. 16. 36.
58. ex 9. 49.
59. ex 1. 9. 49. vel 9. 25. 25.
60. ex 1. 1. 9. 49. vel 1. 9. 25. 25. vel 4. 4. 16. 36.
61. ex 25. 36.
62. ex 1. 25. 36.
63. ex 1. 1. 25. 36.
64. Quadratus.
65. ex 1. 64. vel 16. 49.
66. ex 1. 1. 64. vel 1. 16. 49.
67. ex 9. 9. 49.
68. ex 4. 64.
69. ex 1. 4. 64. vel 4. 16. 49.
70. ex 9. 25. 36.
71. ex 1. 9. 25. 36.
72. ex 36. 36. vel 4. 4. 64.
73. ex 9. 64.
74. ex 25. 49.
75. ex 1. 25. 49.
76. ex 4. 36. 36. vel 1. 1. 25. 49.
77. ex 4. 9. 64.
78. ex 4. 25. 49.
79. ex 1. 4. 25. 49. vel 9. 9. 25. 36.
80. ex 16. 64.
81. Quadratus.
82. ex 1. 81.
83. ex 1. 1. 81. vel 9. 25. 49.
84. ex 4. 16. 64.
85. ex 4. 81. vel 1. 36. 49.
86. ex 1. 4. 81. vel 1. 36. 49.
87. ex 1. 1. 4. 81. vel 1. 1. 36. 49.
88. ex 16. 16. 36.
89. ex 25. 64.
90. ex 9. 81.
91. ex 1. 9. 81.
92. ex 1. 1. 9. 81. vel 4. 16. 36. 36. vel 9. 9. 25. 49.
93. ex 4. 25. 64.
94. ex 4. 9. 81. vel 9. 36. 49.
95. ex 1. 4. 9. 81. vel 1. 9. 36. 49.
96. ex 16. 16. 64.
97. ex 16. 81.
98. ex 49. 49. vel 1. 16. 81.
99. ex 1. 49. 49. vel 9. 9. 81.
100. Quadratus.
101. ex 1. 100.
102. ex 1. 1. 100.
103. ex 1. 1. 1. 100. vel 4. 9. 9. 81. vel 4. 25. 25. 49. vel 9. 9. 36. 49.
104. ex 4. 100.
105. ex 1. 4. 100.
106. ex 25. 81.
107. ex 1. 25. 81.
108. ex 36. 36. 36. vel 1. 1. 25. 81.
109. ex 9. 100.
110. ex 1. 9. 100.
111. ex 1. 1. 9. 100.
112. ex 4. 4. 4. 100. vel 4. 36. 36. 36. vel 16. 16. 16. 64.
113. ex 49. 64.
114. ex 1. 49. 64.
115. ex 9. 25. 81.
116. ex 16. 100.
117. ex 36. 81.
118. ex 1. 36. 81.
119. ex 9. 25. 36. 49.
120. ex 4. 16. 100.

Tu, si vacat vlterius experiare licebit. Ego sanè de omnibus numeris vsque ad 325. experimentum sumpsi. Facile autem ad quotlibet quadratos extendetur quæstio, sed si duo tantùm quadrati postulentur, quorum summa cum summa laterum datum conficiat numerum, oportebit dati numeri quadruplum auctum binario componi ex duobus quadratis. Et si tres quærantur quadrati, oportebit dati numeri quadruplum auctum ternario componi ex tribus quadratis. Si verò plures postulentur quadrati, nulla conditio præscribetur, quia tunc continget quendam numerum diuidendum esse in quatuor aut in plures quadratos, quod semper fieri posse docuimus. Denique eadem arte, & ampliando lemma Diophanti, vt supra fecimus, inuenientur quotlibet quadrati, quorum summa adsumpto quolibet multiplici summæ laterum, datum conficiat numerum. Quoniam autem in his omnibus quæstionibus plerumque accidit aliquem numerum ita diuidendum esse in duos, vel tres vel plures quadratos, vt quilibet eorum excedat certum aliquem numerum, quod ritè perfici nequit, nisi per artificium quo vtitur Diophantus duodecima, decima tertia, & decima quarta quinti, satius erit hujusmodi quæstionum explicationem in eum locum reiicere.

OBSERVATIO D. P. F.

Imo propositionem pulcherrimam & maxime generalem nos primi deteximus. Nempe omnem numerum vel esse triangulum vel ex duobus aut tribus triangulis compositum esse quadratum vel ex duobus aut tribus aut quatuor quadratis compositum

esse pentagonum, vel ex duobus tribus quatuor aut quinque pentagonis compositum & sic deinceps in infinitum in hexagonis heptagonis & poligonis quibuslibet enuntianda videlicet pro numero angulorum generali & mirabili propositione; eius autem demonstrationem quæ ex multis varijs & abstrusissimis numerorum mysterijs deriuatur hic apponere non licet, opus enim & librum integrum huic operi destinare decreuimus & Arithmeticen hac in parte vltra veteres & notos terminos mirum in modum promouere.

QVÆSTIO XXXII.

INVENIRE quatuor quadratos, quorum summa laterum summa detracta faciat præscriptum numerum. Sit is 4. Quia volo primum suo multatum latere, & secundum suo multatum latere, itemque tertium & quartum suis multatos lateribus facere 4. Cæterùm omnis quadratus suo latere multatus, & adsumens vnitatis quadrantem, facit quadratum, cuius latus adscito vnitatis semisse exhibet prioris quadrati latus; quatuor vtique quadrati quæsiti multati suis lateribus, & adsumentes quatuor vnitatis quadrantes, nimirum 1. facient quatuor quadratos. Sed & iidem multati suis lateribus, faciunt vnitates 4. & adsumentes 1. faciunt 5. Hoc ergo mihi incumbit vt diuidam 5. in quatuor quadratos, quorum singulorum lateribus vbi adiecero $\frac{1}{2}$. inuenero latera quæsitorum quadratorum. Diuiditur autem 5. in quadratos $\frac{9}{25}$. $\frac{16}{25}$. $\frac{64}{25}$. $\frac{36}{25}$. Horum sumo latera, nimirum $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{8}{5}$ $\frac{6}{5}$. addo cuilibet illorum $\frac{1}{2}$. & inuenio latera $\frac{11}{10}$. $\frac{13}{10}$. $\frac{21}{10}$. $\frac{17}{10}$. Sunt ergo quæsiti quadrati $\frac{121}{100}$. $\frac{169}{100}$. $\frac{441}{100}$. $\frac{289}{100}$.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας τετραγώνους, οἳ συντεθέντες καὶ λείψαντες τὰς πλευρὰς αὐτῶν συντεθείσας, ποιῶσι δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω δὴ τὸν δ. ἐπεὶ οὖν θέλω τὸν πρῶτον λείψαντα αὐτοῦ τὴν πλευράν, καὶ τὸν δεύτερον λείψαντα αὐτοῦ τὴν πλευράν, καὶ τὸν τρίτον, καὶ τὸν τέταρτον ὁμοίως λείψαντας αὐτῶν τὰς πλευρὰς ποιεῖν μο δ. ἀλλὰ μὴν καὶ πᾶς τετράγωνος λείψας τὴν αὐτοῦ πλευρὰν καὶ προσλαβὼν μονάδος τέταρτον ποιεῖ τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ προσλαβοῦσα μονάδος ἡμίσεως ποιεῖ τὴν τοῦ ἐξ ἀρχῆς τετραγώνου πλευράν, ὥστε οἱ τέσσαρες τετράγωνοι λείψαντες αὐτῶν τὰς πλευρὰς καὶ προσλαβόντες μονάδος τέσσαρα τέταρτα, τουτέστι μονάδα μίαν ποιήσουσι τέσσαρας τετραγώνους. ἀλλὰ καὶ οἱ τέσσαρες λείψαντες αὐτῶν τὰς πλευρὰς ποιοῦσι μο δ. προσλαβόντες δὲ καὶ μονάδα μίαν ποιοῦσι μο ε. ἀπῆκται οὖν μοι τὸν ε διελεῖν εἰς τέσσαρας τετραγώνους. ἑκάστῃ τῶν πλευρῶν προσέθηκα μονάδος τὸ ἥμισυ, καὶ εὗρον τὰς τῶν ζητουμένων τετραγώνων πλευράς. διαιρεῖται δὲ ὁ ε. εἰς τέσσαρας τετραγώνους θ κε. καὶ ις κε. καὶ ξδ κε. καὶ λς κε. λαμβάνω τούτων τὰς πλευράς, γίνονται γ ε. δ ε. η ε. ς ε. προστίθημι ἑκάστῳ τούτων τὸ ἥμισυ, καὶ εὑρίσκω τὰς πλευράς, ἣν μὲν ια ι. ἣν δὲ ιζ ι. ἔσονται δὲ ἄρα οἱ ζητούμενοι τετράγωνοι ὃς μὲν ρκα ρ. ὃς δὲ υμα ρ. ὃς δὲ σπθ ρ.

IN QVAESTIONEM XXXII.

LEMMA Diophanti vniuersaliùs etiam proponetur hoc pacto.

Omnis quadratus quolibet multiplice sui lateris multatus, & adsumens quadratum semissis multiplicatoris, quadratum facit, cuius latus adscito semisse multiplicatoris, exhibet latus prioris quadrati. Oportet autem latus prioris quadrati esse maius semisse multiplicatoris.

H 48. D 6.
A . . . . B . . . C.
E 25. F 9. G 64.

Esto quadratus G. cuius latus A C. & sit multiplicator D cuius semissis B C. cuius quadratus F. productus autem ex D in A C. fit H. Itaque auferendo H ex G. & residuo addendo F. fiat E. Dico E quadratum esse à latere A B. cui addito B C. fit A C latus prioris quadrati G. Etenim quia productus ex D in A C puta H. [1] æquatur productis ex D in singulos A B. B C. productus autem ex D in suum semissem B C æquatur duplo quadrati F. patet auferre H ex G. idem esse, atque auferre ex G productum ex D in A B & duplum quadrati F. Quare cùm residuo addendo F fiat E patet E fieri si ex G auferatur productus ex D in A B & quadratus F. vnde è conuerso si ipsi E addantur productus ex D in A B & quadratus F. fiet G. sed vt constat ex lemmate præcedentis, si quadrato ex A B addantur idem pro-

[1] 1. secundi.

ductus ex D in A B. & idem quadratus F fiet idem quadratus G. Igitur E eſt quadratus ipſius A B. Quod demonſtrandum erat.

Hæc quæſtio quoque ad quotlibet numeros extendetur, vt aliquot exemplis oſtendere libet, cùm hic ad propoſitiones libri quinti recurrere minimè cogamur. Itaque.

Inueniantur duo numeri, vt ſumma quadratorum, laterum ſumma detracta conficiat datum numerum. Oportet autem dati numeri quadruplum auctum binario componi ex duobus quadratis.

Datus eſto *6.* Igitur ad *6.* addendo duos quadrantes vnitatis, patet $6\frac{1}{2}$ diuidendum in duos quadratos, & vtrique lateri addendo $\frac{1}{2}$ fient quæſitorum quadratorum latera. ducantur omnia in 4. fiet *26.* diuidendus in duos quadratos. Diuiditur autem in 25. & 1. quorum latera 5 & 1. quorum ſemiſſis, puta $\frac{5}{2}$ & $\frac{1}{2}$ ſunt latera quadratorum ex quibus $6\frac{1}{2}$ componitur. Addo ergo vnicuique $\frac{1}{2}$. & fiunt latera quæſitorum quadratorum 3. & 1. quæ ſoluunt quæſtionem, nam ſumma laterum eſt 4. quadratorum 10. vnde auferendo 4. manet *6.* Rurſus.

Inueniantur tres quadrati, quorum ſumma, laterum ſumma detracta datum conficiat numerum. Oportet autem dati numeri quadruplum auctum ternario componi ex tribus quadratis.

Datus eſto 8. Igitur ad 8 addendo tres quadrantes vnitatis, fiet $8\frac{3}{4}$ diuidendus in tres quadratos, omnia per 4. fiet 35. diuidendus in tres quadratos. Diuiditur autem in 1. *9.* 25. quorum latera 1. 3. 5. quorum ſemiſſis $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{2}$. $\frac{5}{2}$. ſunt latera quadratorum, ex quibus $8\frac{3}{4}$ componitur. Quare vnicuique addendo $\frac{1}{2}$ fient quæſitorum latera quadratorum 1. 2. 3. Nam ſumma quadratorum fit 14. vnde auferendo *6.* ſummam laterum, ſupereſt 8. Rurſus.

Inueniantur quinque quadrati, quorum ſumma, laterum ſumma detracta, datum faciat numerum.

Datus eſto 3. Igitur ad 3. addendo quinque quadrantes vnitatis fiet $4\frac{1}{4}$ diuidendus in quinque quadratos omnia per 4. fiet 17. diuidendus in quinque quadratos. Diuiditur autem in 4. *9.* 4. & ſi duo ex illis in duos diuidantur, totus 17. in quinque diuiſus erit, diuidatur ergo 4. in quadratos $\frac{36}{25}$ & $\frac{64}{25}$. & rurſus *9.* diuidatur in duos quadratos $\frac{81}{25}$. & $\frac{144}{25}$ ſic totus 17. diuiſus eſt in quinque quadratos, quorum latera 2. $\frac{6}{5}$. $\frac{8}{5}$. $\frac{9}{5}$. $\frac{12}{5}$. quorum ſemiſſes 1. $\frac{3}{5}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{9}{10}$. $\frac{6}{5}$. ſunt latera quadratorum ex quibus componitur $4\frac{1}{4}$. vnde ſingulis addendo $\frac{1}{2}$. fiunt quæſitorum quadratorum latera $\frac{3}{2}$. $\frac{11}{10}$. $\frac{13}{10}$. $\frac{14}{10}$. $\frac{17}{10}$. & ſoluunt quæſtionem. Item.

Inueniantur quatuor quadrati, quorum ſumma, detracto ſextuplo ſummæ laterum, datum conficiat numerum. Datus eſto 4.

Quoniam, vt conſtat ex lemmate ſupra tradito, omnis quadratus multatus ſextuplo ſui lateris, & adſumens *9.* quadratum facit, cuius latus adſcito 3. exhibet prioris quadrati latus. Quatuor vtique quadrati multati ſextuplo laterum & adſumentes quater *9.* nimirum 36. facient quatuor quadratos. Quare cùm quatuor quadrati multati ſextuplo laterum faciant 4. patet addito 4. ad 36. fieri 40. diuidendum in quatuor quadratos, quorum lateribus ſi addatur 3. ſigillatim, fient latera quæſitorum quadratorum. Porro 40. diuiditur in duos quadratos 36. & 4. quorum quilibet ſi diuidatur rurſus in duos, puta 4. in $\frac{36}{25}$ & $\frac{64}{25}$. & ſimiliter 36. in $\frac{324}{25}$ & $\frac{576}{25}$. Iam totus 40. in quatuor quadratos diuiſus erit, quorum latera $\frac{6}{5}$. $\frac{8}{5}$. $\frac{18}{5}$. $\frac{24}{5}$. quibus addendo ſigillatim ternarium, fiunt latera quæſitorum quadratorum $\frac{21}{5}$. $\frac{23}{5}$. $\frac{33}{5}$ $\frac{39}{5}$. & ſoluunt quæſtionem. Rurſus.

Inueniantur quinque quadrati, quorum ſumma, detracto ſextuplo ſummæ laterum, datum faciat numerum.

Datus eſto 10. Igitur ad 10. addendo quintuplum nouenarij, nimirum 45. fiet 55. diuidendus in quinque quadratos, & cujuſlibet lateri addendo 3. fient quæſitorum quadratorum latera. Diuiditur autem 55. in quatuor quadratos 1. 1. 4. 49. Quare vnus illorum puta 1. rurſus in duos diuidatur, nimirum in $\frac{9}{25}$ & $\frac{16}{25}$. & ſic totus 55. in quinque quadratos diuiſus erit, quorum latera $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$. 1. 2. 7. quibus addendo ſigillatim 3. fient latera quæſitorum quadratorum $\frac{18}{5}$. $\frac{19}{5}$. 4. 5. 10. & ſoluunt quæſtionem.

QVÆSTIO XXXIII.

ΤΗΝ μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς, καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ δοθέντα ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν τετράγωνον. ἔστω τὴν μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς. καὶ ᾧ μὲν προσθεῖναι μο γ. ᾧ δὲ μο ι. καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν

VNITATEM diuidere in duos numeros, & vtrique addere datum numerum, & productum eorum multiplicatione facere quadratum. Eſto diuidenda vnitas in duos numeros, & oporteat

alteri addere 3. alteri 5. & productum eorum multiplicatione facere quadratum. Ponatur primus 1 N. ergo secundus erit 1 – 1 N. & si primo addantur 3. fit 1 N. + 3. At si secundo addantur 5. fit 6 – 1 N. & productus eorum multiplicatione est 3 N. + 18. – 1 Q. æqualis quadrato. Esto quadrato 4 Q. Communis addatur defectus, fiunt 3 N. + 18. æquales 5 Q. & non est rationalis æquatio. Atqui 5 Q. est quadratus numerus vnitate auctus. Oportet itaque hunc ductum in vnitates 18. & adsumentem quadratum semissis 3 N. nimirum $2\frac{1}{4}$. facere quadratum. Eò igitur nunc redactus sum, vt quæram quadratum qui adsumpta vnitate, & per 18. multiplicatus, adscitisque $2\frac{1}{4}$ faciat quadratum. Esto quadratus ille 1 Q. Hic vnitate auctus & ductus in 18. adscitisque $2\frac{1}{4}$ fit 18 Q. + $20\frac{1}{4}$ æqualis quadrato. Omnia quater, fiunt 72 Q. + 81. æqualia quadrato. Formo quadratum à 8 N. + 9. & fit 1 N. 18. Ad positiones. Erit quadratus 324. Redeo ad propositum initio, & 3 N. + 18 – 1 Q. æquo quadrato iam inuento. 324 Q. & fit 1 N. $\frac{78}{325}$ hoc est $\frac{6}{25}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{6}{25}$. secundus $\frac{19}{25}$.

τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ς° ᾱ. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται μ° ᾱ ⋔ ς° ᾱ. καὶ ἐὰν μὲν τῷ πρώτῳ προστεθῶσι μ° γ̄. ἔσται ς° ᾱ μ° γ̄. ἐὰν δὲ τῷ δευτέρῳ μ° ε̄. ἔσται μ° ς̄ ⋔ ς° ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν ςς γ̄ μ° ιη ⋔ Δυ ᾱ. ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω Δυ δ̄. καὶ κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, γίνονται ςς οἱ γ̄ μ° ιη ἴσοι Δυ ε̄. καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ἴσωσις ῥητή. ἀλλ' αἱ Δυ ε̄. ἐστὶ τετράγωνος μετὰ μ° ᾱ. δεῖ δὴ ταῦτα ἐπὶ τὰς ιη. μονάδας πολλαπλασιασθέντα, καὶ προσλαβόντα τὸν ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῶν γ̄ ἀριθμῶν τετράγωνον. τουτέστι β̄. α δ'. ποιεῖν τετράγωνον. διὰ τοῦτο τοίνυν ἀπῆκται μοι εἰς τὸ ζητῆσαι τετράγωνον ὃς προσλαβὼν μ° ᾱ. καὶ ὀκτωκαιδεκάκις γενόμενος, καὶ προσλαβὼν μ° β̄. α δ'. ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ τετράγωνος Δυ ᾱ. οὗτος μετὰ μ° ᾱ ὀκτωκαιδεκάκις γενόμενος, καὶ προσλαβὼν μ° β̄. α δ'. ποιεῖ Δυ ιη μ° κ̄. α δ'. ἴσας τετραγώνῳ πάντα τετράκις, γίνονται Δυ οβ μ° πα ἴσαι τετραγώνῳ, καὶ πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς η μ° θ̄. γίνεται ὁ ς° μ° ιη. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ τετράγωνος τκδ. ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς ἰσῶσαι ςς οὓς γ̄ μ° ιη ⋔ Δυ ᾱ ἴσους τετραγώνῳ. ὃν νῦν τάσσω Δυ τκδ. καὶ γίνεται ὁ ς° οη τκε. τουτέστιν ς̄ κε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ς̄ κε. ὁ δὲ δεύτερος ιθ κε.

IN QVAESTIONEM XXXIII.

HIC Diophantus in solutione lemmatis assumpti ad regulas compositas deuoluitur. Sed subtili sane artificio cauet, ne incidat in numeros surdos, cuius defectu cautionis non arbitratus sum ad huiusmodi regulas deueniendum esse vigesima tertia quæstione libri huius. Quamuis enim in proposito ibi exemplo res bene succedat, & solutio contingat rationalis, attamen non ostendit author quomodo id necessario eueniat si aliquo modo mutetur operatio, quod in hac quæstione eleganter præstitit. Cæterùm quid sibi velit Diophantus, non satis adsequutus est Xilander. Putat enim eò quod 5 Q. æquantur 3 N. + 18. æquationem reducendam esse ad 1 Q. diuidendo scilicet omnia per 5. vnde fit 1 Q. æqualis $\frac{3}{5}$ N. + $\frac{18}{5}$. Quamobrem cùm Diophantus ait quadratum semissis de 3 N. addendum producto ex 5. in 18. censet Xilander sumi debere semissem non de 3. simpliciter, sed de $\frac{3}{5}$. & eius quadratum esse non $2\frac{1}{4}$ simpliciter, sed 2. $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{25}$. quæ interpretatio nimis coacta est, & à mente Diophanti prorsus aliena. Tenebras autem effudit Xilandro, ignorantia methodi qua regulas compositas resoluit Diophantus, quam ad trigesimam tertiam primi explicauimus. Nam ad vitandas fractiones, rarò Diophantus æquationem reducit ad 1 Q. Sed ducto numero quadratorum in numerum vnitatum, addit producto quadratum semissis numeri Numerorum, & reliqua perficit, vt loco citato docuimus. Hinc est cur velit 5. numerum quadratorum duci in vnitates 18. & producto 90. addi $2\frac{1}{4}$ quadratum semissis numeri numerorum 3. Quoniam verò, vt solutio rationalis fit oportet hac additione fieri quadratum, apparet necessitas lemmatis assumpti. Cùm enim numerus quadrato æquandus sit 3 N. + 18 – 1 Q. patet quærendum esse quadratum, qui vnitate auctus & per 18. multiplicatus, itaque adsumens $2\frac{1}{4}$. faciat quadratum.

In huius quoque lemmatis explicatione insignis occurrit difficultas, cuius tamen ne verbum quidem Xilander. Cùm enim tandem 72. Q. + 81. æquandus sit quadrato, euidens est quadrati latus commodè fingi non posse, nisi vel quadratorum vel vnitatum numerus; quadratus sit. Ostendendum ergo est necessario euenire vt vnitatum numerus, qualis est hîc 81. quadratus sit alioquin casu, non arte certa res succedere videbitur. Atqui 81. est quadruplum ipsius $20\frac{1}{4}$. Quare vt 81. quadratus sit oportuit prius $20\frac{1}{4}$ quadratum esse. Porro $20\frac{1}{4}$ fit ad 18. addendo $2\frac{1}{4}$. Videndum igitur vnde pro-

uenerint 18. & $2\frac{1}{4}$. factus est autem 18. ex 3. in 6. & $2\frac{1}{4}$ est quadratus semissis de 3 N. Fiunt autem 3 N. addendo simul + 6 N. & − 3 N. in multiplicatione 1 N. + 3. per 6 − 1 N. Quare cùm ob signorum contrarietatem additio in subtractionem mutetur, patet 3 N. tandem fieri auferendo 3 N. à 6 N. Quamobrem 18. est productus ex 3. in 6. At $2\frac{1}{4}$ est quadratus semissis interualli eorundem 3. & 6.

2.2. Porif. ¹ Constat autem producto multiplicationis duorum numerorum addendo quadratum semissis interualli eorundem, fieri quadratum semissis summæ ipsorum. Quare patet propositum; sic vides $20\frac{1}{4}$ seu $\frac{81}{4}$ esse quadratum semissis duorum 3. & 6. seu ipsius $\frac{9}{2}$.

Rursus in fingendo latere quadrati 72 Q. + 81. magna cautio adhibenda est, quod non vidit Xilander, nec attigit ipse Diophantus. Etenim si ad hanc æquationem solùm respicias, sufficit si ponas hoc latus 9 + tot Numeris, quorum quadratus sit minor quàm 72. Sed si ponas hoc latus 9 + 6 N. vel 9. + aliquo numero Numerorum minore quàm 6. fiet valor Numeri qui prioribus positionibus nullatenus accommodari poterit, cùm enim eius quadratus æquabitur 3 N. + 18 − 1 Q. fiet 1. N. maior vnitate, quod est absurdum, cùm 1 N. ponatur pars vnitatis. Hoc igitur incommodum vt vitemus, sic ratiocinandum est. Quia 3 N. + 18 − 1 Q. sic quadrato æquandus est, vt fiat 1 N. minor vnitate, in hac autem æquatione debent tandem 3 N. + 18. æquari cuidam quadratorum numero: at si 1 N. ponatur æqualis vnitati, vtique 3 N. + 18. æquabuntur 21 Q. Quo verò minor ponetur valor Numeri, eo maiori numeri quadratorum æquabuntur 3 N. + 18. manifestũ est vt fiat 1 N. minor vnitate oportere vt 3 N. + 18. æquentur numero quadratorum maiori quàm 21. Porro numerus iste quadratorũ fit ex quodam quadrato vnitate aucto, quare sublata vnitate de 21. consequens est quadratum cui æquari debet 3 N. + 18 − 1 Q. maiorem esse quàm 20. Cùm ergo latus proximum ipsius 20. sit $4\frac{1}{2}$ manifestũ est, latus quadrati 72 Q. + 8. ita ponendũ esse vt fiat valor Numeri maior quàm $4\frac{1}{2}$. fit autem in hac æquatione valor Numeri, auferendo à 72. quendam quadratum, & per residuum diuidendo productum ex 18. in latus eiusdem quadrati. Igitur $\frac{18\ N}{72 - 1\ Q}$. maior esse debet quàm $4\frac{1}{2}$. & tandem re ad integros redacta 18 N. maiores sunt quàm 324 − $4\frac{1}{2}$ Q. & addito defectu, atque etiam facto paralabolismo, quia commodé potest fieri, tandem 72. maior esse debet quàm 4 N. + 1 Q. Qua æquatione resoluta cùm fiat 1 N. $6\frac{1}{2}$ ferè patet latus fictitium ponendum 9 + tot numeris, qui excedant $6\frac{1}{2}$. sic Diophantus posuit 9 + 8 N. Poni quoque poterat 9 + 7 N. vel 9 + aliquot Numeris, qui excedant $6\frac{1}{2}$. & quorum quadratus sit minor quàm 72.

Eodem prorsus artificio quæstio hæc ad omnem numerum extendetur. Quod vt exemplo comprobemus. Esto 2. diuidendus in duas partes, vt primæ addendo 3. secundæ 5. & summas inter se multiplicando, fiat quadratus. Esto prima pars 1 N. ergo secunda 2 − 1 N. & si primæ addatur 3. secundæ 5. fiunt 1 N. + 3. & 7 − 1 N. & productus eorum multiplicatione est 4 N. + 21 − 1 Q. æquandus quadrato, videlicet alicui quadratorum Numero quadrato, qui talis sumendus est, vt auctus vnitate, & multiplicatus in 21. itaque adsumens 4. faciat quadratum. Ponatur is 1 Q. Igitur 21 Q. + 25. quadrato æquandus est. Sed curandum vt talis hîc proueniat valor Numeri, vt applicatus priori æquationi, fiat in ea 1 N. minor quàm 2. quia 1 N. ponitur esse pars binarij. Cùm ergo æquando 4 N. + 21 − 1 Q. alicui quadrato, tandem 4 N. + 21. æquentur aliquot quadratis, si autem 1. N. ponatur 2. fiant 4 N. + 21. æquales $7\frac{1}{4}$ Q. patet vt fiat 1 N. minor quàm 2. oportere 4 N. + 21. æquari quadratorum numero maiori quàm $7\frac{1}{4}$. Et quia ille quadratorum numerus est quadratus vnitate auctus, auferendo vnitatem de $7\frac{1}{4}$ sequitur quadratum qui æqualis ponetur 4 N. + 21 − 1 Q. maiorem esse debere quàm $6\frac{1}{4}$. atque ideo latus eius maius esse oportet quàm $\frac{5}{2}$. Quamobrem numeri 21 Q. + 25. latus ita fingendum est, vt fiat 1 N. maior quàm $\frac{5}{2}$. Fit autem 1 N. auferendo quadratum quendam de 21. & per residuum diuidendo decuplum lateris illius. Quare $\frac{10\ N}{21 - 1\ Q}$ maior esse debet quàm $\frac{5}{2}$. qua æquatione ritè præparata, tandem fiunt 4 N. + 1 Q. maiores quàm 21. vnde constat 1 N. excedere debere 3. Ponatur igitur latus fictitium 5 + 4 N. fiet quadratus 25 + 40 N. + 16 Q. æqualis 21 Q. + 25. & fiet 1 N. 8. quadratus 64. Redeo ad propositum initio, & 4 N. + 21 − 1 Q. æquo quadrato 64 Q. & fit 1 N. $\frac{39}{65}$. Prima pars binarij. Secunda verò est $\frac{91}{65}$ quæ soluunt quæstionem nam primæ addendo 3. secundæ 5. fiunt $\frac{234}{65}$. & $\frac{416}{65}$ quorum mutuo ductu fit $\frac{97344}{4225}$ quadratus à latere $\frac{312}{65}$.

QVAESTIO XXXIV.

ΤΗΝ μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ δοθέντα ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν τετράγωνον. ἔστω δὴ τὴν μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς, καὶ ᾧ μὲν προσθεῖναι μο γ. ᾧ δὲ μο ε. καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ςᵒ ᾱ. καὶ λεῖψις μο γ ἃς προσλαμβάνει. λοιπὸς

VNITATEM diuidere in duos numeros, & addere vtrique datum numerum, & productum eorum multiplicatione facere quadratum. Sit vnitas diuidenda in duos numeros, & oporteat alteri addere 3. alteri 5. & ita facere quadratum productum multiplicationis eorum

rum. Ponatur primus 1 N. — 3. quandoquidem 3. debet illi addi, relinquetur ergo secundus 4 — 1 N. & si primo addantur 3 fit 1 N. si autem secundo addantur 5. fit 9 — 1 N. & fit eorum multiplicatione 9 N. — 1 Q. æqualis quadrato. Esto quadrato 4 Q. & fit 1 N. $\frac{9}{5}$. si ad positiones hoc applicare coner, non possum auferre 3 de 1 N. Oportet igitur numerum maiorem quidem esse quàm 3. minorem verò quàm 4. Atqui 1 N. factus est diuiso 9. per 5. Ipse autem 5. est quadratus vnitate auctus. Iam si 9. diuisus per quadratũ aliquem vnitate auctum facit numerum maiorem quàm 3. oportet eum per quem diuiditur minorẽ esse quàm 3. sed his per quem 9. diuiditur est quadratus vnitate auctus. Ergo quadratus vnitate auctus minor est quàm 3. Auferatur vnitas. Igitur quadratus minor est quàm 2. Rursus quia volumus secundum diuisum per quadratũ vnitate auctum, facere numerum minorem quàm 4. oportet eum per quem diuiditur maiorem esse quàm 2 $\frac{1}{4}$. Is autem per quem 9. diuiditur est quadratus vnitate auctus, proinde quadratus vnitate auctus maior est quàm 2 $\frac{1}{4}$. Auferatur vnitas. Ergo quadratus maior est quàm 1 $\frac{1}{4}$. Sed iam ostensus est minor quàm 2. Eo itaque res deducitur, vt inueniam aliquem quadratum maiorem quàm 1 $\frac{1}{4}$ minorem quàm 2. Resoluo hæc in partes quadratas, nempè in sexagesimas quartas, & fiunt 80. & 128. Facilè ergo inuenietur quadratus $\frac{100}{64}$ seu $\frac{25}{16}$. Reuertor ad id quod initio erat propositum. Quærebam 9 N. — 1 Q. æquare quadrato. esto inuento quadrato $\frac{25}{16}$ Q. & fit 1 N. $\frac{144}{41}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{21}{41}$. secundus $\frac{20}{41}$.

ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται μ° δ̄ λείψει ςοῦ ᾱ. καὶ ἐὰν μὲν τῷ πρώτῳ προστεθῶσι μ° γ̄. γίνεται ςοὶ ᾱ. ἐὰν δὲ τῷ δευτέρῳ μ° ε̄. γίνεται μ° θ̄ λείψει ςοῦ ᾱ. καί ἐστιν ὁ ὑπ' αὐτῶν ςς θ̄ λείψει δυ ᾱ ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω δυ δ̄. καὶ γίνεται ὁ ςὸς. θ̄ εων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. καὶ οὐ δύναμαι ἀφελεῖν ἀπὸ ςοῦ ᾱ. μονάδας γ̄. δεῖ οὖν τὸν ςὸν μείζονα μὲν εἶναι μ° γ̄. ἐλάσσονα δὲ μ° δ̄. ὁ δὲ ςὸς εὕρηται ἐκ τοῦ τὸν θ̄ μερισθῆναι εἰς τὸν ε̄. ὅς ἐστι τετράγωνος σὺν μονάδι μιᾷ. εἰ δὲ ὁ θ̄ μεριζόμενος εἴς τινα τετράγωνον σὺν μ° ᾱ. ἀριθμὸν ποιεῖ μείζονα μ° γ̄. εἰς ὃν ἄρα μερίζεται, ἐλάσσων ἐστὶ τῶν γ̄. εἰς ὃν δὲ ὁ θ̄ μερίζεται τετράγωνός ἐστι σὺν μονάδι, ὥστε ὁ τετράγωνος σὺν μονάδι μιᾷ ἐλάσσων ἐστὶ τῶν γ̄. καὶ ἤρθω ἡ μονάς. ὁ ἄρα τετράγωνος ἐλάσσων ἐστὶ μ° β̄. πάλιν θέλομεν τὸν δεύτερον μερίζοντα εἰς τετράγωνον σὺν μονάδι μιᾷ ποιεῖν ἀριθμὸν ἐλάσσονα μ° δ̄. εἰς ὃν ἄρα μερίζεται, μείζων ἐστὶ μ° β̄. ᾱ δων. εἰς ὃν δὲ μερίζεται ὁ θ̄ τετράγωνός ἐστι σὺν μονάδι μιᾷ, ὥστε ὁ τετράγωνος σὺν τῇ μονάδι μείζων ἐστὶ μ° β̄. ᾱ δων. καὶ ἤρθω ἡ μονὰς μία. ὥστε ὁ τετράγωνος μείζων ἐστὶ μονάδος, καὶ ᾱ δων. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐλάσσων μ° β̄. γέγονεν οὖν μοι εὑρεῖν τινα τετράγωνον ὅς ἐστι μείζων μ° ᾱ. ᾱ δων. ἐλάσσων δὲ β̄. καὶ ἀναλύω ταῦτα εἰς μόρια τετραγωνικά, εἰς ξδ̄. καὶ γίνονται π̄. καὶ ρκη̄ τοῦτο δὲ ἐστὶ ῥᾴδιον, καὶ ἔστιν ὁ τετράγωνος ρ̄ ξδων. τουτέστιν κε̄ ιϛων ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ ἐζήτουν ςςοὺς θ̄. λείψει δυ ᾱ ἴσα τετραγώνῳ. τουτέστι τῷ εὑρημένῳ, δυ κε̄ ιϛων. καὶ γίνεται ὁ ςὸς ρμδ̄ μαων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος κᾱ μαων. ὁ δεύτερος κ̄ μαων.

IN QVAESTIONEM XXXIV.

EADEM est quæstio hæc cum præcedente, sed diuersa operatio, qua videtur Diophantus rem absoluere voluisse absque auxilio regularum compositarum. Nam ita suas instituit positiones, vt tandem fiat 9 N. — 1 Q. quadrato æquandus, quod fit per simplicem æquationem qua quadrati Numeris æquales sunt, & fit valor Numeri diuidendo 9. per aliquem quadratum vnitate auctum. Quoniam verò altera pars vnitatis posita est 1 N. — 3. altera 4 — 1 N. debere esse maiorem quàm 4. Igitur quærendus est quadratus qui vnitate auctus, & diuidens 9. det quotientem minorem quàm 3. maiorem quàm 4. Quare cùm diuidendo 9. tum per 3. tum per 4. fiant 3. & 2. $\frac{1}{4}$ patet quadratum vnitate auctum consistere debere inter 3. & 2 $\frac{1}{4}$. ac proinde auferendo vtrimque vnitatem, quærendus erit quadratus minor quàm 2. maior quàm 1 $\frac{1}{4}$. Tales infiniti reperientur reducendo 2. & 1 $\frac{1}{4}$ ad fractiones quadratas ab eodem aliquo quadrato maiore denominatas, vt fecit Diophantus qui reduxit ad sexagesimas quartas.

Cæterùm & hanc operationem cuilibet numero applicabimus, quod iam antè nos præstitit Vieta noster zetetico 13. lib. 5. Sit diuidendus 3. in duas partes, vt alteri addendo 6. alteri 12. & summas in-

ter se multiplicando, fiat quadratus. Ponatur pars altera 1 N. — 6. altera ergo erit 9. — 1 N. & primæ addendo 6. secundæ 12. fiunt 1 N. & 21. — 1 N. quorum mutuo ductu producitur 21 N. — 1 Q. æquandus quadrato. Sed ex ipsis positionibus apparet quærendum esse quadratum qui vnitate auctus & diuidens 21. det quotientem maiorem quàm 6. minorem quàm 9. Itaque cùm 21. diuisus tum per 6. tum per 9. det quotientes $3\frac{1}{2}$ & $2\frac{1}{3}$. Quadratus vnitate auctus sumendus erit inter $3\frac{1}{2}$ & $2\frac{1}{3}$. & ablata vnitate quærendus quadratus minor quàm $2\frac{1}{2}$. maior quàm $1\frac{1}{3}$. Reducatur vterque ad trigesimas sextas, fient $\frac{90}{36}$ & $\frac{48}{36}$ inter quos sumi possunt quadrati proposito satisfacientes $\frac{49}{36}$. $\frac{64}{36}$. $\frac{81}{36}$. si sumas vltimum seu $\frac{9}{4}$ æquabis $\frac{9}{4}$ Q. & 21 N. — 1 Q. vnde fiet 1 N. $\frac{84}{13}$. Sunt ergo quæsitæ partes ternarij $\frac{6}{13}$. & $\frac{33}{13}$. quæ soluunt quæstionem, nam primæ addendo 6. secundæ 12. fiunt $\frac{84}{13}$ & $\frac{189}{13}$ quorum mutuo ductu fit $\frac{15876}{169}$. quadratus à latere $\frac{126}{13}$.

Sed & aliam analysim huic soluendæ quæstioni excogitauimus, Diophantæa vtraque non deteriorem, atque etiam faciliorem. sit 2. numerus diuidendus, & addendi 3. & 5. patet ergo summarum aggregatum fore 10. Quare res eò deducitur vt 10. diuidatur in duos planos similes, quorum alter superest 3. alter excedat 5. Sic enim ab altero auferendo 3. ab altero 5. remanebunt quæsitæ binarij partes. Porrò 10. diuidetur in duos huiusmodi planos similes hac arte. Sumpto minore addendorum 3. comparo illum cum residuo de 10. puta cum 7. & quæro duos quadratos, quorum sit minor ratio quàm 3. ad 7. quales sunt 4 & 9. vel 9. & 16. & alij infiniti. Diuidatur ergo 10. in duos numeros in ratione 4. ad 9. Inuenientur hi per Canonem secundæ primi $\frac{40}{13}$ & $\frac{90}{13}$. Quare si ab altero detraxero 3. ab altero 5. remanebunt quæsitæ binarij partes $\frac{1}{13}$ & $\frac{25}{13}$. Rursus si diuisero 10. in duos numeros seruantes rationem 9. ad 16. erunt hi $\frac{18}{5}$ & $\frac{32}{5}$ & à primo auferendo 3. à secundo 5. remanent quæsitæ binarij partes $\frac{3}{5}$ & $\frac{7}{5}$.

Eadem arte licebit & sequentes quæstiones soluere.

QVÆSTIO PRIMA.

Datum numerum in duas partes secare, vt ab vtraque auferendo datum numerum, ex residuorum mutuo ductu, fiat quadratus. Oportet autem numerum diuidendum maiorem esse summa detrahendorum numerorum.

Diuidendus sit 12. in duas partes, vt altera auferendo 3. ab altera 5. ex residuorum mutuo ductu, quadratus fiat. Ponatur altera 1 N. + 3. altera ergo erit 9. — 1 N. & à prima auferendo 3. à secunda 5. remanent 1 N. & 4 — 1 N. quorum mutuo ductu fit 4 N — 1 Q. æquandus quadrato. Esto cuilibet quadratorum numero quadrato, puta 9 Q. fiet 1 N. $\frac{2}{5}$ Sunt ergo partes quæsitæ $3\frac{2}{5}$ & $8\frac{3}{5}$. & soluunt quæstionem.

Aliter. Quoniam summa detrahendorum est 8. qua ablata de 12. superest 4. oportet diuidere 4. in duos quoscunque planos similes, sic enim alteri addendo 3. alteri 5. fient quæsitæ partes numeri 12.

QVÆSTIO SECVNDA.

Datum numerum secare in duas partes, vt vtramque auferendo à dato numero, ex residuorum mutuo ductu fiat quadratus. Oportet autem numerum diuidendum minorem esse summa numerorum, à quibus partes detrahendæ sunt.

Diuidendus sit 4. in duas partes, vt alteram auferendo à 3. alteram à 5. ex residuorum mutuo ductu fiat quadratus. Ponatur altera 3 — 1 N. altera ergo erit 1. + 1 N. & primam auferendo à 3. secundam à 5. remanent 1 N. & 4 — 1 N. quorum mutuo ductu fit 4 N. — 1 Q. æquandus quadrato, qui sic ponendus est, vt vnitate auctus & diuidens 4. det quotientem minorem quàm 3. quia scilicet altera pars posita est 3 — 1 N. At diuidendo 4. per 3. fit $\frac{4}{3}$. patet ergo quadratum vnitate auctum, debere esse maiorem quàm $\frac{4}{3}$ & ablata vnitate, quadratus debet esse maior quàm $\frac{1}{3}$. sit is 9 Q. fiet 1 N. $\frac{2}{5}$. Sunt ergo quæsitæ partes $2\frac{3}{5}$ & $1\frac{2}{5}$. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO TERTIA.

Datum numerum secare in duas partes, vt alteri addendo datum numerum, ab altera datum etiam numerum detrahendo, ex mutuo ductu summæ & residui, fiat quadratus. Oportet autem numerum diuidendum maiorem esse detrahendo.

Sit diuidendus 8. in duas partes, vt alteri addendo 3. ab altera detrahendo 5. ex summa in residuum fiat quadratus. Ponatur altera pars 1 N. — 3. ergo altera erit 11 — 1 N. & primæ addendo 3. à secunda auferendo 5. fiunt 1 N. & 6 — 1 N. Quorum mutuo ductu fit 6 N. — 1 Q. æquandus quadrato, qui sic ponendus est vt vnitate auctus & diuidens 6. det quotientem maiorem quàm 3. Quare cùm diuidendo 6. per 3. fiat 2. patet quadratum vnitate auctum debere esse minorem quàm 2. & detracta vnitate,

ſumendus erit quadratus minor quàm 1. Ponatur $\frac{1}{4}$ Q. fiet 1 N. $\frac{24}{5}$. ſunt ergo quæſitæ partes $\frac{9}{5}$ & $\frac{11}{5}$.

QVÆSTIO QVARTA

Datum numerum ſecare in duas partes, vt alteri addendo datum numerum, alteram detrahendo a dato numero, ex ſumma in reſiduum fiat quadratus.

Hic duplex caſus datur, quia numerus à quo fit detractio nunc minor, nunc maior eſſe poteſt numero diuidendo. Primùm ergo ſit 8. ſecandus in duas partes, vt primæ addendo 3. ſecundam auferendo à 5. fiat quod poſtulatur. eſto ſecunda 5 − 1 N. ergo prima erit 3 + 1 N. & ſecundam auferendo à 5. & addendo 3. primæ fiunt 1 N. & 6 + 1 N. quorum mutuo ductu fit 6 N. + 1 Q. æquandus quadrato. qui ſic ponendus eſt, vt multatus vnitate & diuidens 6. det quotientem minorem quàm 5. Quare cùm diuiſo 6. per 5. fiat $\frac{6}{5}$. patet quadratum vnitate multatum, debere eſſe maiorem quàm $\frac{6}{5}$. & addita vnitate, ſumendus eſt quadratus maior quàm $\frac{11}{5}$. eſto 9. Q. fiet 1 N. $\frac{3}{4}$. Sunt ergo quæſitæ partes prima $\frac{15}{4}$ ſecunda $\frac{17}{4}$.

Deinde ſit 8. ſecandus in duas partes, vt primæ addendo 3. ſecundam auferendo à 20. fiat quod petitur. Ponatur ſecunda 20 − 1 N. ergo prima eſt 1 N. − 12. & ſecundam auferendo à 20. addendo 3. primæ, fiunt 1 N. & 1 N. − 9. quorum mutuo ductu fit 1 Q. − 9. N. æquandus quadrato, qui talis ponendus eſt vt detracto eo ab vnitate, & per reſiduum diuidendo 9. fiat quotiens minor quàm 20. maior quàm 12. Cùm itaque diuidendo 9. tum per 20. tum per 12. fiant $\frac{9}{20}$ & $\frac{3}{4}$. & vtrumque auferendo ab vnitate, relinquantur $\frac{11}{20}$ & $\frac{1}{4}$. patet ſumendum eſſe quadratum maiorem quàm $\frac{1}{4}$. minorem quàm $\frac{11}{20}$. ſumatur $\frac{4}{9}$ Q. fiet ergo 1 N. $\frac{81}{5}$ & erunt quæſitæ partes. Prima $\frac{21}{5}$. ſecunda $\frac{19}{5}$.

QVÆSTIO XXXV.

DATVM numerum diuidere in tres numeros, vt qui fit primo in ſecundum ducto, ſiue addito tertio, ſiue detracto quadratum faciat. Eſto datus 6. Ponatur tertius 1 N. ſecundus vnitatum aliquot quæ ſint minus quàm 6. puta 2. Primus ergo erit 4 − 1 N. Reſtant duo poſtulata, nimirum vt productus ex primo in ſecundum, tertio ſiue addito ſiue detracto faciat quadratum. Et occurrit duplicata æqualitas, nam 8 − 1 N. æquantur quadrato, & 8 − 3 N. æquantur quadrato. Expediri autem non poteſt, quia numeri inter ſe non habent rationem quam habet quadratus ad quadratum. Sed 1 N. vnitate minor eſt quam 2. & 3 N. vnitate maior eodem 2. Eò itaque res deducta eſt, vt inueniam numerum aliquem loco ipſius 2. vt qui eo vnitate maior eſt ad eum qui vnitate minor eſt eodem, rationem habeat quam habet quadratus ad quadratum. Eſto quæſitus 1 N. erit ergo vnitate maior 1 N. + 1. At vnitate minor 1 N − 1. Volumus igitur hos inter ſe rationem habere quam habet quadratus ad quadratum, ſit vt 4. ad 1. Itaque cùm ducto 4. in 1 N. − 1. fiat 4 N. − 4. & ducto 1. in 1 N. + 1. fiat 1 N. + 1. vt habeant expoſiti numeri rationem quam habet quadratus ad quadratum. erunt. 4 N. − 4.

ΔΟΘΕΝΤΑ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου ἐάν τε προσλάβῃ τὸν τρίτον. ἐάν τε λείψῃ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς ὁ ϛ. τετάχθω ὁ τρίτος ϛ^{ος} α. καὶ ὁ δεύτερος μ^{ο} ὑπὲρ ὧν τὸ ϛ. ἔστω μ^{ο} β. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται μ^{ο} δ λείψει ϛ^{ου} α. καὶ λοιπά ἐστι δύο ἐπιτάγματα, τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου ἐάν τε προσλάβῃ τὸν τρίτον, ἐάν τε λείψῃ ποιεῖν τετράγωνον, καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης μ^{ο} η λείψει ϛ^{ου} α. ἴσαι τετραγώνῳ, καὶ μ^{ο} η. λείψει ϛϛ^{οῖς} γ ἴσαι τετραγώνῳ, καὶ οὐ ῥητόν ἐστι διὰ τὸ μὴ εἶναι τοὺς ϛϛ^{οὺς} πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντας, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀλλὰ ὁ ϛ^{ὸ} α. μονάδι ἐλάσσων τοῦ β. οἱ δὲ ϛϛ^{οὶ} γ ὁμοίως μείζονες μονάδι τοῦ β. ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν ἀριθμόν τινα, ὡς τὸν β. ἵνα ὁ μονάδι μιᾷ αὐτοῦ μείζων, ἔσται ϛ^{ὸ} α μ^{ο} α. ὁ δὲ μονάδι αὐτοῦ μείζων, πρὸς τὸν μονάδι αὐτοῦ ἐλάσσονα, λόγον ἔχῃ, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἔστω ὁ ζητούμενος ϛ^{ος} α. καὶ μονάδι αὐτοῦ ἐλάσσων ϛ^{ος} α. λείψει μ^{ο} α. θέλομεν οὖν αὐτοὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν ἔστω δ πρὸς α. ὥστε ϛ^{ος} εἰς λείψει μ^{ο} α ἐπὶ μονάδας δ. γίνονται ϛϛ^{οὶ} δ λείψει μ^{ο} δ. καὶ ϛ^{ος} εἷς μ^{ο} α ἐπὶ τὴν μονάδα μίαν γίνεται ϛ^{ὸ} α. καὶ εἰσὶν οὕτοι οἱ ἐκκείμενοι ἀριθμοὶ λόγον ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον

ἀριθμόν. νῦν ςς^οἱ δ. λείψει μο δ. ἴσοι ς^οῖς α μο α. καὶ γίνεται ὁ ς μο ε γ^x. τάσσω οὖν τὸν δεύτερον μο ε γ^x. ὁ γὰρ τρίτος ἐστὶ ς α. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται μο ιγ γ^x. λείψει ς α. λοιπὸν δεῖ εἶναι τὸ ἐπίταγμα τουτέστι τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου προσλαβόντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον, καὶ λείψαντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου προσλαβὼν τὸν τρίτον ποιεῖ μο ξε θ^x. ⋔ β γ^x. ςς ἴσα τετραγώνῳ. λείψας δὲ τὸν τρίτον ποιεῖ μο ξε θ^x. λείψει ςς η γ^x. ἴσα τετραγώνῳ, καὶ πάντα εἰς τὸ θ. καὶ γίνονται μο ξε. λείψει ςς ς ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ μο ξε ⋔ ςς κδ ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ ἐξισῶ τοὺς ςς^οὺς τῆς μιᾶς ἰσότητος ποιήσας τετράκις. καὶ ἔστι μο σξ ⋔ ςς κδ ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ μο ξε λείψει ςς κδ ἴσοι τετραγώνῳ. νῦν τούτων λαμβάνω τὴν ὑπεροχήν, καί ἐστι μο ρϟε. καὶ ἐκτίθεμαι δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ἐστὶ μο ρϟε. καί εἰσι ιε. καὶ ιγ. καὶ τῆς τούτων ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐλάσσονι τετραγώνῳ. καὶ γίνεται ὁ ς μο η γ^x. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ε γ^x. ὁ δὲ δεύτερος ε γ^x. ὁ δὲ τρίτος η γ^x. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

æquales 1 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{5}{3}$. Pono igitur secundum $\frac{5}{3}$ nam tertius est 1 N. ergo primus erit $\frac{13}{3}$ − 1 N. Restat vt postulata perficiantur, videlicet vt productus ex primo in secundum siue adscito tertio, siue dempto faciat quadratum. Sed productus ex primo in secundum adscito tertio facit $\frac{65}{9} - \frac{2}{3}$ N. hoc ergo æquatur quadrato, & idem productus dempto tertio facit $\frac{65}{9} - \frac{8}{3}$ N. hoc etiam æquatur quadrato. Omnia nouies, fiunt 65 − 6 N. æqualia quadrato. & 65 − 24 N. æqualia quadrato. Exæquo numeros æquationis vnius, multiplicans per 4. & est 260 − 24 N. æqualis quadrato, itemque 65 − 24 N. æquatur quadrato. Horum nunc interuallum sumo quod est 195. & expono duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 195. ij sunt 15. & 13. Horum interualli semissis in se æquatur minori, & fit 1 N. $\frac{8}{3}$. Ad positiones. erit primus $\frac{5}{3}$. secundus $\frac{5}{3}$. tertius $\frac{8}{3}$. & demonstratio est euidens.

OBSERVATIO D. P. F.

ITa facilius fiet operatio, datus numerus 6. vtcunque diuidatur v. g. in 5. & 1. productus demptâ vnitate hoc est 4. per 6. datum numerum diuidatur, eueniet $\frac{2}{3}$ Quem si tum à 5. tum ab 1 abstuleris duo residua $\frac{13}{3}$ & $\frac{1}{3}$ erunt duæ priores partes numeri diuidendi 3. igitur erit $\frac{4}{3}$.

IN QVAESTIONEM XXXV.

QVID hic præstiterim in Diophanto restituendo coniicere est ex versione Xilandri, cùm in codicem emendatiorem non inciderim, sed textus lacunas replere, & passim deprauata emendare certissimis coniecturis coactus sim; vbi legebatur ipso initio καὶ ὁ δεύτερος μο ὑπὲρ ὧν τὸ ϛ restitui ὑπὲρ ὧν τὸ ϛ. vt sit sensus, Ponendum secundum aliquot vnitatum super quas sit 6. idest quæ sint minus quàm 6. quod necesse est vt pars inueniatur minor toto.

Cæterùm emendato textu satis perspicua est operatio Diophanti; vtitur duplicata æqualitate eo modo quem explicauimus ad decimam octauam tertij, & nihil amplius hîc addendum, nisi quod limitationes quædam attendendæ sunt, quibus neglectis in absurdum aliquod incidamus necesse est. Primùm ergo cùm quæritur numerus qui vnitate auctus ad seipsum vnitate multatum rationem habeat quadrati ad quadratum, vnde colligitur 1 N. + 1. ad 1 N. − 1. debere esse in ratione quadrati ad quadratum, non temerè sumendi sunt duo quadrati quibus propositi numeri proportionales sint. Etenim 1 N. debet esse secundus Numerus quæsitorum, ac proinde pars totius numeri diuidendi 6. & per consequens minor quàm 6. Quamobrem tales duo quadrati deligendi sunt quorum summa, ad ipsorum interuallum minorem rationem habeat quàm 6 ad 1. Alioquin 1 N. maior inuenietur quàm 6. vt si esse ponatur 1 N. + 1. ad 1 N. − 1. sicut 49. ad 36. fiet enim per decimam nonam septimi 36 N. + 36. N. + 36. æqualis 49. N. − 49. & tandem 1 N. fiet 6. $\frac{7}{13}$. Quod est absurdum.

Deinde in duplicata æqualitate resoluenda cùm quæruntur duo numeri, quorum mutuo ductu fiat 195. hi tales sumendi sunt vt quadratus semissis summæ eorum sit minor quàm 260. vel vt quadratus semissis interualli eorundem sit minor quàm 65. quia scilicet numeri quadrato æquandi sunt 260 − 24 N. & 65 − 24. N. Quare cùm latus proximum de 65. sit 8. Oportet interuallum eorum non excedere 16. Idcirco sumi non potuerunt 194. & 1. neque 39. & 5. neque vlli integri præter 15. & 13. quos sumpsit Diophantus, sed per fractiones infinitis modis res expediri poterat.

QVÆSTIO XXXVI.

INVENIRE duos numeros, vt si alter ab altero eandem partem siue easdem partes acceperit, ratio ad reliquum sit ea quæ poscitur. Iubeatur vt primus accipiens secundi partem aliquam vel partes, sit ad residuum triplus. At secundus sumens a primo eandem partem, vel easdem partes, sit residui quincuplus. Ponatur secundus 1 N + 1. Pars autem vel partes eius esto 1. Primus igitur erit 3 N − 1. sic enim primus sumens a secundo partem aliquam vel partes, nimirum 1. fit residui triplus. Volumus itaque & secundum sumentem primi eandem partem, vel easdem partes, residui quincuplum esse. Sed quoniam ambo simul faciunt 4 N. & secundus aliquid accipit, primusque id dat, & summa residui fit quincupla. Cæterùm summa eadem cum residuo iuncta facit 4 N. residuum vtique habebitur si sumamus sextantem de 4 N. nempe $\frac{2}{3}$ N. si ergo à 3 N. − 1. tollamus $\frac{2}{3}$ N. habebimus primi partem vel partes. Si autem tollamus, relinquitur $\frac{7}{3}$ N. − 1. Hoc ergo pars est vel partes primi. Nam secundus accipiens à primo $\frac{7}{3}$ N. − 1. fit quincuplus ad residuum ex primo. Superest hic vt quæramus an quæ pars vel partes est 1. de 1 N + 1. eadem pars, vel eædem partes sit $\frac{7}{3}$ N − 1. de 3 N. − 1. Cùm autem tale aliquid quæris productum ex $\frac{7}{3}$ N. − 1. in 1 N. + 1. æquale est producto ex 3 N. − 1. in 1. hoc est partes alternatim multiplicantur, & fiunt $\frac{7}{3}$ Q. + $\frac{4}{3}$ N. − 1. æqualia 3 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{5}{7}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{8}{7}$. secundus $\frac{12}{7}$. Erat autem 1. partes secundi, videamus ergo quæ partes secundi sit 1. Est vtique $\frac{7}{12}$. Multiplico per 7. duos numeros; erit primus 8. secundus 12. Partes autem $\frac{7}{12}$. Et quia primus non habet duodecimam, multiplico per 3. vtrumque, ne incidamus in diuisionem vnitatis, & fit primus 24. secundus 36. Partes autem seu $\frac{7}{12}$ illius quidem 14. Huius verò 21. & demonstratio manifesta.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἕτερος παρὰ τοῦ ἑτέρου προσλαβὼν τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη λόγον ἔχῃ πρὸς τὸν περιλειφθέντα, τὸν ἐπιταχθέντα. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν πρῶτον προσλαβόντα παρὰ τοῦ δευτέρου μέρος τὶ, ἢ μέρη, τοῦ λοιποῦ εἶναι τριπλασίονα, τὸν δὲ δεύτερον προσλαβόντα παρὰ τοῦ πρώτου τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, τοῦ λοιποῦ εἶναι πενταπλασίονα. τετάχθω ὁ δεύτερος ς^{ο} α̅ μο α̅. τὸ δὲ μέρος ἢ μέρη αὐτοῦ ἔστω μο α̅. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται ς̄ς̄ γ̅. λείψει μο α̅. καὶ ὁ πρῶτος ἐὰν προσλάβῃ τοῦ δευτέρου μέρος τὶ, ἢ μέρη τουτέστι μο α̅. γίνεται τοῦ λοιποῦ τριπλασίων. θέλομεν δὴ καὶ τὸν δεύτερον προσλαβόντα τοῦ πρώτου τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, τοῦ λοιποῦ εἶναι πενταπλασίονα. ἀλλ᾽ ἐπειδὴ οἱ δύο εἰσὶν ς̄ς^{οἱ} δ̅ καὶ ὁ δεύτερος λαμβάνει τὶ, καὶ ὁ πρῶτος δίδωσι, καὶ ὁ γινόμενος τοῦ λοιποῦ γίνεται πενταπλασίων, ὥστε ὁ συναμφότερος ὁ γινόμενος, καὶ ὁ λοιπὸς ἔσται, ς̄ς̄ δ̅ ὥστε ὁ λοιπὸς ἔσται ἐὰν τῶν ς̄ς̄ δ̅ λάβωμεν τὸ ἕκτον τουτέστι ς̄ς̄ β̅ γ^{ων}. ἐὰν ἄρα ἀπὸ ς̄ς̄ γ̅. λείψει μο α̅. ἄρωμεν ς̄ς̄ β̅ γ^{ων}. ἕξομεν τοῦ πρώτου μέρος ἢ μέρη. ἐὰν δὲ ἄρωμεν, γίνεται ς̄ς̄ ζ̅ γ^{ων}. λείψει μο α̅. τοῦτο ἄρα τοῦ πρώτου μέρος ἐστὶν ἢ μέρη. λαβὼν γὰρ ὁ δεύτερος παρὰ τοῦ πρώτου ς̄ς̄ ζ̅ γ^{ων}. λείψει μο α̅. γίνεται πενταπλασίων τοῦ καταλιμπανομένου τοῦ πρώτου. λοιπὸν δεῖ ἐνθάδε ζητῆσαι, εἰ ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη μονὰς μία, ς^{οῦ} ἑνὸς μο α̅. τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ς̄ς̄ γ̅. λείψει μο α̅. εἰσὶ οἱ ς̄ς^{οἱ} ζ̅ γ^{ων}. λείψει μο α̅. ὅταν δέ τι τοιοῦτο ζητῇς, τὸ ὑπὸ τῶν ς̄ς̄ ζ̅ γ^{ων}. λείψει μο α̅. καὶ ς^{οῦ} α̅ μο α̅. ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ς̄ς̄ γ̅. λείψει μο α̅. ἐπὶ τὴν μονάδα. τουτέστι τὰ μέρη ἐναλλὰξ πολλαπλασιάζεται ὧν εἰσιν δ^{υ} ζ̅ γ^{ων}. ς̄ς^{οἱ} δ̅ γ^{ων}. λείψει μο α̅. ἴσαι ἀριθμοῖς γ̅. λείψει μο α̅. καὶ γίνεται ὁ ς^{ὸ} ε̅ ζ^{ων}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος η̅ ζ^{ων}. ὁ δὲ δεύτερος ιβ̅ ζ^{ων}. ἦν δὲ τοῦ δευτέρου μέρη μο α̅. σκεπτόμεθα ἃ μέρη ἡ μο α̅. τοῦ δευτέρου, ἐστὶ δὲ ζ̅ ιβ^{ων}. καὶ ποιῶ ἑπτάκις τοὺς δύο ἀριθμούς. ἔσται ὁ πρῶτος μο η̅. ὁ δεύτερος μο ιβ̅. τὰ δὲ μέρη ζ̅ ιβ^{ων}. ἀλλὰ ἐπεὶ ὁ πρῶτος οὐκ ἔχει δωδέκατον ποιῶ αὐτὰ τρὶς, ἵνα μὴ εἰς μονάδα ἐμπίπτῃ. ἔσται ὁ πρῶτος κδ̅. ὁ δεύτερος λς̅. τὰ δὲ μέρη τῶν ζ̅ ιβ^{ων}. τοῦ μὲν ιδ̅. τοῦ δὲ κα̅. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XXXVI.

INGENIOSA operatione quæstionem hanc soluit Diophantus. Sed emaculato textu, vt fecimus, omnia sunt perspicua. Cæterùm placet & aliam tradere analysim paulò compendiosiorem. Ponatur quæsitorum numerorum summa quotlibet vnitatum, puta 12. & sit primus 1 N. secundus 12 − 1 N. Cùm ergo primus sumpta parte secundi fiat triplus ad reliquum, si 12. diuidatur in partes seruantes proportionem triplam, per secundam primi nempe in 9. & 3. patet primum sumpta parte secundi fore 9. Quare inde detrahendo primum, fiet pars secundi 9 − 1 N. similiter diuiso 12. in partes seruantes rationem quincuplam, puta in 10. & 2. patet secundum sumpta parte primi, fore 10. Quare inde auferendo secundum, fiet pars primi 1 N. − 2. Restat igitur, vt 1 N. − 2. sit eadem pars de 1
19. septim. N. quæ pars est 9 − 1 N. de 12 − 1 N. Quamobrem hi quatuor numeri sunt proportionales, ac proinde planus sub extremis æquatur plano sub mediis, idest 14 N. − 1 Q. − 24. æquatur 9 N. − 1 Q. vnde fit 1 N. $\frac{24}{5}$. suntque quæsiti numeri $\frac{24}{5}$ & $\frac{36}{5}$. Quod si communem denominatorem abiicere libeat, fient quæsiti numeri 24. & 36. iidem quos reperit Diophantus. Supponimus enim cum Diophanto inuentis semel duobus numeris quæstionem soluentibus, idem euenire duobus aliis quibuscunque sumptis in eadem ratione. Quod facile est demonstrare, quia de partibus proportionalibus agitur numerorum proportionalium, vt tibi considerandum relinquo.

QVAESTIO XXXVII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἀορίστους, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιῇ τὸν δοθέντα ἀριθμόν, ποιείτω μο η. τετάχθω ὁ πρῶτος ςου α. ὁ δεύτερος μο γ. καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ἐστὶν ἀριθμῶν δ μο γ. ταῦτα ἴσα μο η. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε δ^x. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος μο ε δ^x. ὁ δεύτερος μο γ. νῦν σκέπτομαι ὁ ς πόθεν ἐγένετο ε δ^x. ἐκ τοῦ τὸν ε μερισθῆναι εἰς τοὺς ςους δ. ἀλλ' ὁ πέντε ἐστὶν ἐκ τῆς ὑπεροχῆς τοῦ η. ἧς ὑπερέχει τὸν γ. οἱ δὲ ςοι δ. εἰσὶν ὁ μονάδι μείζων τοῦ δευτέρου. ἐὰν ἄρα τάξωμεν τὸν δεύτερον ςου οἷου δήποτε, καὶ ἄρω αὐτὸν ἀπὸ μο η. καὶ τὰ λοιπὰ μερίσω παρὰ τὸν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, ἕξω τὸν πρῶτον. οἷον, ἔστω ὁ δεύτερος ςου α λείψει μο α. ταῦτα αἴρω ἀπὸ μο η. λοιπὸν μο θ λείψει ςου α. ταῦτα μερίζω εἰς τὸν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, τουτέστιν εἰς ςὸν α. καὶ γίνεται μο θ ⋔ ςου α ἐν μορίῳ ςου α. ἔσται ὁ πρῶτος. καὶ λέλυται ἐν τῷ ἀορίστῳ, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μο η. τὸ δὲ ἐν τῷ ἀορίστῳ τοιοῦτόν ἐστιν, ἵνα τὸν ἀριθμὸν ὅσων ἄν τις θέλει μονάδων εἶναι ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

INVENIRE duos numeros indefinitè, vt productus ex ipsorum multiplicatione cum vtriusque summa datum faciat numerum. Faciat autem 8. Ponatur primus 1 N. secundus 3. & productus eorum multiplicatione cum summa vtriusque fit 4 N. + 3. Hæc æquantur 8. & fit 1 N. $\frac{5}{4}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{5}{4}$. secundus 3. Nunc considero vnde 1 N. fit factus $\frac{5}{4}$. nimirum ex diuisione 5. per 4. sed 5. est excessus quo 8. superat 3. Et ipse 4. est secundus vnitate auctus. Si ergo statuam secundum numerorum quotlibet. Et auferam eum de 8. & residuum diuidam per secundum vnitate auctum, habebo primum. Verbi gratia sit secundus 1 N. − 1. hæc aufero de 8. restant 9 − 1 N. Hæc diuido per secundum vnitate auctum, id est per 1 N. & fit primus $\frac{9 - 1N}{1N}$. Et sic indefinitè soluta est quæstio, nam productus ex eorum multiplicatione, cum vtriusque summa facit 8. Indefinitè autem solui dicitur, quia quotcunque vnitatum ponatur 1 N. satisfaciet postulatis.

IN QVAESTIONEM XXXVII.

QVID sit indefinitè quæstionem soluere, jam alibi docuit Diophantus, & hîc rursus explicat. Id enim fit cùm ita instituuntur positiones, vt quilibet numerus sumi possit pro valore Numeri. Quod tamen cautè accipiendum est. Etenim sæpè contingit non omnem omnino numerum sumi posse pro valore Numeri, sed omnem qui cadat intra certos limites. Vt in hypothesi Diophanti, cùm alter quæsitorum sit 1 N. − 1. alter $\frac{9 - 1N}{1N}$ patet 1 N. maiorem esse debere quàm 1. minorem quàm 9. Quod si ponas alterum quęsitorum 1. N. erit alter $\frac{8 - 1N}{1N + 1}$. vnde patet pro valore Numeri sumi posse

quemlibet numerum minorem quàm 8. Porrò de huiusmodi terminis intra quos sumi debet valor Numeri, plura dicemus infrà ad quadragesimam primam.

QVÆSTIO XXXVIII.

INVENIRE tres numeros, vt qui fiunt ex binorum mutuo ductu, adscita eorundem summa, faciant datos numeros. Oportet autem datos esse quadratos vnitate multatos. Imperatum sit vt productus ex primo in secundum adscito vtroque faciat 8. Productus ex secundo in tertium cum vtroque faciat 15. Denique productus ex primo in tertium cum vtroque faciat 24. Quoniam igitur volo productum ex primo in secundum cum vtroque facere 8. si posuero secundum quemlibet, & eum de 8. detraxero, & residuum diuisero per vnitate maiorem secundo, habebo primum. Ponatur secundus 1 N − 1. & si eum abstulero de 8. & residuuum diuisero per vnitate maiorem secundo, erit vtique primus $\frac{9}{1N}$ − 1. Rursus simili ratione, quandoquidem volo productum ex secundo in tertium cum vtroque facere 15. Ab his aufero 1 N. − 1. & residuum diuido per vnitate maiorem secundo, hoc est per 1 N. fiunt $\frac{16}{1N}$ − 1. tantus est tertius. Superest vt productus ex primo in tertium cum vtroque faciat 24. facit autem $\frac{144}{1Q}$ − 1. Hæc æquantur 24. & fit 1 N. $\frac{12}{5}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{33}{12}$. secundus $\frac{7}{5}$. tertius $\frac{68}{12}$. & omnia ad eundem denominatorem, fit primus $\frac{165}{60}$. secundus $\frac{84}{60}$. tertius $\frac{340}{60}$.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ ὁποιωνοῦν προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τοὺς δοθέντας τετραγώνους εἶναι παρὰ μο α. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μο η, τὸν ὑπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ τρίτου μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μο ιε. τὸν δὲ ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τρίτου μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μο κδ. ἐπεὶ οὖν θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μο η. ἐὰν ἄρα τάξω τὸν δεύτερον ὅσου δήποτε, καὶ ἀπὸ μονάδων η ἄρω αὐτόν, καὶ τὸν λοιπὸν μερίσω παρὰ τὸν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, ἕξω τὸν πρῶτον. τετάχθω ὁ δεύτερος ςου α ⋔ μο α. καὶ ἐὰν ἀπὸ μο η ἀρῶ αὐτά, καὶ τὰ λοιπὰ μερίσω παρὰ τὸν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, ἔσται ὁ πρῶτος θ ἀριθμοῦ α. λείψει μο α. πάλιν ὁμοίως, ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μο ιε. ἀφελῶ ςου α. λείψει μο α. καὶ τὸν λοιπὸν μερίσω εἰς τὸν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, τουτέστιν εἰς ςου α. γίνονται ις ἀριθμοῦ α. λείψει μο α. ἕξω τὸν τρίτον. λοιπόν ἐστι τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ τρίτου μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μο κδ. ποιεῖ δὲ μο ρμδ δυνάμεως α. λείψει μο α. ταῦτα ἴσα μο κδ. καὶ γίνεται ὁ ςος ιβ ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος λγ ιβ. ὁ δὲ δεύτερος ζ ε. ὁ δὲ τρίτος ξη ιβ. καὶ πάντα εἰς ἓν μόριον, καὶ γίνεται ὁ πρῶτος ρξε ξ. ὁ δεύτερος πδ ξ. ὁ δὲ τρίτος σμ ξ.

IN QVAESTIONEM XXXVIII.

CVR hîc requirat Diophantus datos numeros esse quadratos vnitate multatos, ratio est euidens; Cùm enim verbi gratia 25 Q. æquentur 144. vt solutio esset rationalis, oportuit diuidendo vnitates per quadratos, quotientem fieri quadratum, fit autem 25. addita vnitate ad 24. vnum datorum numerorum. Similiter 144. fit ex mutuo ductu 9. & 16. qui fiunt addita vnitate ad datos numeros 8. & 15. vnde sequitur ipsum 144. esse quadratum, cùm ex duorum quadratorum multiplicatione oriatur. Quamobrem quadrato 144. per quadratum 25. diuiso, produci quadratum necesse est, & proinde solutionem contingere rationalem.

Porrò ex his apparet conditionem hanc nimis strictè proponi à Diophanto, non enim erat necesse 144. & 25. quadratos fuisse, sed sufficiebat vt essent quadratorum similes, cùm certum sit huiusmodi numerorum siue multiplicatione, siue diuisione mutua semper procreari quadratum. Ita igitur præscribi debuit hæc conditio. *Oportet autem si cuilibet datorum numerorum addatur vnitas, productum ex binorum multiplicatione, ad reliquum habere rationem quadrati ad quadratum.* Verbi gratia. Summa primi & secundi adscito plano sub ipsis contento esto 11. secundi & tertij 19. tertij & primi 14. Hîc nullus datorum numerorum est quadratus vnitate multatus. Attamen optimè solui potest quæstio; ob conditionis à nobis allatæ obseruationem. Nam ponatur secundus 1 N. − 1. erit primus $\frac{12 - 1N}{1N}$. tertius verò $\frac{20 - 1N}{1N}$. ductoque primo in tertium, & summa illorum producto

addita fiet $\frac{240 - 1Q}{1Q}$. æqualis 14. & tandem 240. æquantur 15 Q. vnde fit 1 N. 4. sunt ergo quæsiti numeri 2. 3. 4. Itaque vides addita vnitate ad datos numeros 11. & 19. fieri 12. & 20. ex quorum mutuo ductu producitur 240. qui ad reliquum vnitate auctum, nempe ad 15. habet rationem quadrati ad quadratum. Hinc facile est Canonem formare.

Datis numeris adde vnitatem sigillatim, productum ex binorum mutua multiplicatione diuide per reliquum, quotientis latus, erit vnus quæsitorum vnitate auctus.

Quod autem ait Xilander duobus primis vt collibuisset per præcedentem quæstionem positis, puta ; & 7. licuisse tertium inuenire & satisfacere quæstioni, falsum est vt ex hac ipsa hypothesi potes colligere. Nam duobus primis ita positis, impossibile est tertium inueniri qui reliquas postulati partes impleat.

QVÆSTIO XXXIX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἀορίστους, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον ποιεῖν τὸν δοθέντα. ἔστω τὸν η. τετάχθω ὁ πρῶτος ςος α. ὁ δεύτερος μο γ. καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν τ συναμφότερον ποιεῖ ςς β λείψει μο γ. ἴσους μο η. καὶ γίνεται ὁ ς μο ε. α ς. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο ε. α ς. ὁ δεύτερος μο γ. πάλιν οὖν σκέπτομαι πόθεν ἐγένετο ὁ ς. μο ε. α ς. ἐκ τοῦ τὸν ια μερισθῆναι εἰς τὸν β. ἀλλ' ὁ ια ὁ δοθείς ἐστι μετὰ τοῦ δευτέρου. οἱ δὲ ςςοὶ β εἰσὶν ὁ μοναδικῶς ἐλάσσων τοῦ δευτέρου. ἐὰν οὖν τάξωμεν τὸν δεύτερον ὅσου δήποτε, καὶ προσθῶμεν αὐτὸν τῷ δοθέντι, καὶ τὰ γενόμενα μερίσωμεν παρὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, εὑρήσομεν τὸν πρῶτον. ἔστω ὁ δεύτερος ςου α μο α. ταῦτα μετὰ μο η. ποιεῖ ς α. μο θ. μερίζω ταῦτα εἰς τὸν μονάδι μιᾷ ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, τουτέστιν εἰς ς α. καὶ γίνεται μο α. θ ςυ α. καὶ λέλυται ἐν τῷ ἀορίστῳ ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον, ποιεῖν μο η.

INVENIRE duos numeros indefinitè, vt productus eorum multiplicatione multatus summa ipsorum, faciat datum numerum. Hic esto 8. Ponatur primus 1 N. secundus 3. & productus eorum multiplicatione, vtroque dempto facit 2 N. — 3. æquales 8. & fit 1 N. 5. Ad positiones. Erit primus $5\frac{1}{2}$. secundus 3. Rursum igitur dispicio vnde factum sit quod 1 N. est $5\frac{1}{2}$. nimirum ex diuisione 11. per 2. sed 11. est compositus ex dato & secundo, & 2 N. est numerus vnitate minor secundo. Itaque si statuero secundum quantumcunque, eumque dato adiecero, & summam diuisero per vnitate minorem secundo, inueniam primum. Esto secundus 1 N. + 1. huic addito 6. fit 1 N + 9. quem diuido per vnitate minorem secundo, hoc est per 1 N. & fit 1 + $\frac{9}{1N}$. Itaque soluta est quæstio indefinitè; nam productus eorum multiplicatione, amborum summa detracta, facit 8.

IN QVAESTIONEM XXXIX.

HIc soluitur indefinitè quæstio, ita vt nullus omnino numerus excludatur à valore Numeri. Quod euenit quia in positionibus nullibi reperitur signum defectus, vt ex dicendis ad quadragesimam primam clarius patebit.

QVÆSTIO XL.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν τ συναμφότερον ποιῇ τοὺς δοθέντας. δεῖ δὴ τοὺς δοθέντας τετραγώνους εἶναι παρὰ μονάδα. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ὑπὸ τοῦ πρώτου λείψει συναμφοτέρου ποιεῖν μο η. τὸν δὲ ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου λείψει συναμφοτέρου ποιεῖν μο ιε. τὸν δὲ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου λείψαντα συναμφότερον ποιεῖν μο κδ. ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου λείψει συναμφοτέρου ποιεῖν μο η. ἐὰν ἀρι-

INVENIRE tres numeros, vt producti ex binorum mutua multiplicatione detracta amborum summa faciant datos numeros. Oportet autem datos esse quadratos vnitate multatos. Statutum sit productum ex primo in secundum vtroque detracto facere 8. Productum ex secundo in tertium vtroque dempto facere 15. & productum ex primo in tertium, vtroque ablato facere 24. Quia volo productum

ex

ex primo in secundum detracto vtroque facere 8. si secundum statuero quantumcunque, & eum adiecero ad 8. & summam diuisero per vnitate minorem secundo, habebo primum iuxta lemma iam expositum. Esto secundus 1 N. + 1. addo illi 8. fit 1 N + 9. diuido hoc per vnitate minorem secundo, hoc est per 1 N. fit $1 + \frac{9}{1N}$. Tantus est primus. Simili ratione inuenietur tertius $1 + \frac{16}{1N}$. Ita duobus postulatis est satisfactum. Superest vt productus ex primo in tertium vtroque dempto faciat 24. facit autem $\frac{144}{1Q} - 1$. hoc æquatur 24. & fit 1 N. $\frac{12}{5}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{57}{12}$. secundus $\frac{17}{5}$. Tertius $\frac{92}{12}$. Quos si velis idem habere nomen, omnia ad sexagesimas. Erit primus $\frac{285}{60}$. secundus $\frac{204}{60}$. tertius $\frac{460}{60}$.

τάξω τὸν δεύτερον οἷου δήποτε, καὶ προσθῶ αὐτὸν εἰς μο η. καὶ τὰ γινόμενα μερίζω παρὰ τὴν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, ἕξω τὸν πρῶτον, κατὰ τὸ λῆμμα τὸ προγεγραμμένον. ἔστω ὁ δεύτερος ς α μο α. προστίθημι αὐτῷ μο η γίνεται ς α μο θ. ταῦτα μερίζω εἰς τὴν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, τουτέστι εἰς ςς α. καὶ γίνεται μο α. θ ἀριθ. ἔσται ὁ πρῶτος ὁμοίως δὲ καὶ ὁ τρίτος ἔσται μο α. ις ἀριθ. καὶ λέλυταί μοι δύο ἐπιτάγματα. λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου λείψει συναμφοτέρων ποιεῖν μο κδ. ποιεῖ δὲ ρμδ δυν. λείψει μο α. ἴσα μο κδ. καὶ γίνεται ὁ ς ιβ ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος νζ ιβ. ὁ δὲ δεύτερος ιζ ε. ὁ δὲ τρίτος ϟβ ιβ. καὶ ἐὰν θέλῃς αὐτοὺς εἶναι ἑνὸς μορίου, πάντα εἰς ξ. ἔσται ὁ πρῶτος σπε ξ. ὁ δεύτερος σδ ξ. ὁ δὲ τρίτος υξ ξ.

IN QVAESTIONEM XXXX.

Hic quoque conditio nimis strictè proponitur à Diophanto, & proponenda est omnino vt ad trigesimam octauam dictum est. Etenim summa primi & secundi detracta à plano sub ipsis fiat 11. secundi & tertij 19. tertij & primi 14. Quamuis nullus datorum numerorum sit quadratus vnitate multatus, tamen quia cuilibet addendo vnitatem, productus ex binorum mutua multiplicatione ad reliquum est in ratione quadrati ad quadratum, optimè soluetur quæstio. Esto enim secundus 1 N. + 1. erit ergo primus $1 + \frac{12}{1N}$. At tertius $1 + \frac{20}{1N}$. ita satisfit duobus postulatis. Superest vt productus ex primo in tertium, vtroque dempto faciat 14. facit autem $\frac{240}{1Q} - 1$. hoc ergo æquatur 14. & fit 1 N. 4, Quare quæsiti numeri sunt 4. 5. 6. Hinc etiam elicietur iste Canon.

Datis numeris adde sigillatim vnitatem, productumque ex binorum mutua multiplicatione diuide per reliquum, quotientis latus, erit vnus quæsitorum vnitate multatus.

QVÆSTIO XLI.

Invenire duos numeros indefinitè, vt productus eorum multiplicatione ad summam eorundem datam habeat rationem. Esto productus summæ triplus. Ponatur primus 1 N. secundus 5. & est productus eorum multiplicatione. 5 N. hunc volumus triplum esse ad 1 N. + 5. Quamobrem 3 N. + 15. æquantur 5 N. & fit 1 N $7\frac{1}{2}$. Ad positiones. Erit primus $7\frac{1}{2}$. secundus 5. Considero hîc vnde 1 N. factus sit $7\frac{1}{2}$. nimirum ex diuisione 15 per 2. At 15. est multiplex secundi secundum datam rationem. At 2. est excessus quo secundus superat denominatorem rationis. Ergo si secundum statuamus quantumcunque, & multiplicemus eum per denominatorem rationis, & productum diuidamus per excessum quo secundus sueprat denominatorem ratio-

Εὑρεῖν ἀριθμοὺς ἀορίστους δύο. ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ὑπ' αὐτῶν συναμφοτέρου εἶναι τριπλασίονα. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος ς α. ὁ δεύτερος μο ε. καὶ ἐστὶν ὁ ὑπ' αὐτῶν ςς ε. ταῦτα θέλομεν εἶναι τριπλάσια ς α μο ε. ὥστε ςςοὶ γ μο ιε. ἴσοι εἰσὶν ςς ε. καὶ γίνεται ὁ ς μο ζ. α ς. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος μο ζ. α ς. ὁ δεύτερος μο ε. βλέπω οὖν πόθεν ὁ ς γέγονεν μο ζ. α ς. ἐκ τοῦ τὸν ιε μερισθῆναι εἰς β. ἀλλ' οἱ ιε ὁ δευτέρου πολλαπλασίων ἐστὶ ἐπὶ τὸν λόγον. ὁ δὲ β ἐστὶν ἐκ τῆς ὑπεροχῆς, ἧς ὑπερέχει ὁ δεύτερος τοῦ λόγου. ἐὰν οὖν τάξωμεν τὸν δεύτερον οἷου δήποτε ς. καὶ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν λόγον καὶ γινόμενον μερίσωμεν εἰς τὴν ὑπεροχὴν, ἧς ὑπερέχει ὁ δεύτερος τοῦ λόγου, ἕξομεν τὸν πρῶτον. ἔστω ὁ δεύτερος ς α. οὗτος ἐπὶ τὸν

λόγον ποιεῖ ςς^{ωὶ} γ̄. ἐ ἐὰν μερισθῇ εἰς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει ὁ δεύτερος τοῦ λόγου, τουτέστιν εἰς ἀριθμὸν ᾱ. λεῖψει μ° γ̄. γίνεται ὁ πρῶτος ἀριθμῶν Γ̄. ἐν μορίῳ ςς̄ α^{ˆ} λεῖψει μ° γ̄.

nis, habebimus primum. Esto secundus 1 N. Hic in denominatorem rationis, facit 3 N. qui si diuidatur per excessum secundi supra denominatorem rationis, nimirum per 1 N − 3. fit primus $\frac{3N}{1N-3}$.

IN QVAESTIONEM XLI.

QVAMVIS posito altero numerorum 1 N. altero $\frac{3N}{1N-3}$ quæstio indefinitè soluta sit, non tamen quilibet numerus statui potest pro valore Numeri, sed sumendus est omnino numerus aliquis maior quàm 3. vt euidens est. Vt haberi possit 1 N. − 3. per quem diuidantur 3 N. Itaque quoniam huc reiecimus tractationem de inueniendis terminis intra quos consistere debet valor Numeri in huiusmodi quæstionibus quæ indefinitè soluuntur, esto hæc regula generalis. Quotiescunque ex lege problematis institutis positionibus, in aliqua vel in aliquibus illarum reperiuntur vnitates cum defectu numerorum vel potestatis alicujus; aut è conuerso numeri vel potestatis cum defectu vnitatum; vel etiam vtrumque: necesse est vel dari terminum infrà quem, vel terminum supra quem, vel denique terminos intra quos sumi debet valor Numeri. Triplex ergo casus dari potest, ac proinde tria hæc obseruanda.

Primò si Numerus vel potestas alia adiunctum habeat defectum vnitatum, diuide vnitates per Numerorum vel potestatis numerum, quotiens erit terminus suprà quem sumi debet valor Numeri vel potestatis, vt in hac quæstione Diophanti, quia in vna positione reperitur 1 N. − 3. diuiso 3. per 1. fit quotiens 3. supra quem necesse est sumi valorem Numeri. Et si in aliqua positionum reperirentur 2 N. − 10. diuiso 10. per 2. fieret 5. terminus supra quem consistere deberet valor Numeri; idemque de alijs dicendum potestatibus, nam si haberes 3 Q. − 12. diuidendo 12. per 3. quotiens 4. esset terminus supra quem sumendus esset valor quadrati.

Secundò si vnitates adiunctum habeant defectum Numerorum vel aliarum potestatum, diuide rursus vnitates per Numerorum vel potestatum numerum, quotiens erit terminus infrà quem sumi debet valor Numeri vel potestatis vt accidit in secunda analysi quam tradidimus trigesima septima huius, vbi ponentes alterum quæsitorum 1 N. alter positus est $\frac{8-1N}{1N+1}$. Quare cùm diuidendo 8. per 1. fiat quotiens 8. conclusimus Numerum minorem sumi debuisse quàm 8. & sic de aliis.

Denique si in vna positionum reperiantur Numeri vel potestates aliæ cum defectu vnitatum, & simul in alia positione reperiantur vnitates cum defectu Numerorum, vel potestatis. Tunc vtrobique diuidendo vnitates per numerum Numerorum vel potestatum, fient quotientes, qui termini erunt intra quos sumi debet valor Numeri vel potestatis. Vt in analysi Diophantæa, quæstione trigesima septima citata, quoniam in vna positione reperitur 1 N. − 1. in altera 9 − 1 N. facta vtrobique diuisione producuntur 1. & 9. termini intra quos sumendus est valor Numeri. Quamobrem etiam inde facilè cognoscetur an proposita quæstio sit impossibilis, si enim tales termini reperiantur intra quos sumi non possit aliquis numerus, impossibilis erit quæstio. Verbi gratia, si in vna positione sit 3 − 15 N. in alia 2 N. − 12. Quia diuiso 15. per 3. fit 5. terminus infra quem sumendus est valor Numeri, at diuiso 12. per 2. fit 6. terminus suprà quem valor Numeri sumi debet, cùm euidens sit eundem numerum non posse esse maiorem quàm 6. minorem quàm 5. quæstionem impossibilem esse prononciabimus.

Cæterùm si in diuersis positionibus eædem species ab iisdem deficiant, sed inæquali multitudine sumendus erit terminus quæsitus ab illa positione in qua defectus est maior. Vt in primo casu, si in vna positione sit 2 N. − 6. in altera 2 N. − 8. sumendus erit terminus à postrema, diuidendo scilicet 8. per 2. vnde fit 4. terminus suprà quem sumendus est valor Numeri. Sic in secundo casu si in vna positione sit 8 − 2 N. in altera 8 − 4 N. sumetur etiam valor Numeri à postrema in qua est defectus maior. Vel aliter, in primo casu sumendus est terminus ab illa positione, in qua diuisis vnitatibus per Numeros vel potestates, fit quotiens maior. Contrà in secundo casu sumendus est terminus ab illa positione, in qua diuisis vnitatibus per Numeros vel potestates fit quotiens minor. Sic in primo casu si occurrant 3 N. − 15. & 4 N. − 12. sumetur terminus à priore quia diuiso 15. per 3. fit quotiens maior quàm diuiso 12. per 4. sed in secundo casu si occurrant 8 − 2 N. & 12 − 3 N. sumetur terminus à posteriore ob contrariam causam.

His sanè præceptis, tota de inueniendis huiusmodi terminis doctrina comprehenditur, quæ cùm facilia sint, & è re ipsa nata, ita vt suam secum ferant demonstrationem, tamen à nemine ante nos tradita sunt, vt verè asserere possim quæstionum quam plurimarum quæ indefinitè soluuntur, perfectam enodationem neminem hactenus calluisse; quod vno aut altero exemplo fiet manifestum. Sit enim propositum soluere pulcherrimum problema, quod omnium qui nos præcesserunt Arithmeticorum ingenia mirè torsit, quodque olim ex parte explicauimus libello nostro extremo iucundo-

rum problematum qui per numeros absoluuntur, ante aliquot annos Lugduni edito nimirum.

Datum numerum diuidere in quotlibet numeros, ita vt singulis in datos numeros ductis, summa productorum datum conficiat numerum. Oportet autem summam productorum cadere inter productos, ex numero diuidendo in maximum & in minimum multiplicatorum.

Verbi gratia. Sit 20. diuidendus in tres numeros, ita vt primum ducendo in 4. secundum in $\frac{1}{2}$ tertium in $\frac{1}{4}$. summa productorum conficiat etiam 20. Esto primus 1 N. ergo reliqui duo simul erunt $20 - 1$ N. & cum primo ducto in 4. fiant 4 N. his subductis à summa productorum, remanet $20 - 4$ N. continens vtique $\frac{1}{2}$ secundi & $\frac{1}{4}$. tertij. Quare ducendo $20 - 4$ N. in 4. fiet $80 - 16$ N. continens bis secundum, & tertium semel. Proinde si hinc auferatur summa secundi & tertij, puta $20 - 1$ N. relinquetur secundus $60 - 15$ N. quem si auferas à summa secundi & tertij, nempe à 20. $- 1$ N. remanebit tertius 14 N. $- 40$. Itaque primo posito 1 N. fit secundus 60. $- 15$ N. tertius 14 N. $- 40$. & quæstio indefinitè soluta est. Quoniam verò secundus continet vnitates cum defectu numerorum, & tertius continet numeros cum defectu vnitatum, diuidendo vtrobique vnitates per Numeros, fient termini intra quos consistere debet valor numeri, nimirum 4. & $2 \frac{6}{7}$. Quare soluetur quæstio si 1 N. ponatur quilibet numerus minor quàm 4. maior quàm $2 \frac{6}{7}$. Verbi gratia ponatur 3. erit primus 3. secundus 15. tertius 2.

Rursus sit propositus 41. diuidendus in tres numeros ea lege, vt primum ducendo in 4. secundum in 3. tertium in $\frac{1}{3}$. summa productorum sit 40. Esto primus 1 N. ergo reliqui simul erunt $41 - 1$ N. & cùm primo ducto in 4 fiant 4 N. his detractis à 40. summa productorum, remanet $40 - 4$ N. continens ter secundum, & $\frac{1}{3}$ tertij. Quare ducendo $40 - 4$ N. in 3. fiet $120 - 12$ N. continens secundum nouies, & tertium semel. Ac proinde si hinc auferatur summa secundi & tertij, nempe $41 - 1$ N. relinquetur octuplum secundi, puta $79 - 11$ N. Quare secundus erit $9. \frac{7}{8} - 1 \frac{3}{8}$ N. quo subducto à summa secundi & tertij, remanet tertius $31 \frac{1}{8} + \frac{3}{8}$ N. & quæstio indefinitè soluta est. Quoniam verò signum defectus reperitur tantùm in secundo numero $9 \frac{7}{8} - 1 \frac{3}{8}$ N. vnus tantùm hîc erit terminus, infrà quem scilicet sumendus erit valor Numeri, qui habetur diuidendo vnitates per numeros, estque $7 \frac{2}{11}$. Quare soluetur quæstio si 1 N. ponatur quilibet numerus minor quàm $7 \frac{2}{11}$. Ponatur 5. Erunt quæsiti numeri 5. 3. 33.

Sæpe autem huiusmodi quæstiones ita proponuntur, vt requiratur solutionem in integris exhiberi seclusis fractionibus, quod accidit ex rerum quibus applicantur natura quæ non patitur diuisionem in partes, vt si de hominibus vel animalibus mentio fiat. Verbi gratia proponatur ita prior quæstio. Fuerunt in symposio personæ 20. nimirum viri, mulieres, & pueri, & expenderunt simul solidos 20. ita tamẽ vt quilibet virorum soluerit 4. solidos, quælibet mulierum $\frac{1}{2}$ solidi, quilibet puerorum $\frac{1}{4}$ solidi. Quæritur tam virorum, quàm mulierum, atque puerorum numerus sigillatim. Similiter sic proponatur posterior quæstio. Fuerunt personæ 41. expenderuntque solidos 40. & virorum quilibet persoluit 4. solidos, quælibet mulier 3. puerorum quilibet $\frac{1}{3}$ solidi. Quæritur idem quod prius. Hîc patet solutionem in integris omnino exhibendam esse. Quod quidẽ facilè præstabitur in priore quæstione, quia in positionibus nullæ omnino interueniunt fractiones, nam sufficiet si sumatur quilibet numerus integer cadens inter terminos inuentos 4. & $2 \frac{6}{7}$. qualis est 3. vnde fiunt quæsiti numeri qui suprà 3. 15. 2. At in posteriore, vbi positiones habent fractiones admixtas, maiore artificio res opus habet. Veruntamen ita expedietur. Quoniam tertius numerus ponitur $31 \frac{1}{8} + \frac{3}{8}$ N. euidens est vt solutio contingat in integris, oportere pro valore Numeri sumi numerum integrum minorem quàm $7 \frac{2}{11}$. cuius tres octauæ partes adscita $\frac{1}{8}$ vnitatis faciant integrum. Quia vero vt habeantur $\frac{3}{8}$ cuiuslibet numeri, ducendus est ille numerus in 3. & productus diuidendus per 8. Patet quærendum esse numerum minorem quàm $7 \frac{2}{11}$ quo ducto in 3. & producto addendo 1. fiat numerus multiplex ad 8. seu quod idem est. Quærendus est numerus multiplex ad 8. qui excedat vnitate multiplicem ad 3. ita tamen vt multiplicator ipsius 3. sit minor quàm $7 \frac{2}{11}$. Id autem qui fieri possit abundè docuimus in elementis, immò demonstrauimus vniuersale hoc problema.

Datis duobus numeris inter se primis, inuenire multiplicem vnius, qui alterius multiplicem superet dato numero, ita vt inuenti multiplices sint minimi qui hoc præstent.

Inuentisque minimis, alios omnes ordinatim multiplices idem præstantes ostendimus inueniri posse vnde sanæ propositæ quæstionis solutio manifesta est, inuenieturque 16. multiplex ad 8. qui excedit vnitate 15. multiplicem ad 3. & diuiso 15. per 3. fiet 5. quæsitus valor Numeri. Quare numeri qui prius reperiuntur 5. 3. 33.

Huius naturæ quæstio proponitur in veteri Epigrammate quod extat apud Pithœum lib. 4. & tale est.

Vt tot emantur aues, bis denis vtere nummis
  Perdix, Anser, Anas empta vocetur auis.
Sit simplex obolus pretium Perdicis, ematur.
  Sex obolis Anser, bisque duobus Anas.
Vt tua procedat in lucem quæstio, mentem
  Consule, sic loquitur pectoris arca mihi.
Sint Anates tres atque duæ, simplex erit Anser.
  Accipe Perdices quatuor atque decem.

Huius quæstionis sensus est. Viginti Nummis, quorum quilibet duos obolos valet, seu 40. obolis emuntur Aues 20. videlicet Perdices, Anseres, Anates, sed Perdix obolo vno constat, Anser 6 obolis, Anas 4. Quæritur Perdicum numerus, itemque Anserum atque Anatum. Ponatur Anserum numerus 1 N. erit Perdicum & Anatum simul numerus 20 − 1 N. erit autem Anserum omnium pretium 6 N. quo detracto à 40. obolis, remanet pretium Perdicum & Anatum simul 40 − 6 N. Quare 40 − 6 N. continet. Perdicum numerum semel, & Anatum numerum quater, ac proinde hinc auferendo numerum Perdicum & Anatum semel, nempe 20 − 1 N. remanet 20 − 5 N. triplum numeri Anatum, vnde Anatum numerus est $6\frac{2}{3} - \frac{5}{3}$ N. quo detracto à 20 − 1 N. remanet Perdicum numerus $13.\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ N & quæstio indefinitè soluta est. Sed quia in numero Anatum reperiuntur vnitates cum defectu Numerorum diuiso $6\frac{2}{3}$ per $\frac{5}{3}$. fit 4. terminus infrà quem sumendus est valor Numeri. Rursus ob fractiones adiunctas, vt solutio contingat in integris, quia Perdicum numerus est $13\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ N. patet valorem Numeri esse debere, numerum integrum cuius $\frac{2}{3}$ adsciscentes $\frac{1}{3}$ faciant integrum. Seu quod idem est quærendus est multiplex ad 3. qui excedat vnitate multiplicem ipsius 2. ita tamen vt multiplicator ipsius 2. sit minor quàm 4. inuenieturque ipse 3. qui excedit vnitate ipsum 2. Quare diuiso 2. per 2. fit 1. quæsitus valor Numeri. Est ergo Anserum numerus 1. Anatum 5. Perdicum 14. vt voluit Epigrammatarius.

Iam verò diuidendus sit 100. in quatuor numeros, vt primo ducto in 3. secundo in 1. tertio in $\frac{1}{2}$. quarto in $\frac{1}{7}$. summa productorum sit 100. Ponatur primus 1 N. ergo reliquorum summa erit 100 − 1 N. & cùm ex primo in 3. fiant 3 N. erit summa trium reliquorum productorum 100 − 3 N. Superest igitur vt partiamur 100 − 1 N. in tres numeros vt primo ducto in 1. secundo in $\frac{1}{2}$. tertio in $\frac{1}{7}$ summa productorum sit 100. − 3 N. id autem vt fieri possit, propter adiectam ab initio huic quæstioni conditionem, oportet productum ex 1. maximo multiplicatorum in 100 − 1 N. nempe 100 − 1 N maiorem esse quàm 100 − 3 N. & rursus productum ex $\frac{1}{7}$ minimo multiplicatorum in 100 1 N. nempe $\frac{100}{7} - \frac{1}{7}$ N. minorem esse quàm 100 − 3 N. Et primùm quidem manifestum est, nam per se patet 100 − 1 N. maiorem esse quàm 100 − 3 N. quod signum est non dari minimum terminum supra quem sumi debeat valor Numeri, sed ritè solui posse quæstionem quantumlibet exiguus statuatur primus quatuor quæsitorum numerorum. At verò vt secundum consequamur, cùm non statim appareat an $\frac{100}{7} - \frac{1}{7}$ N. sit minor quàm 100 − 3 N. fingamus æquari, fiet 1 N. 30. maximus terminus, infrà quem vtique sumendus est valor Numeri. Vnde iam constat quæstionem infinitas recipere solutiones, cùm primus quatuor quæsitorum numerorum statui possit quilibet numerus minor quàm 30. Ponatur verbi gratia 20. erit ergo trium reliquorum summa 80. & cùm ex 20. in 3. fiat 60. quo subducto à 100. remanet 40. erit vtique trium reliquorum productorum summa 40. Superest igitur vt diuidamus 80. in tres partes, vt prima ducta in 1. secunda in $\frac{1}{2}$. tertia in $\frac{1}{7}$. summa productorum sit 40. Ponatur prima 1 N. erunt duæ reliquæ simul 80 − 1 N. & quia ex prima parte in 1. fit 1 N. patet duorum reliquorum productorum summam esse 40 − 1 N. quæ vtique continet $\frac{1}{2}$ secundæ partis & $\frac{1}{7}$ tertiæ. Quare multiplicando per 7. fiet 280 − 7 N. continens semel tertiam & $\frac{7}{2}$ secundæ. Proinde si hinc auferatur summa secundæ & tertiæ, puta 80 − 1 N. restat 200 − 6 N. continens $\frac{5}{2}$ secundæ. Quamobrem ipsa pars secunda reperietur 80 − $\frac{12}{5}$ N. quam auferendo à 80 − 1 N. restat pro tertia $\frac{7}{5}$ N. & quæstio indefinitè soluta est. Nam posito primo quatuor quæsitorum numerorum 20. erit secundus 1 N. tertius 80 − $\frac{12}{5}$ N. Quartus $\frac{7}{5}$ N. sed quoniam in tertio sunt vnitates cum defectu Numerorum diuiso 80. per $\frac{12}{5}$ fit $33\frac{1}{3}$ terminus infrà quem sumendus est valor Numeri. Quod si sumas 30. fient quæsiti Numeri 20. 30. 8. 42. qui satisfaciunt proposito. Et sic infinitis alijs modis solui potest quæstio, cùm admittendo fractiones infiniti numeri sumi possint infra $33\frac{1}{3}$.

Verùm si requiratur solutionem in integris exhiberi, vtendum erit eodem artificio quod suprà explicauimus. Vt si quæstio hæc ita proponatur. Fuerunt in symposio personæ 100. viri, mulieres, pueri, puellæ. Et vir quilibet expendit tres aureos, mulier 1. puer $\frac{1}{2}$ puella $\frac{1}{7}$. Quæritur virorum, & mulierum, puerorúmque & puellarum numerus, eodem vtentes ductu euidenter inferemus sumendam esse pro valore Numeri aliquem Numerum minorem quàm $33\frac{1}{3}$ quem quinarius metiatur, & sic sex solutiones in integris per hanc operationem reperientur, prout posito virorum numero 20. ponetur mulierum numerus 5. vel 10. vel 15. vel 20. vel 25. vel 30. Itaque vt omnes solutiones quæ in in-

tegris possunt exhiberi, reperiamus, cum iam determinatum sit virorum numerum poni posse quemlibet infrà 30. toties repetenda erit hæc operatio quot sunt numeri integri infra 30. nimirum nouies & vicesies. Sed rem succedere non posse inueniemus, si numerus virorum ponatur 1. vel 2. vel 3. vel 29. Nam si ponatur 1. & mulierum numerus 1 N. erit puerorum numerus $232 - \frac{12}{5}$ N. At puellarum $\frac{7}{5}$ N. $- 133$. Quare termini intra quos cadere debet valor Numeri erunt 97. & 96. $\frac{2}{3}$. inter quos nullus cadit integer numerus. Similiter si virorum numerus ponatur 2. mulierum 1 N. erit puerorum numerus $224 - \frac{12}{5}$ N. puellarum verò $\frac{7}{5}$ N. $- 126$. Quare termini intra quos consistere debet valor Numeri erunt $93\frac{1}{3}$. & 90. inter quos nullus cadit integer quem quinarius metiatur. Rursus si statuatur virorum numerus 3. mulierum 1 N. erit puerorum numerus $216 - \frac{12}{5}$ N. & puellarum $\frac{7}{5}$ N. $- 119$. Quare termini intra quos sumi debet valor Numeri reperientur 90. & 85. inter quos non cadit integer quem quinarius metiatur. Denique si numerus virorum ponatur 29. mulierum 1 N. erit puerorum numerus $8 - \frac{12}{5}$ N. puellarum verò $\frac{7}{5}$ N. $+ 63$. Quare terminus infra quem sumendus est valor Numeri reperietur $3\frac{1}{3}$. Infra quem nullus est numerus integer quem quinarius metiatur. Cæterùm si virorum Numerus statuatur quilibet cadens inter 3. & 29. res optimè succedet, & reperientur in integris solutiones numero 81. quas omnes in sequenti diagrammate exhibeo, monens primum numerum esse virorum, secundum mulierum, tertium puerorum, quartum denique puellarum.

28	27	26	26	25	25	25	24	24
5	5	10	5	15	10	5	15	10
4	12	8	20	4	16	28	12	24
63	56	56	49	56	49	42	49	42
24	23	23	23	23	22	22	22	22
5	20	15	10	5	20	15	10	25
36	8	20	32	44	16	28	40	4
35	49	42	35	28	42	35	28	49
22	21	21	21	21	21	20	20	20
5	25	20	15	10	5	30	25	20
52	12	24	36	48	60	8	20	32
21	42	35	28	21	14	42	35	28
20	20	20	19	19	19	19	19	19
15	10	5	35	30	25	20	15	10
44	56	68	4	16	28	40	52	64
21	14	7	42	35	28	21	14	7
18	18	18	18	18	17	17	17	17
35	30	25	20	15	40	35	30	25
12	24	36	48	60	8	20	32	44
35	28	21	14	7	35	28	21	14
17	16	16	16	16	16	15	15	15
20	45	40	35	30	25	45	40	35
56	4	16	28	40	52	12	24	36
7	35	28	21	14	7	28	21	14
15	14	14	14	14	13	13	13	13
30	50	45	40	35	55	50	45	40
48	8	20	32	44	4	16	28	40
7	28	21	14	7	28	21	14	7
12	12	12	11	11	11	10	10	10
55	50	45	60	55	50	65	60	55
12	24	36	8	20	32	4	16	28
21	14	7	21	14	7	21	14	7
9	9	8	8	7	7	6	5	4
65	60	70	65	75	70	75	80	85
12	24	8	20	4	16	12	8	4
14	7	14	7	14	7	7	7	7

Hinc apparet quæstiones huiusmodi à nobis perfectissimè resolui, cùm tamen Nicolaus Tartalea asserat, neque per Algebram, neque per aliam certam regulam id fieri posse. Sed & alius non contemnendus Arithmeticus, cùm hanc ipsam quæstionē sub eadem prorsus hypothesi sibi proposuisset enodandam, vnicam tantùm illius solutionem affert, eam scilicet quæ primum in superiore diagrammate locum obtinet, eamque etiam non satis certa ratione inuestigat, sed illa vtitur regula quam in libello nostro Iucundorum Problematum olim explicauimus, quamque vt nimis inperfectam meritò reiicimus.

Quod si postuletur exemplum in quo vnica solutio contingat in integris. Sit Personarum numerus 60. aureorum expensorum summa 100. & vir quilibet expendat 2. aureos. Mulier $\frac{2}{3}$. Puer $\frac{3}{5}$. Puella $\frac{1}{2}$. Ponatur virorum numerus 1 N. Igitur 60 − 1 N. erit numerus mulierum, puerorum & puellarum simul, & 100 − 2 N. erit reliquorum aureorum summa, quare ducendo tum $\frac{2}{3}$. tum $\frac{1}{2}$ in 60 − 1 N. fiet 40 − $\frac{2}{3}$ N. maior quàm 100. − 2 N & 30 − $\frac{1}{2}$ N. minor quàm 100 − 2 N. & vtraque æquatione sigillatim resoluta fient termini intra quos consistere debet valor Numeri 45. & 46. $\frac{2}{3}$. Proinde cùm inter eos cadat solus numerus integer 46. patet virorum Numerorum non posse poni nisi 46. Atque ideo relinquentur personæ 14. Aurei 8. statuatur mulierum numerus 1 N. tandem inuenietur puerorum numerus 10 − $\frac{5}{3}$ N. Puellarum verò 4 + $\frac{2}{3}$ N. Quare cùm diuiso 10. per $\frac{5}{3}$ prodeat 6. patet pro valore Numeri sumendum esse Numerum infrà 6. quem ternarius metiatur ob fractiones positionibus admixtas. Itaque cùm infrà 6. solus numerus 3. habeat tertiam partem in integris; vnica continget solutio posito scilicet valore Numeri 3. & erit virorum numerus 46. Mulierum 3. Puerorum 5. Puellarum 6. eodem prorsus artificio diuidetur datus numerus in quinque aut plures numeros, ita vt singulis in datos numeros ductis, summa productorum datum conficiat numerum. Quamobrem ex omni parte satisfactum est proposito.

Cæterùm ad hanc quæstionem facilè reducuntur Alligationis regulæ, quarum perfectam enodationem, neminem antè nos tradidisse audacter asserere ausim. Etenim cùm tria rei alicuius genera proponuntur alliganda, patet vulgari regula vnicam tantùm reperiri solutionem, quamuis infinitæ tradi possint. Quod vt exemplo comprobemus. Sint alliganda tria Auri genera. Primum 24. graduum bonitatis quos vulgo Karattos vocant. Secundum 22. Karattorum. Tertium 18. & conficienda sit Massa librarum 60. auri Karattorum 20. sanè per vulgarem illam Alligationis regulam vnica reperietur solutio, & sumendæ erunt libræ 12. ex auro 24. Karattorum. Itemque libræ 12. ex auro 22. Karattorum. Ac denique libræ 36. ex auro 18. Karattorum. Sed quæstio suaptè natura infinitas recipit solutiones, quas sic indagabimus. Quoniam ducto 60. in 20. fit 1200. patet in tota massa conficienda contineri gradus bonitatis seu Karattos 1200. Quare superest vt diuidamus 60. in tres numeros, ita vt primo ducto in 24. secundo in 22. tertio in 18. summa productorum sit 1200. Ponatur primus 1 N. erit summa reliquorum 60 − 1 N. & cùm ducto 24. in 1 N. fiant 24 N. erit reliquorum productorum summa 1200 − 24 N. quæ continet secundum numerum bis & vicesies. Tertium verò decies & octies. Quare cùm 60 − 1 N. contineat secundum & tertium semel, ducto eo in 18. fiet 1080 − 18 N. continens vtrumque decies & octies, & si hic auferatur à 1200. − 24 N. remanet 120 − 6 N. continens secundum quater. Proinde secundus est 30 − $\frac{3}{2}$ N. quo detracto à 60 − 1 N. remanet tertius 30 + $\frac{1}{2}$ N. & quæstio indefinitè soluta est. Vt ergo habeamus terminum infra quem consistere debet valor Numeri diuidamus 30. per $\frac{3}{2}$ fiet 20. quæsitus terminus. Igitur ex auro 24. Karattorum sumi potest quilibet librarum numerus minor quàm 20. vnde constat infinitis modis solui posse quæstionem. Verbi gratia, sumantur ex prædicto auro libræ 18. sumemus ex secundo libras 3. ex tertio libras 39. Rursus sumantur primi auri libræ 16. secundi 6. tertij 38. Rursus sumantur, primi auri libræ 14. secundi 9. tertij 37. vel sumantur, primi auri libræ 10. secundi 15. tertij 35. vel sumantur primi auri libræ 8. secundi 18. tertij 34. vel sumantur primi auri libræ 6. secundi 21. tertij 33. vel sumantur primi auri libræ 4. secundi 24. tertij 32. vel etiam sumantur primi auri libræ 2. secundi 27. tertij 31. His omnibus modis, etiam per integros soluitur quæstio, quod si fractiones admittere libeat, quæ ab hoc quæstionum genere non excluduntur, infinitas alias solutiones reperiri posse manifestum est. Hæc dixisse sufficiat, ne pulcherrimum vtilissimúmque inuentum posteris inuidisse videamur.

QVÆSTIO XLII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου συναμφοτέρους εἶναι τρίς. τὸν δὲ ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου, συναμφοτέρους εἶναι τετράκις. τὸν δὲ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου συναμφο-

INVENIRE tres numeros, vt quem bini producunt, is ad eorum summam datam habeat rationem. Sit productus è primo in secundum, ad summam ipsorum triplus, productus è secundo in tertium, sit ad summam eorum quadruplus,

& productus è primo in tertium, summæ amborum sit quintuplus. Statuatur secundus 1 N. erit ex præcedenti lemmate primus $\frac{3N}{1N-3}$. eodem modo tertius erit $\frac{4N}{1N-4}$. Restat vt productus ex primo in tertium ad summam ipsorum sit quincuplus. Sed productus ex primo in tertium est $\frac{12Q}{1Q+12-7N}$ summa verò primi & tertij est $\frac{7Q-24N}{1Q+12-7N}$. quæ sic habetur. Quoniam oportet addere minutias $\frac{3N}{1N-3}$, & $\frac{4N}{1N-4}$. Ipsi quidem numeri in denominatores alternatim multiplicabuntur, verbi gratia 3 N. in denominatorem alterius, hoc est in 1 N. − 4. & rursus 4 N. in denominatorem alterius, puta in 1 N. − 3. sic facta est summa 7 Q. − 24 N. sub denominatione partis quæ fit ex denominatorum mutua multiplicatione, hoc est 1 Q. + 12 − 7 N. Habemus autem & productum ex primo in tertium $\frac{12Q}{1Q+12-7N}$. Quamobrem $\frac{12Q}{1Q+12-7N}$. quincuplum est summæ. Proinde summa quinquies puta $\frac{35Q-120N}{1Q+12-7N}$. æqualis est $\frac{12Q}{1Q+12-7N}$. & omnia ducantur in communem denominatorem, Puta 1 Q. + 12 − 7 N. fiunt 12 Q. æqualis 35 Q. − 120 N. & fit 1 N. $\frac{120}{23}$. Ad hypostases. Posueram primum $\frac{3N}{1N-3}$. secundum 1 N. tertium $\frac{4N}{1N-4}$. At 1 N. inuentus est $\frac{120}{23}$. hunc si ducas in primum, eo ducto in 3 N. fiet $\frac{360}{23}$. At eo ducto in denominatorem 1 N. − 3. fient $\frac{51}{23}$. erit igitur primus $\frac{360}{51}$. secundus autem $\frac{120}{23}$. non enim habebat numericam minutiam. At tertius similiter inuenietur, nam ducto $\frac{120}{23}$ in 4 N. fiet $\frac{480}{23}$. Eodem modo ducto $\frac{120}{23}$ in denominatorem 1 N. − 4. fiet $\frac{28}{23}$. Est ergo tertius $\frac{480}{28}$. & demonstratio est manifesta.

τέροις ᾖ πεντάκις. τετάχθω ὁ δεύτερος ϛ^ος α̅. ἔσται δὴ διὰ τὸ λῆμμα ὁ πρῶτος ϛϛ γ̅. ἐν μορίῳ ϛ^ου α̅ λείψει μ° γ̅. ὁμοίως καὶ ὁ τρίτος ϛϛ δ̅. ἐν μορίῳ ϛ^ου α̅. λείψει μ° δ̅. λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου συναμφοτέρους εἶναι πεντάκις. ἀλλ' ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἐστὶ δ^υ ιβ̅. ἐν μορίῳ δ^υ α̅ μ° ιβ̅. λείψει ϛϛ ζ̅ συναμφότερος δὲ ἐστιν ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος δ^υ ζ̅. λείψει ϛϛ κδ̅ μορίου δ^υ α̅. μ° ιβ̅. λείψει ϛϛ ζ̅. οὕτως. ὅταν γὰρ δέῃ συνθεῖναι μόρια οἷον ϛϛ^ῶν γ̅. μορίου ϛ^ου α̅. λείψει μ° γ̅. καὶ ϛϛ^ῶν δ̅. μορίου ϛ^ου α̅. λείψει μ° γ̅. καὶ ϛϛ^ῶν δ̅. μορίου ϛ^ου α̅. λείψει μ° δ̅. οἱ μὲν ϛϛ^οὶ ἐπὶ τὰ ἐναλλὰξ μόρια πολλαπλασιασθήσονται, οἷον ϛϛ^οὶ γ̅. ἐπὶ τὰ ἑτέρου μόρια τουτέστιν ἐπὶ ϛ^ὸν α̅. λείψει μ° δ̅. καὶ πάλιν οἱ ϛϛ^οὶ δ̅. ἐπὶ τὰ μόρια τοῦ ἑτέρου ἐπὶ ϛ^ὸν α̅. λείψει μ° γ̅. οὕτως ἐποίησεν ἡ σύνθεσις δ^υ ζ̅. λείψει ϛϛ κδ̅. μορίου τοῦ ὑπὸ τῶν μορίων, τουτέστι δ^υ α̅. μ° ιβ̅. λείψει ϛϛ ζ̅. εἴχομεν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου δ^υ ιβ̅. μορίου δ^υ α̅. μ° ιβ̅. λείψει ϛϛ ζ̅. δυνάμεις ἄρα ιβ̅. μορίου δ^υ α̅. μ° ιβ̅. λείψει ϛϛ ζ̅. πενταπλάσιαι εἰσὶ τῆς συνθέσεως. πεντάκις ἄρα ἡ σύνθεσις γίνεται δ^υ λε̅ ⋔ ϛϛ ρκ̅. μορίου δ^υ α̅. μ° ιβ̅ ⋔ ϛϛ ζ̅. ἴσαι δ^υ ιβ̅. μορίου τοῦ αὐτοῦ, καὶ πάντα ἐπὶ τὸ κοινὸν αὐτῶν μόριον δ^υ α̅. μ° ιβ̅ ⋔ ϛϛ ζ̅. καὶ γίνονται δ^υ ιβ̅. ἴσαι δ^υ λε̅ ⋔ ϛϛ ρκ̅. καὶ γίνεται ὁ ϛ^ος ρκ̅ κγ^ων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. εἶχον δὲ τὸν μὲν πρῶτον ϛϛ γ̅. μορίου ϛ^ου α̅ ⋔ μ° γ̅. τὸν δὲ δεύτερον ϛ^ον α̅. τὸν δὲ τρίτον ϛϛ δ̅. μορίου ϛ^ου α̅. ⋔ μ° δ̅. εὑρέθη δὲ ὁ ϛ^ος ρκ̅ κγ^ων. ἐὰν μὲν ἐπὶ τὸν πρῶτον ποιῇς, ἐπὶ ϛϛ^οὺς γ̅. ἔσονται μ° τξ̅ κγ^ων. λοιπὸς ἐπὶ τὸ μόριον ρκ̅ κγ^ων. ἐπὶ ϛ^ον α̅. λείψει μ° γ̅. γίνονται μ° να̅ κγ^ων. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος τξ̅ να^ων. ὁ δὲ δεύτερος ρκ̅ κγ^ων. οὐ γὰρ εἶχεν ἀριθμητικὸν μόριον. ὁ δὲ τρίτος ὁμοίως, ρκ̅ κγ^ων. ἐπὶ τοὺς τέσσαρας ϛϛ^οὺς. γίνονται υπ̅ κγ^ων. ὁμοίως, καὶ ἐπὶ τὸ μόριον, ρκ̅ κγ^ων. ἐπὶ ϛ^ον α̅. ⋔ μ° δ̅. γίνονται μ° κη̅ κγ^ων. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος μ° υπ̅ κη^ων. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XLII.

HÆC quæstio pendet à præcedente, vt disertis verbis monet Diophantus. Cæterùm in sua versione Xilander multa omisit, quæ clarioris doctrinæ gratia posuit Diophantus, vt apparet ex textu Græco, & ex nostra versione.

QVÆSTIO XLIII.

INVENIRE tres numeros, vt quem bini producunt mutua multiplicatione, is ad compositum ex tribus datam

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρὸς τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν

μένων ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου τῶν τριῶν εἶναι τριπλασίονα. τὸν δὲ ὑπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ τοῦ τρίτου τῶν τριῶν εἶναι τετραπλασίονα. τὸν δὲ ὑπὸ τοῦ τρίτου, καὶ τοῦ πρώτου τῶν τριῶν εἶναι πενταπλασίονα. ἐπεὶ οὖν ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρὸς τὸν ἐκ τῶν τριῶν λόγον ἔχει δεδομένον. ζητῶ πρότερον τρεῖς ἀριθμοὺς, καὶ τυχόντα, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρὸς τὸν τυχόντα λόγον ἔχῃ τὸν ἐπιταχθέντα. ἔστω ὁ τυχὼν μο ε. καὶ ἐπεὶ ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου τυχόντος καὶ τοῦ δευτέρου τυχόντος ἐστὶ τριπλασίων τουτέστι τοῦ ε. ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου, ἄρα καὶ τοῦ δευτέρου ἔσται μο ιε. δεύτερος ς α. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται ιε ἀριθμοστοῦ. πάλιν ἐπεὶ ὁ ὑπὸ τοῦ δευτέρου, τοῦ τρίτου τοῦ ε. ἐστὶ τετραπλασίων. ὁ ἄρα ὑπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ τρίτου ἔσται μο κ. ἐστὶ δὲ ὁ δεύτερος ς α. ὁ ἄρα τρίτος ἔσται κ ἀριθμοστοῦ. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ τρίτου ὅς εἰσι τ δυναμοστοῦ. ταῦτα τοῦ ε. εἶναι πενταπλάσια, γίνονται μο τ. ἴσαι δυ κε. καὶ εἰ ἦν τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ἔχον ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. λελυμένον ἂν ἦν μοι τὸ ζητούμενον, ἀλλ' αἱ μο τ. ὑπὸ τοῦ ιε. ἐστὶ καὶ τοῦ κε. ἀλλ' οἱ ιε. τριπλασίων ἐστὶ τοῦ ε. ὁ δὲ κ. τετραπλασίων ἐστὶ ε. θέλομεν οὖν τοῦ τριπλασίονος τοῦ ε. ἐπὶ τὸν τετραπλασίονα τοῦ ε. πολλαπλασιασθέντος γενόμενον πρὸς τὸν πενταπλασίονα τοῦ ε. λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ὁ δὲ ε. τυχών ἐστι. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ ζητεῖν τινα ἀριθμὸν ὅπως ὁ τριπλασίων αὐτοῦ πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν τετραπλασίονα αὐτοῦ, καὶ ὁ γενόμενος, πρὸς τὸν πενταπλασίονα αὐτοῦ, λόγον ἔχῃ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἔστω ὁ ζητούμενος ς α. καὶ ὁ τριπλασίων αὐτοῦ πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν τετραπλασίονα αὐτοῦ ποιεῖ δυ ιβ. δεῖ τοίνυν τοῦτον πρὸς τὸν πενταπλασίονα αὐτοῦ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. δυνάμεις ἄρα ιβ. πρὸς ἀριθμοὺς ε. ἐθέλομεν εἶναι ἐν λόγῳ ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὁ ἄρα ὑπ' αὐτῶν, καὶ αὐτὸς ἔσται τετράγωνος. κύβοι ἄρα ξ. ἴσοι τετραγώνῳ. οὗτος δὲ ἄρα ἔστω δυ π. καὶ γίνεται ὁ ς μο ιε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ ζητούμενος μο ιε. τάσσω οὖν αὐτὸν μο ιε. ἔσται ἄρα ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου μο με. καὶ ἔστιν ὁ δεύτερος ς α. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται με ἀριθμοστοῦ. ὁμοίως καὶ ὁ τρίτος ξ ἀριθμοστοῦ. λοιπόν ἐστι τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ τρίτου τουτέστι ͵βψ δυναμοστοῦ. τῶν μο ιε. κατασκευάσαι πενταπλασίονα, τὸ ἄρα ͵βψ δυναμοστοῦ. ἴσον μο οε. καὶ γίνεται ὁ ς μο

habeat rationem. Sit productus ex primo in secundum ad summam trium triplus; at productus ex secundo in tertium, sit summæ quadruplus. Denique productus ex tertio in primum, summæ omnium sit quincuplus. Quia igitur productus ex binorum mutua multiplicatione ad summam trium datam habet rationem. Quæro primùm tres numeros, & aliquem vt cumque adscitum, ad quem producti ex binorum mutuo ductu datas habeant rationes. Arbitrarius esto 5. Tunc quia productus ex primo in secundum triplus est arbitrarij numeri, nempe ipsius 5. vtique productus ex primo in secundum erit 15. esto secundus 1 N. ergo primus $\frac{15}{1N}$. Rursus quia productus ex secundo in tertium est quadruplus ipsius 5. vtique productus ex secundo in tertium erit 20. At secundus est 1 N. ergo tertius erit $\frac{20}{1N}$. Superest vt productus ex primo in tertium, nimirùm $\frac{300}{1Q}$. sit quincuplus ipsius 5. Proinde fiunt 300. æquales 25 Q. Hîc si species ad speciem rationem haberet quæ est quadrati ad quadratum, soluta esset quæstio. Enim vero 300. orti sunt ex 15. in 20. At 15. triplum est ipsius 5. & 20. est eiusdem 5. quadruplum. Volumus ergo vt triplo ipsius 5. per quadruplum eiusdem multiplicato, producti ad quincuplum eiusdem 5. ratio sit quæ quadrati ad quadratum. Atqui 5. arbitrarius est. Hoc igitur mihi negotij incumbit, vt quæram numerum, cuius triplus & quadruplus inter se multiplicati numerum producant qui ad quincuplum eiusdem, rationem habeat quam habet quadratus ad quadratum. Esto qui quæritur 1 N. & triplus eius ductus in quadruplum facit 12 Q. Oportet igitur hunc ad quintuplum eiusdem rationem habere quæ est quadrati ad quadratum. Volumus ergo 12 Q. ad 5 N. esse in ratione quadrati ad quadratum. Quamobrem altero in alterum ducto fiet quadratus. Proinde 60 C. æquantur quadrato, sit ille 900 Q. & fit 1 N. 15. Ad positiones, erit quæsitus 15. Pono ergo eum 15. Quare productus ex primo in secundum erit 45. Atqui secundus est 1 N. ergo primus erit $\frac{45}{1N}$. similiter inuenietur tertius $\frac{60}{1N}$. superest vt productus ex primo in tertium.

tium, hoc est $\frac{2700}{1 Q.}$ ipsius 15. quincuplus reperiatur. Igitur $\frac{2700}{1 Q.}$ æquatur 75. & fit 1 N. 6. Ad positiones. erit primus 7 $\frac{1}{5}$. secundus 6. tertius 10. Horum summa si foret 15. soluta planè esset quæstio. Statuo itaque summam trium 15 Q. Ipsos autem tres in numeris, quales eos inuenimus, primum scilicet 7 $\frac{1}{5}$ N. secundum 6 N. tertium 10 N. Superest igitur vt trium summa sit 15 Q. est autem 23 $\frac{1}{5}$ N. Quare 23 $\frac{1}{5}$ N. æquantur 15 Q. & fit 1 N. $\frac{47}{30}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{312}{30}$ $\frac{1}{5}$. secundus $\frac{282}{30}$. tertius $\frac{470}{30}$.

ς̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσαι ὁ πρῶτος μο ζ. α ε^χ. ὁ δὲ δεύτερος μο ς̄. ὁ δὲ τρίτος μο ῑ. καὶ εἰ ἦν ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν μο ιε. λελυμένον ἦν μοι τὸ ζητούμενον. τάσσω οὖν τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ιε. αὐτοὺς δὲ τοὺς τρεῖς ἐν ἀριθμῷ, ὡς εὕρομεν τὸν μὲν πρῶτον ςς ζ. α ε^χ. τὸν δὲ δεύτερον ςς ς̄. τὸν δὲ τρίτον ςς ῑ. καὶ λοιπὸν δεῖ τοὺς τρεῖς εἶναι δυ ιε. εἰσὶ δὲ οἱ τρεῖς ςς κγ. α ε^χ. ἀριθμοὶ ἄρα κγ. α ε^χ. ἴσοι δυ ιε. καὶ γίνεται ὁ ς μο μζ λ^χ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος τιβ λ^χ. α ε^χ. ὁ δὲ δεύτερος σπβ λ^χ. ὁ δὲ τρίτος υο λ^χ.

IN QVAESTIONEM XLIII.

HIc restituto textu, vt fecimus, omnia sunt perspicua, nec maiore explicatione indigent: nonnulla etiam omiserat Xilander, quorum defectu res obscurabatur, vt videre est si versio illius cum nostra conferatur.

QVÆSTIO XLIV.

INVENIRE tres numeros, vt compositus ex tribus multiplicatus in primum faciat triangulum; in secundum, faciat quadratum, in tertium faciat cubum. Statuatur summa trium 1 Q. Primus autem fractio quadratica vnitatum triangularium, puta $\frac{6}{1 Q.}$ secundus fractio quadratica vnitatum quadratarum, vt $\frac{4}{1 Q.}$ Tertius denique fractio quadratica vnitatum cubicarum, nimirum $\frac{8}{1 Q.}$ & quidem 1 Q. multiplicatus in primum facit 6. qui est triangulus, & 1 Q. multiplicatus in secundum facit 4. qui est quadratus, & rursus 1 Q. multiplicatus in tertium facit 8. qui est cubus. Superest vt trium summa sit 1 Q. sed trium summa est $\frac{18}{1 Q.}$ hoc ergo æquatur 1 Q. & omnia per 1 Q. multiplicentur, fit 1 QQ. æqualis 18. Oportet igitur 18. esse quadratoquadratum. Atqui 18. est compositus ex triangulo, quadrato, & cubo. Proinde reperiendus est quadratus, latus habens quadratum, & diuidendus in triangulum, quadratum, & cubum. Esto is 1 QQ. Quadratus autem 1. QQ. + 1 − 2 Q. si ergo de 1 QQ. abstulero 1 QQ. + 1 − 2 Q. relinquetur 2 Q. − 1. Hunc rursus oportet diuidere in cubum, & triangulum. Esto cubus 8. relinquitur ergo triangulus

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μὲν τὸν πρῶτον ποιῇ τρίγωνον, ἐπὶ δὲ τὸν δεύτερον ποιῇ τετράγωνον, ἐπὶ δὲ τὸν τρίτον ποιῇ κύβον. τετάχθω δὴ οἱ τρεῖς δυνάμεως ᾱ. ὁ δὲ πρῶτος δυναμοστὸν μονάδων τριγωνικῶν, ἔστω ς̄ δυ^χ. ὁ δὲ δεύτερος δυναμοστὸν μονάδων τετραγωνικῶν ἔστω δ̄ δυ^χ. ὁ δὲ τρίτος δυναμοστὸν μονάδων κυβικῶν. ἔστω η̄ δυ^χ. καὶ ἡ δύναμις μία πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ μὲν τὸν πρῶτον ποιεῖ μο ς̄. ὅς ἐστι τρίγωνος, ἐπὶ δὲ τὸν δεύτερον ποιεῖ μο δ̄. ὅς ἐστι τετράγωνος, ἐπὶ δὲ τὸν τρίτον ποιεῖ μο η̄. ὅς ἐστι κύβος. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς εἶναι δυ ᾱ. ἀλλ᾽ οἱ τρεῖς εἰσὶ ιη δυ^χ. ἴσοι δυ ᾱ. καὶ πάντα ἐπὶ δύναμιν μίαν, γίνεται δυδυ ᾱ. ἴση μο ιη. δεῖ οὖν τὸν ιη. εἶναι δυναμοδύναμιν, ἀλλ᾽ ὁ ιη. σύνθετός ἐστι τριγώνου, καὶ τετραγώνου, καὶ κύβου. ἀπῆκται οὖν μοι εὑρεῖν τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον, καὶ αὐτὸν διελεῖν εἰς τρίγωνον, καὶ τετράγωνον, καὶ κύβον. ἔστω δυ δυ ᾱ μο ᾱ λείψει δυ β̄. ἐὰν ἄρα ἀπὸ δυ δυ μιᾶς ἄρω δυ δυ ᾱ. μο ᾱ. λείψει δυ β̄. λοιπὸς καταλείπεται δυ β̄ λείψει μο ᾱ. πάλιν ταῦτα δεῖ διαιρεθῆναι εἰς τε κύβον, καὶ τρίγωνον, καὶ ἔστω ὁ κύβος μο η̄. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίγωνος δυ β̄ λείψει μο θ̄. πᾶς δὲ τρίγωνος ὀκτάκις γενόμενος, καὶ προσλαβὼν μονάδα τε-

τράγωνος γίνεται. δυνάμεις ἄρα ιϛ. λείψει μο οα. ἴσαι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς δ. λείψει μο α. γίνεται ὁ ς μο θ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν τρίγωνος μο ρνγ. ὁ δὲ τετράγωνος ͵ϛυ. ὁ δὲ κύβος μο η. ἔρχομαι εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὸν ἐκ τῶν τριῶν συγκείμενον τετράγωνον δυ α. τὸν δὲ πρῶτον ρνγ δυ. ων. ἐπειδὴ τρίγωνον γίνεσθαι. τὸν δὲ δεύτερον ͵ϛυ δυ. ων. ἐπειδὴ τετράγωνον γίνεσθαι. τὸν δὲ τρίτον η δυ. ων. ἐπειδὴ κύβον γίνεσθαι. καὶ ἡ δύναμις α. τετράγωνος οὖσα, ἐφ' ὃν ἂν πολλαπλασιασθῇ ποιεῖ, ὃν μὲν τρίγωνον, ὃν δὲ τετράγωνον, ὃν δὲ κύβον. δεῖ δὴ τοὺς τρεῖς εἶναι δυ α. εἰσὶ δὲ ͵ϛφξα δυ. ων. ἴσον δυ α. καὶ πάντα ἐπὶ δύναμιν. γίνεται δυδυ α. ἴση μο ͵ϛφξα. καὶ γίνεται ὁ ς μο θ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρνγ πα. ὁ δὲ δεύτερος ͵ϛυ πα. ὁ δὲ τρίτος η πα. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

2 Q. – 9. Porrò quiuis triangulus per 8. multiplicatus, & adsumens vnitatem, facit quadratum. Proinde 16 Q. – 71. æquantur quadrato. Formo quadratum à 4 N. – 1. fit 1 N. 9. Ad positiones. Erit triangulus 153. quadratus 6400. cubus 8. Venio ad id quod initio propositum fuit & statuo compositum ex tribus quadratum 1 Q. Primum autem $\frac{153}{1 Q.}$ vt fiat triangulus. Secundum $\frac{6400}{1 Q.}$ vt fiat quadratus. Tertium denique $\frac{8}{1 Q.}$ vt fiat cubus. & 1 Q. cùm sit quadratus ductus in vnumquemque, facit primum triangulum, secundum quadratum, tertium cubum. Oportet autem tres simul esse 1 Q. sunt autem $\frac{6561}{1 Q.}$ hoc ergo æquatur 1 Q. & omnia in 1 Q. ducantur, fit 1 QQ. æqualis 6561. & fit 1 N. 9. Ad positiones. erit primus $\frac{153}{81}$. secundus $\frac{6400}{81}$. tertius $\frac{8}{81}$. & demonstratio manifesta.

IN QVAESTIONEM XLIV.

HIC tota obscuritas nascitur ex fractionibus quadraticis, quæ vt iam sæpe monuimus semper ambiguè exprimuntur apud Diophantum. Deerant & nonnulla verba quæ reposuimus, ea more nostro virgulis includentes. Numerus triangulus dicitur summa progressionis arithmeticæ ab vnitate incipientis, & per vnitatem progredientis, cuius vltimus terminus, qui & idem est cum numero qui exprimit multitudinem terminorum dicitur latus trianguli vt quinque terminorum 1. 2. 3. 4. 5. summa 15. est triangulus cuius latus 5. & sex terminorum 1. 2. 3. 4. 5. 6. summa 21. est triangulus cuius latus 6. Quod fusius explicat Diophantus libro de numeris multangulis. Nos quoque in appendice ad eundem librum vniuersalissimè demonstrabimus Theorema quod de Numeris triangulis profert Diophantus. nimirum, Omnis triangulus per octo multiplicatus & adsciscens vnitatem quadratum facit. Interim tamen peculiari demonstratione libet id ostendere, supponendo modum illum communem inueniendi summam cuiuscunque progressionis arithmeticæ, ducendo scilicet summam extremorum in semissem numeri terminorum, quem etiam demonstrat Diophantus loco citato. Vnde infertur in progressione cuius summa est numerus triangulus, vbi primus terminus est 1. maximus verò æquatur numero terminorum, seu lateri trianguli, ipsum triangulum haberi si latus ipsius vnitate auctum ducatur in semissem eiusdem lateris. His positis, sic pronuncio.

Omnis numerus triangulus per octo multiplicatus, & adsciscens vnitatem, quadratum facit, cuius latus est duplum lateris ipsius trianguli vnitate auctum.

A 21.
B . . . C . . . D. E
F 168. G. 169.
H .... K. L

Sit numerus triangulus A cuius latus B D. cuius semissis B C. & sit vnitas D E. & octuplum ipsius A esto F cui addita vnitate fiat G. sumaturque H K duplum ipsius B D. cui addatur vnitas K L. dico G esse quadratum à latere H L. etenim ex suprà dictis constat triangulum A æquari producto ex B C. in totum B F. sed hic productus [1] æquatur productis ex B C in B C. & in C D. & in D E. hoc est duplo quadrati ipsius B C & ipsi B C. semel. Quare octuplum ipsius A puta F. æquatur sedecuplo quadrati ipsius B C. & octuplo ipsius B C. Ergo G continet sedecuplũ quadrati ipsius B C. octuplum ipsius B C & præterea vnitatẽ. Porro cùm B D sit duplus ad B C. & rursus H K sit duplus ad B D. patet H K esse quadruplum ipsius B C. ac proinde quadratus ipsius H K æquatur sedecuplo quadrati ipsius B C. & duplum ipsius H K æquatur octuplo eiusdem B C. Igitur G æquatur quadrato ipsius H K. & duplo ipsius H K. & vnitati. Sed & quadratus ipsius H L [4] æquatur quadrato H K. & quadrato K L. hoc est vnitati, & duplo producti ex H K. in vnitatem K L. hoc est duplo ipsius H K. Ergo G æqualis est quadrato ipsius H L. Quod erat demonstrandum. Nec refert vtrum B D. secari possit bifariam indiuisa vnitate, necne, cùm hæc demonstratio nitatur solùm propositionibus libri secundi Euclidis, quæ abstrahunt ab integris & à fractis, vt manifestum est. Porro hinc euidenter colligitur omnem quadratum imparem vnitate multatum, esse multiplicem octonarij, nam metitur eum octonarius

1. secundi.
4. secundi.

per numerum triangulum, cuius latus æquatur semissi lateris quadrati vnitate multati.

Diligenter autem attendenda est operatio Diophanti, qui positiones suas appositissimè instituit vt solutio contingat rationalis. Etenim cùm quærendus sit quadratoquadratus constans ex triangulo, quadrato, & cubo, ponit eum 1 Q Q. Tum argutè quadratum statuit 1 Q Q. + 1. − 2 Q. à latere 1 Q. − 1. quo ablato ab 1 Q Q. superest 2 Q. − 1. qui ex cubo & ex triangulo componi debet. Hinc ergò si auferatur cubus quilibet, puta 8. restat 2 Q. − 9. æquandus triangulo. Quamobrem oportet vt ductus in 8. & adsciscens vnitatem, faciat quadratum per theorema suprà demonstratum. Vnde fit 16 Q. − 71. æquandus quadrato. Hoc autem fieri minimè posset, nisi 16. quadratorum numerus, esset quadratus. Itaque.

Aduerte primò in quadrato detrahendo ab 1 Q Q. talem reperiri debere quadratorum numerum, vt is ad 8. habeat rationem quadrati ad quadratum, quales sunt 1. 8. 32. &c. sic poni poterat quadratus ille 1 Q Q. + 19 − 8 Q. à latere 1 Q. 4. vel etiam 1 Q Q. + 256 − 32 Q. à latere 1 Q. − 16. & sic de aliis. Verbi gratia si ponatur quadratus 1 Q Q. + 16 − 8 Q. eo detracto ab 1 Q Q. restabit 8 Q. − 16. vnde si auferas cubum aliquem, puta 8. remanebit 8 Q. − 24. æquandus triangulo, ac proinde ducto eo in 8. & producto addendo vnitatem, fiet 64 Q. − 191. æquandus quadrato, cuius latus si fingas 8 N. − 1. fiet 1 N. 12. cuius quadratoquadratus optimè satisfacit proposito.

Aduerte secundò, alium etiam quemlibet cubum quàm 8. sumi posse, vt in hypothesi Diophanti si sumatur cubus 27. fiet 2 Q. − 28. æquandus triangulo, quem si ducas in 8. & producto addas 1. fiet 16. Q. − 223. æquandus quadrato, cuius latus si ponas 4 N. − 1. fiet 1 N. 28. cuius quadratoquadratus rursus implet postulata.

Aduerte postremò in fingendo latere vltimi quadrati, talem adhibendam esse cautionem, vt valor Numeri reperiatur in integris numeris, cùm numerus triangulus non possit esse nisi integer. Id autem semper succedet operando modo à Diophanto tradito, si quadrati latus fingatur à tot numeris qui sint latus quadratorum in numero quadrato æquando contentorum − 1. Cæterùm vix aliter id fieri posse, satis experiendo deprehendes. Ex operatione autem Diophanti facilè est elicere Canonem ad inueniendum quadrato quadratum qui constet ex triangulo, quadrato, & cubo nimirum.

OBSERVATIO D. P. F.

EXperientiam non satis exactam fecit Bachetus. Sumatur quilibet cubus v.g. cuius latus multiplici ternarii superaddat vnitatē Erunt v.g. 2 Q − 344 æquando triangulo ergo 16. Q. − 2751 æquabuntur quadrato cuius latus finges si libet, 4 N − 3. &c. Nihil enim vetat quo minus generali methodo loco etiam ipsius 3. reliquos in infinitum impares vsurpemus, variando cubos.

Sume cubum quemlibet, & huic adde vnitatem, fiet latus quæsiti quadratoquadrati.

Quod si velis reperire quadratum, & cubum, & triangulum, ex quibus inuentus quadratoquadratus componitur. Adde 1. quadratoquadrato inuento, & hinc aufer duplum quadrati ab eodem latere profecti, relinquetur quadratus quæsitus. Cubus verò is est quem ab initio sumpsisti. Triangulus verò reperietur si ab inuento quadratoquadrato auferas compositum ex quadrato & cubo iam inuentis. Verbi gratia, sume cubum 1. cui adde 1. fiet 2. latus quæsiti quadratoquadratis. Is ergo est 16. quem dico componi ex quadrato, cubo, & triangulo. Nam adde 1. ad 16. fit 17. vnde aufer duplum quadrati à latere 2. puta 8. remanet quæsitus quadratus 9. cubus verò est is quem sumpsisti ab initio, nempe 1. Quare à quadratoquadrato 16. auferendo 9. & 1. simul, remanet triangulus 6. sed & quadratum sic aliter inuenies, aufer 1. à quadrato ab eodem latere profecto, à quo proficiscitur quadratoquadratus inuentus, residuum erit latus quæsiti quadrati, vt in eodem exemplo, cùm quadratus lateris 2. fit 4. aufer hinc 1. remanet 3. latus quæsiti quadrati 9.

Rursus aliter inuenietur triangulus hac arte. Cape duplum cubi ab initio sumpti, & huic adde vnitatem, fiet latus quæsiti trianguli. Vt in eodem exemplo, duplo cubi 1. adde 1. fiet 3. latus trianguli 6.

Hoc verò lemmate soluto, soluetur & proposita quæstio huiusmodi Canone.

Sume quadratoquadratum ex triangulo, quadrato, & cubo compositum. Tum diuide sigillatim triangulum, quadratum & cubum, per quadratum à latere quadratoquadrati sumpti, orientur quæsiti numeri.

Vt in nostra hypothesi, diuide sigillatim 6. 9. 1. per 4. fient quæsiti numeri $\frac{6}{4}$. $\frac{9}{4}$. $\frac{1}{4}$. nam eorum summa est 4. qua ducta in primum fit triangulus 6. & eadem ducta in secundum 1. fit quadratus 9 & eadem ducta in tertium, fit cubus 1.

Dignum quoque animaduerſione eſt, ex vi analyſeos Diophantææ ſequi, ſummam quæſitorum numerorum eſſe quadratum numerum, quoniam ponitur huiuſmodi ſumma 1 Q. ſic vides in illius hypotheſi, ſummam numerorum eſſe 81. At in noſtra 4. & ſic de alijs.

Sed & operæ pretium fuerit adnotaſſe, quæſtionem hanc eodem prorſus artificio extendi poſſe ad quoſlibet polygonos & quaſlibet poteſtates, dummodo iis adnumerentur quadratus & triangulus. verbi gratia.

Inueniantur quinque numeri, vt ſumma ipſorum ducta in primum, fiat triangulus, in ſecundum quadratus, in tertium cubus, in quartum Pentagonus, in quintum quadrato quadratus.

Hîc euidens eſt reperiendum eſſe quadratoquadratum compoſitum ex triangulo, quadrato, cubo, pentagono, & quadratoquadrato. Is eſto 1 Q Q. quadratus autem 1 Q Q. + 1 − 2 Q. quo detracto ab 1 Q Q. remanet 2 Q. − 1. diuidendus in cubum, pentagonum, quadratoquadratum, & triangulum. Eſto cubus 8. pentagonum 5. Quadratoquadratus 1. relinquitur ergo triangulus 2 Q. − 15. qui ductus in 8. & adſumens 1. facit 16 Q. − 119. æquandandum quadrato. Eſto latus eius 4 N. − 1. fiet 1 N. 15. Eſt ergo triangulus 435. quadratus 50176. cubus 8. Pentagonus 5. Quadratoquadratus 1. Veniamus iam ad propoſitam quæſtionem, & ſtatuantur ſumma quæſitorum numerorum 1 Q. primus verò $\frac{435}{1 Q}$. ſecundus $\frac{50176}{1 Q}$. tertius $\frac{8}{1 Q}$. quartus $\frac{5}{1 Q}$ quintus $\frac{1}{1 Q}$. Erit illorum ſumma $\frac{50625}{1 Q}$. æqualis 1 Q. vnde fit 1 N. 15. Igitur primus eſt $\frac{435}{225}$. ſecundus $\frac{50176}{225}$. tertius $\frac{8}{225}$ quartus $\frac{5}{225}$. quintus $\frac{1}{225}$.

QVÆSTIO XLV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλάσσονος λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἔτι δὲ καὶ σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου εἶναι τριπλασίονα. ἐπεὶ δὲ συναμφότερος ὁ μέσος, καὶ ὁ ἐλάσσων ποιεῖ τετράγωνον. ποιείτω μο δ. ὁ ἄρα μέσος μείζων ἐστὶ δυάδος. ἔστω ἀριθμοῦ α. μο β. ὁ ἄρα ἐλάχιστος ἔσται μο β. ↑ ς α. καὶ ἐπειδὴ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τριπλασίων ἐστί. καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου ςςοὶ β. ἡ ἄρα ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου ἔσται ςς ϛ. καὶ ὁ μείζων ἄρα ἔσται ςς ζ. μο β. λοιπόν ἐστι δύο ἐπιτάγματα, τόντε συναμφότερον τὸν μείζονα. καὶ τὸν μέσον ποιεῖν τετράγωνον τόντε τὸν μείζονα, καὶ τὸν ἐλάχιστον ποιεῖν τετράγωνον, καὶ γίνεταί μοι διπλῆ ἡ ἰσότης ςςοὶ η μο δ. ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ ςςοὶ ϛ. μο δ. ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ διὰ τὸ τὰς μονάδας εἶναι τετραγωνικὰς, εὐχερής ἐστιν ἡ ἴσωσις. πλάσσω ἀριθμοὺς δύο, ἵνα τὸ ὑπὸ αὐτῶν ᾖ ςςοὶ β. καθὼς ἴσμεν διπλῆν ἰσότητα. ἔστωσαν ς τὸ ἥμισυ, καὶ μο δ. καὶ γίνεται ὁ ς μο ριβ. ἐλθὼν ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, οὐ δύναμαι ἀφελεῖν ἀπὸ μο β. τὸν ς α. τουτέστι τὰς μο ριβ. θέλω οὖν τὸν ς εὑρεθῆναι ἐλάττονα μο β. ὥστε καὶ ςςοὶ ϛ μο δ. ἐλάσσονες ἔσονται μο ιϛ. ἐὰν γὰρ ἡ δυὰς ἐπὶ ςςοὺς ϛ. γίνηται καὶ προσλάβῃ μο δ.

INVENIRE tres numeros, vt interuallum maioris & medij, ad interuallum medij & minoris datam habeat rationem; ſed & bini ſumpti quadratum conſtituant. Imperetur vt interuallum maioris & medij, interualli medij & minimi ſit triplum. Iam cùm ſumma medij & minimi ſit quadratus, eſto 4. ergo medius maior eſt binario. eſto 1 N. + 2. Igitur minimus erit 2 − 1 N. & quoniam interuallum maximi & medij, eſt triplum interualli medij & minimi interuallum autem medij & minimi eſt 2 N. erit interuallum maximi & medij 6 N. Quamobrem maximus erit 7 N. + 2. Superſunt duo poſtulata, nimirum vt maximus cum medio faciat quadratum, & vt maximus cum minimo faciat quadratum, & occurrit duplicata æqualitas, nempè 8 N. + 4. æquales quadrato, & 6 N. + 4. æquales quadrato, & quia vnitates ſunt quadratæ, expedita eſt æquationis ratio. Statuo duos numeros quorum mutuo ductu fiant 2 N. ſicut nouimus in duplicata æqualitate faciendum. ſunto $\frac{1}{2}$ N. & 4. fit 1 N. 112. At vbi me ad poſitiones confero, non poſſum de 2. auferre 1 N. nimirum 112. Volo igitur numerum inueniri minorem quàm 2. atque ſic etiam 6 N. + 4. minores erunt quàm 16. nam binario in 6 N. multiplicato, & additis 4. fiunt 16. Quandoquidem ergo quæro 8 N. + 4. æquari quadrato,

& 6 N. + 4. æquari quadrato, ſed & à binario fit quadratus 4. ſunt tres quadrati 8 N. + 4. & 6 N. + 4. & 4. & interuallum maximi & medij eſt triens interualli medij & minimi: eò res rediit vt inueniantur tres quadrati, vt interuallum maximi & medij, ſit triens interualli medij & minimi, ſed & minimus ſit 4. Medius autem minor quàm 16. Ponatur minimus 4. At medij latus 1 N. + 2. Ipſe igitur erit 1 Q. + 4 N. + 4. Quia ergo interuallum maximi & medij, eſt triens interualli medij & minimi, at interuallum medij & minimi eſt 1 Q. + 4 N. vtique maximi & medij interuallum erit $\frac{1}{3}$ Q. + 1 $\frac{1}{3}$ N. At eſt medius 1 Q. + 4 N. + 4. Igitur maximus erit 1 $\frac{1}{3}$ Q. + 5 $\frac{1}{3}$ N. + 4. æqualis quadrato. Omnia nouies. Ergo 12 Q. + 48 N. + 36. æquatur quadrato, & huius quadrans, nempè 3 Q. + 12 N. + 9. æquatur quadrato. Atqui oportet & medium minorem eſſe quàm 16. Quare & latus minus eſſe oportet quàm 4. latus autem medij eſt 1 N. + 2. Proinde 1 N. + 2. minus ſunt quàm 4. & ſublato vtrimque binario. 1 N. minor eſt quàm 2. volens itaque 3 Q. + 12 N. + 9. æquare quadrato, formo quadratum à 3. cum defectu aliquot numerorum, & fit 1 N. ex aliquo numero ſexies ſumpto, & adſciſcente 12. nimirum 12 N. æquationis, & diuiſo per interuallum quo numeri quadratus ſuperat quadratos qui ſunt in æquatione, nempè 3. Eò itaque deducta res eſt, vt inueniatur numerus qui ſexies ſumptus, & adſciſcens 12. diuiſuſque per interuallum quo ipſius quadratus excedit ternarium, quotientem binario minorem exhibeat. Eſto quæſitus 1 N. Hic ſexies ſumptus & adſciſcens 12. facit 6 N. + 12. Quadratus autem illius detracto ternario facit 1 Q. − 3. Volo ergo 6 N. + 12. diuidi per 1 Q. − 3. & facere quotientem minorem quam 2. Atqui 2. diuiſus per vnitatem, facit quotientem 2. Proinde 6 N. + 12. ad 1 Q. − 3. minorem habet rationem quàm 2. ad 1. Quare & planus plano inæqualis eſt. Igitur productus ex 6 N. + 12. in 1. minor eſt producto ex 2. in 1 Q. − 3. hoc eſt 6 N. + 12. minus ſunt quàm 2 Q. − 6. Adiiciantur

ποιεῖν μο ιϛ. ἐπεὶ οὖν ζητῶ ςςοὺς η. μο δ. ἴσους τετραγώνῳ, καὶ ςςοὺς ϛ. μο δ. ἴσους τετραγώνῳ. ἀλλ' καὶ ὁ ἀπὸ τῆς δυάδος τουτέστι μο δ. τετράγωνός ἐστι. γεγόνασι τρεῖς τετράγωνοι ςς η. μο δ. καὶ ςς ϛ. μο δ. καὶ μο δ. καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τρίτον μέρος ἐστίν. ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τρίτον μέρος ᾖ, ἔτι δὲ ὁ μὲν ἐλάχιστος ᾖ μο. δ. ὁ δὲ μέσος ἐλάσσων μο ιϛ. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάχιστος μο δ. ἡ δὲ τοῦ μέσου πλευρὰ ςοῦ α. μο β. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δυ α. ςς δ. μο δ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τρίτον μέρος ἐστι, καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου δυ α. ςς δ. ὥστε ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου, καὶ τοῦ μέσου ἔσται δυ α γ˜. ς α. α γ˜. καὶ ἔστιν ὁ μέσος δυ ςς δ. μο δ. ὁ ἄρα μέγιστος ἔσται δυ α. α γ˜. ςς ε. α γ˜ μο δ. ἴσοι τετραγώνῳ. πάντα ἐννεάκις δυνάμεις ἄρα ιβ. ςςοὶ μη. μο λϛ. ἴσαι τετραγώνῳ, καὶ τὸ τέταρτον αὐτῶν δυ γ. ςςοὶ ιβ. μο θ. ἴσον τετραγώνῳ, δεῖ δὲ καὶ τὸν μέσον ἐλάσσονα εἶναι μο ιϛ καὶ τὴν πλευρὰν δηλαδὴ ἐλάσσονα εἶναι μο δ. ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ μέσου ἐστὶν ς α. μο β. ἀριθμὸς ἄρα εἷς μο β. ἐλάττονές εἰσι μο δ. καὶ κοινῶν ἀφαιρεθεισῶν τῶν β μο. ὁ ς ἔσται ἐλάσσων μο β. γέγονε οὖν μοι δυ γ. ςςοὺς ιβ. μο θ. ἴσας ποιῆσαι τετραγώνῳ. πλάσσω τετράγωνόν τινα ἀπὸ μο γ. λειπόντων ςςῶν τινων, καὶ γίνεται ὁ ς ἔκ τινος ἀριθμοῦ ἑξάκις γενομένου, καὶ προσλαβόντος τὸν ιβ. τουτέστι τῆς ἰσώσεως τοὺς ςςοὺς ιβ. καὶ μερισθέντος εἰς τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ ς τετράγωνος τῶν δυνάμεων τῶν ἐν τῇ ἰσώσει τριάδι. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν τινα ς. ὃς ἑξάκις γενόμενος, καὶ προσλαβὼν μο ιβ. μεριζόμενος εἰς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τετράγωνος, τριάδος, ποιεῖ τὴν παραβολὴν ἐλάσσονα μο β. ἔστω ὁ ζητούμενος ς α. οὗτος ἑξάκις γενόμενος, καὶ προσλαβὼν μο ιβ. ποιεῖ ςςοὺς ϛ. μο ιβ. ὁ δὲ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος λείψας μο γ. ποιεῖ δυ α. ⋔ μο γ. θέλω οὖν ςςοὺς ϛ. μο ιβ. μερίζεσθαι εἰς δυ α ⋔ μο γ. καὶ ποιεῖν τὴν παραβολὴν ἐλάσσονα μο β. καὶ ὁ β μεριζόμενος εἰς μονάδα μίαν ποιεῖ τὴν παραβολήν, δυάδα, ὥστε ςςοὶ ϛ μο ιβ πρὸς δύναμιν α

↑ μο γ. ἐλάσσονα λόγον ἔχουσιν, ἤπερ δύο πρὸς ἕνα. καὶ χωρίῳ χωρίον ἄνισον. ὁ ἄρα ὑπὸ ςς̅ ϛ μο ιβ. καὶ μονάδος μιᾶς, ἐλάσσων ἐστὶ, τοῦ ὑπὸ δυάδος καὶ δυνάμεως α ↑ μο γ. τουτέστι ςςοὶ ϛ μο ιβ. ἐλάσσονές εἰσι δυ β ↑ μο ϛ. καὶ κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ μονάδες, μείζονες ςςοὶ θ μο ιη. αἱ δυνάμεις β. ὅταν δὲ τοιαύτην ἴπωσιν ἰσώσωμεν, ποιοῦμεν τῶν ςς̅ τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ, γίνεται θ. καὶ τὰς δυ β. ἐπὶ τὰς μο ιη. γίνονται λϛ. πρόσθες τοῖς θ. γίνονται με. ὧν πλευρὰ οὐκ ἐλάττων ἐστὶ μο ζ. πρόσθες τὸ ἡμίσευμα τῶν ςς̅ καὶ μέρισον εἰς δυνάμεις, γίνεται ὁ ς οὐκ ἐλάττων μο ε. γέγονεν οὖν μοι δυνάμεις γ. ςςοὶ ιβ. μο θ. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μο γ. λείψει ἀριθμῶν ε καὶ γίνεται ὁ ς μο ιβ κβ. τουτέστι κα ια. τέθεικα δὲ τὴν τοῦ μέσου τετραγώνου πλευρὰν ς α. μο β. ἔσται ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ μο μγ ια. αὐτὸς δὲ ὁ τετράγωνος μο ͵αωμθ ρκα. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω μονάδας ͵αωμθ ρκα. ὄντα τετράγωνον ἴσον τοῖς ςςοῖς ϛ. μο δ. καὶ πάντα εἰς ρκα. καὶ γίνεται ὁ ς ͵ατξε ψκϛ. καὶ ἔστιν ἐλάσσων δυάδος. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις τοῦ προβλήματος τοῦ ἐξ ἀρχῆς. ὑπεστήσαμεν δὲ τὸν μὲν μέσον ς α. μο β. τὸν δὲ ἐλάχιστον μο β ↑ ς α. τὸν δὲ μέγιστον ςς̅ ζ. μο β. ἔσται ὁ μὲν μέγιστος α. ͵αζ ψκϛ. ὁ δὲ δεύτερος ͵βωιζ ψκϛ. ὁ δὲ ἐλάχιστος ὁ τρίτος πζ ψκϛ. καὶ ἐπεὶ τὸ μόριον τὸ ψκϛ. οὐκ ἔστι τετράγωνος, ἕκτον δὲ ἐστιν αὐτοῦ, ἐὰν λάβωμεν ρκα. ὅ ἐστι τετράγωνος. πάντων οὖν τὸ ἕκτον. καὶ ὁ μὲν πρῶτος ͵αωλδ ρκα α ϛ. ὁ δὲ δεύτερος υξθ ρκα α ϛ. ὁ δὲ τρίτος ιδ ρκα α ϛ. καὶ ἐὰν ἐν ὁλοκλήροις θέλῃς, ἵνα μὴ τὸ ἥμισυ ἐπιτρέχῃ, εἰς τέσσαρα ἔμβαλε. καὶ ἔσται ὁ πρῶτος ͵ζτλη υπδ. ὁ δὲ δεύτερος ͵αωοη υπδ. ὁ δὲ τρίτος νη υπδ. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

quæ desunt vtrimque vnitates, erunt 2 Q. maiores quam 6 N. + 18. In æquatione autem hac explicanda, dimidium numerorum in se ducimus, & fit 9. ducimus etiam quadratos in vnitates, & fiunt 36. & addito 9. fiunt 45. cuius latus non minus est 7. Adde semissem numerorum, & diuide per quadratos, fit 1 N. minor 5. Oportet igitur 3 + 12. N. + 9. æquare quadrato a latere 3 − 5 N. & fit 1 N. $\frac{42}{22}$. hoc est $\frac{21}{11}$. Posueram autem medij quadrati latus 1 N. + 2. erit ergo huiusmodi latus. $\frac{43}{11}$ ipse verò quadratus $\frac{1849}{121}$. venio igitur ad primò propositum, & statuo $\frac{1849}{121}$ qui est quadratus, æqualem 6 N. + 4. & omnia ducendo in 121. fit 1 N. $\frac{1365}{726}$. minor vtique binario. Ad positiones quæstionis initio propositæ. Statueramus medium 1 N. + 2. minimum 2 − 1 N. Maximum verò 7 N. + 2. erit ergo maximus $\frac{11007}{726}$. secundus $\frac{2817}{726}$. minimus seu tertius $\frac{87}{726}$. & quia denominator 726. non est quadratus sed eius sextans 121. est quadratus, omnium sextantes accipiamus, & erit similiter primus $\frac{1834\frac{1}{2}}{121}$. secundus $\frac{469\frac{1}{2}}{121}$. tertius $\frac{14\frac{1}{2}}{121}$. Quod si in integris hæc desideras, ne semissis intercurrat, omnia quadruplica, & erit primus $\frac{7338}{484}$. secundus $\frac{1878}{484}$. tertius $\frac{58}{484}$. & demonstratio manifesta.

IN QVAESTIONEM XLV.

PRÆCLARVM est hoc problema, & admirandæ subtilitatis, in quo etiam continetur nouus modus vtendi duplicata æqualitate omnium quos hactenus explicauimus, elegantissimus. Cùm ergo tres operationes instituat Diophantus, age singulas persequamur, vt multa dilucidentur, in quibus omnino cæcutiit Xilander.

In prima itaque operatione. Aduerte primò pro quadrato quem conficiunt medius & minimus sumi potuisse quemlibet vnitatum numerum quadratum. Author sumpsit 4. minimum scilicet more suo.

Aduerte secundo cur inferat medium maiorem esse debere binario, causam esse quia medius debet esse maior minimo. Quare posita summa medij & minimi 4. oportet medium excedere semissem ipsius 4.

Aduerte tertiò cùm æquandi sint quadrato 8 N. + 4. & 6 N. + 4. Diophantum indicare primùm, modum illum resoluendi duplicatam æqualitatem, quo sæpè in simili vsus est libro tertio. Quia enim vnitatum numerus vtrobique quadratus est, procedit æquatio, si sumantur duo numeri quorum mutuo ductu fiat interuallum 2 N. ita tamen vt in semisse summæ illorum contineatur 2. latus quadrati 4. tales sunt $\frac{1}{2}$ N. & 4. Quare si horum summæ semissis quadratus æquetur ipsi 8 N. + 4. vel si eorundem interualli semissis quadratus æquetur ipsi 6 N. + 4. fiet vtrobique 1 N. 112. Hinc autem hoc incommodi accidit, vt per hunc Numeri valorem resolui non possint hypostases.

Etenim cùm minimus positus sit 2 − 1 N. euidens est valorem Numeri debere esse minorem quàm 2. Proinde cùm hoc modo resoluendo duplicatam æqualitatem vnica solutio reperiri possit, qua fit 1 N. 1½. patet eum hoc loco inutilem esse. Igitur.

Aduerte quartò aliud hîc genus duplicatæ æqualitatis tradi à Diophanto, quo in data hypothesi, & alijs omnibus similibus infinitæ reperiri possunt solutiones, hac arte. Consideratis tribus numeris 8 N. + 4. 6 N. + 4. 4. Quorum minimus 4 est vnitatum numerus quadratus. At interuallum maiorum 2 N. est triens interualli minorum 6 N. Quærendi sunt duo quadrati, quorum interuallum sit triens interualli quo minor illorum superabit 4. quales sunt 64. & 49. Tunc verò siue æques 64. & 8 N. + 4. siue 49. & 6 N. + 4. fiet vtrobique idem valor numeri 7½. Hoc autem ita necessario inuenire, ac proinde modum istum resoluendi duplicatam æqualitatem esse legitimum, sic demonstrabitur. Sint tres numeri A. B C. & interuallum maiorum A B. esto D. interuallum minorum B C. esto E. Rursus sint tres F G H. & maiorum F G. interuallum esto K. minorum L. Ponaturque H æqualis ipsi C. & sic eadem ratio D ad E. quæ K ad L. dico si G fiat æqualis ipsi B. & ipsum F fore æqualem ipsi A. in quo consistit vis omnis duplicatæ æqualitatis. Etenim quia B G ponuntur æquales, si ab his demantur æquales C H. erunt & residui E L. æquales. Cùm ergo sit D ad E. vt K ad L. erunt & ipsi D K æquales. Quamobrem additis æqualibus D. K ad æquales B G. fient & toti A F æquales. Quod demonstrandum erat. Itaque vt reperiat quadratos quales sunt F. G. quorum scilicet interuallum sit triens interualli quo minor G. superat 4. secundam instituit operationem Diophantus.

D − E −
A − B − C −
F 64. G 49. H 4.
K 15. L 45.

In secunda operatione. Aduertè primò minoris quæsitorum quadratorum latus ritè poni 1 N. + latere quadrati 4. puta 1 N. + 2. vt in eius quadrato 1 Q. + 4 N. + 4. vnitatum numerus æquetur ipsi 4. ac proinde excessus quadrati illius supra 4. nimirum 1 Q. + 4 N. constet ex solis quadratis & numeris, quorum triens cùm sit ⅓ Q. + 1⅓ N. constans etiam ex solis quadratis & numeris, eo addito ad minorem quadratum, fit maior quadratus 1⅓ Q. + 5⅓ N. + 4. vbi vnitatum numerus reperitur idem quadratus 4. quod accidit quia is reperiebatur in minore quadrato, & vt dictum est, maior quadratus fit addendo minori solos quadratos & numeros, vnde vnitates manent immutatæ. Necesse autem fuit vnitatum numerum quæ sunt in maiori quadrato, quadratum fuisse, ad hoc vt latus eius fingi potuerit.

Aduerte secundò numerum quadrato æquandum, puta in ⅓ Q. + 5⅓ N. + 4. duci in 9. ad tollendas fractiones, tum productum diuidi per 4. vt æquatio reducatur ad minimos numeros, vnde fit 3 Q. + 12 N. + 9. æquandus quadrato. Nam vt alias sæpè monuimus tam quadrato in quadratum ducto, quàm per quadratum diuiso, producitur quadratus.

Aduerte tertiò numerum 3 Q. + 12 N. + 9. æquandum esse quadrato cum quadam Numeri determinatione. Etenim vt suprà ostensum est, 6 N. + 4. ita æquandus est quadrato, vt fiat 1 N. minor quàm 2. At si 1 N. sit minor quàm 2. erunt 6 N. minores quàm 12. Quare adiecto 4. erit 6 N. + 4. minor quàm 16. ac proinde latus quadrati cui æquandus est 6 N. + 4. debet esse minus quàm 4. Positum autem est latus illud 1 N. + 2. Igitur 1 N. + 2. minus est quàm 4. & auferendo vtrimque 2. manet 1 N. minor quàm 2. Rectè igitur concludit Diophantus numeri 3 Q. + 12 N. + 9. latus ita fingendum esse, vt fiat 1 N. minor quàm 2. Porro necesse est hoc latus fingi 3 − certo numero Numerorum, vnde patet fieri valorem Numeri, si per quadratum numeri Numerorum in latere positorum ternario multatum, diuidatur sextuplum eiusdem numeri Numerorum, auctum numero 12. Itaque benè infertur quærendum esse numerum cuius sextuplum auctum numero 12. & diuisum per quadratum quæsiti numeri, ternario multatum, det quotientem minorem quàm 2. Ad hunc ergo numerum inueniendum tertiam molitur operationem Diophantus.

In tertia operatione. Cùm 6 N. + 12. debeat diuidi per 1 Q. − 3. ita vt fiat quotiens minor binario, Diophantus ita ratiocinatur. Quouis numero per alium diuiso, quotiens est denominator proportionis diuisi ad diuisorem, qui denominator eò maior est, quo maior est proportio, & contrà. Cùm igitur binario per 1. diuiso fiat quotiēs 2. & diuiso 6 N. + 12 per 1 Q. − 3. debeat fieri minus quàm 2. sequitur 6 N. + 12. ad 1 Q. − 3. minorem habere rationem, quam 2. ad 1. Datis igitur quatuor numeris 6 N. + 12. 1 Q. − 3. 2. 1. Cùm minor sit ratio primi ad secundum, quam tertij ad quartum, sequitur ex primo in quartum produci minorem numerum, quàm ex secundo in tertium, vt demonstrauit Clauius ad decimam nonam septimi. Rectè igitur infert Diophantus 6 N. + 12. minus esse quàm 2 Q. − 6. & adiectis æqualibus 6 N. + 18. minus esse quam 2 Q. Hoc autem vt fit, oportet vtique 2 Q. æquari numero alicui maiori quàm 6 N. + 18. Quod vt præstet considerat primùm Diophantus qualis fiat valor Numeri si 2 Q. ponantur æquales 6 N. + 18. quæ est secunda regula compositarum, quamque modo sibi familiari resoluit, ducendo scilicet numerum quadratorum 2. in vnitates 18. vnde fit 36. cui addit quadratum semissis numeri Numerorum, puta 9. & fit 45. cuius lateri si addatur 3. semissis numeri Numerorum, & summa diuidatur per numerum Quadratorum 2. fit valor Numeri. Sed hæc æquatio solutionem dat irrationalem, quia 45. non habet latus quadratum. Sumitur ergo loco 45. proximè maior quadratus 49. cuius lateri 7. addendo 3. fit 10 quo diuiso

per 2. prodit 5 valor numeri. In hac autem æquatione 6 N. + 18 ponitur minor quàm 2 Q. Quia 2 Q. fiunt æquales 6 N. + 20. Eadem de causa statui potest valor Numeri quilibet numerus maior quàm 5. puta 6. 7. 8. &c. Tunc enim semper 2 Q. fient æquales alicui numero maiori quàm 6 N. + 18.

Hæc quidem ad perfectam Diophantæi Problematis explicationem satis superque sufficiunt. Quoniam verò hîc vtitur author elegantissimè duplicata æqualitate, vnde re subtilius considerata modos aliquot adinuenimus eadem vtendi, etiam in dissimili casu, quibus sanè difficillima pulcherrimáque problemata feliciter explicari possunt, minimè pigebit non vulgare inuentum curioso lectori tradere vt illo perfruatur. Quemadmodum ergo in hac quæstione Diophantus docet modum quo duo numeri simul æquenter quadrato, cùm vterque componitur ex Numeris & vnitatibus, & numeri Numerorum sunt inæquales, nec habent rationem quadrati ad quadratum, numeri autem vnitatem sunt inæquales & quadrati: sic aio modum dari posse resoluendi duplicatam æqualitatem, cùm vterque propositorum numerorum quadrato æquandorum, componitur ex Numeris & vnitatibus, & numeri Numerorum sunt inæquales, nec habent rationem quadrati ad quadratum; sed & numeri vnitatum inæquales sunt, siue quadrati sint, siue non. Id autem præstabimus in duplici casu.

Primus casus est, cùm numerorum quadrato æquandorum interuallum tale est, vt eo per aliquem vnitatum numerum multiplicato, vel diuiso, & producto vel quotiente à minore propositorum numerorum detracto, supersit vnitatum numerus solus quadratus. verbi gratia. Propositi sint quadrato æquandi 3 N. + 13. & 1 N. + 7. quia horum interuallum est 2 N. + 6. quo diuiso per 2. fit quotiens 1 N. + 3. quo ablato de 1 N. + 7. superest quadratus 4. explicabitur æquatio hac arte. Consideratis tribus numeris 3 N. + 13. 1 N. + 7. & 4. cùm maiorum interuallum, puta 2 N. + 6. duplus sit interualli minorum, puta 1 N. + 3. Quærendi sunt duo quadrati; quorum interuallum sit duplum interualli, quo minor illorum superat 4. Quod facilè fiet, infinitisque modis insistendo vestigiis Diophanti. Esto enim latus minoris 1 N. + latere quadrati 4. puta 1 N. + 2. fiet quadratus 1 Q. + 4 N. + 4. cuius excessus supra 4. est 1 Q. + 4 N. cuius duplum 2 Q. + 8 N. quo addito ad minorem quadratum, fiet maior 3 Q. + 12 N. + 4. hic ergo æquandus est quadrato, sed prius determinandum est de valore Numeri. Quia enim minor numerorum quadrato æquandorum est 1 N. + 7. patet talem ei quadratum æquari debere, qui sit maior quàm 7. Quare cùm latus proximum ipsius 7. sit 2 $\frac{3}{4}$. debet & latus quadrati maius esse quàm 2 $\frac{3}{4}$. At latus huius quadrati supra positum est 1 N. + 2. hoc ergo maius sit oportet, quàm 2 $\frac{3}{4}$. & auferendo vtrimque 2. manet 1 N. maior quàm $\frac{3}{4}$. Quoniam igitur vt æquemus quadrato 3 Q. + 12 N. + 4. latus eius ponendum est 2. − certo numerorum numero, vnde fiet valor Numeri diuidendo quadruplum numeri Numerorum auctum numero 12. per quadratum eiusdem numeri numerorum multatum ternario. Euidens est quærendum esse numerum, cuius quadruplum auctum numero 12. & diuisum per quadratum quæsiti numeri multatum ternario, det quotientem maiorem quàm $\frac{3}{4}$. Ponatur quæsitus numerus 1 N. ergo $\frac{4 N. + 12}{1 Q. - 3}$ maior est quàm $\frac{3}{4}$. & omnia ducendo in 1 Q. − 3. fit 4 N. + 12. maior quàm $\frac{3}{4}$ Q. − $\frac{9}{4}$. additoque defectu, & omnia per 4. multiplicando, fit 16 N. + 57. maior quàm 3 Q. Quamobrem æquando 3 Q. numero alicui minori quàm 16 N. + 57. puta 16 N. + 53 $\frac{1}{3}$ cùm fiat 1 N. 7 $\frac{1}{3}$ pronuncio quæsitum numerum sumendum esse minorem quàm 7 $\frac{1}{3}$. talem tamen vt eius quadratus excedat 3. sumatur 3. Igitur numeri 3 Q. + 12 N. + 4. fingo latus 2 − 3 N. & fit 1 N. 4. & sunt quæsiti quadrati 100. & 36. Nam siue æques 100. & 3 N. + 13. siue 36. & 1 N. + 7. fit vtrobique idem valor Numeri 29. Quod erat propositum.

Itaque in hoc casu, vt æquatio sit explicabilis. Oportet vt interualli propositorum numerorum diuidendo Numeros per Numeros minoris numeri, vel contrà; & per quotientem diuidendo, vel multiplicando vnitates interualli, fiat quotiens vel productus quo detracto ab vnitatibus minoris numeri, supersit quadratus. Vt in exemplo allato vbi interuallum est 2 N. + 6. minor numerus 1 N. + 7. quia diuidendo 2 N. per 1 N. & per quotientem 2. diuidendo vnitates 6. fit 3. quo detracto de 7. remanet quadratus 4. ideo æquatio potuit explicari. Quod si proponantur quadrato æquandi 8 N. + 25. & 6 N. + 21. quorum interuallum 2 N. + 4. Quia diuidendo 6 N. per 2 N. & per quotientem 3. multiplicando vnitates interualli 4. fit 12. quo ablato de 21. remanet quadratus 9. ideo poterit explicari æquatio, quærendo duos quadratos quorum interuallum sit triens interualli, quo minor superat 9. Ponatur latus minoris 1 N. + 3. erit ipse 1 Q. + 6 N. + 9. & excessus eius super 9. erit $\frac{1}{3}$ Q. + 2 N. quo ipsi minori quadrato addito, fiet maior 1 $\frac{1}{3}$ Q. + 8 N. + 9. & omnia ducendo in 9. fiet 12 Q. + 72 N. + 81. æquandus quadrato, & si Numeri determinationem inuestiges, inuenies quadrati latus fingendum esse 9 − tot numeris qui non excedant 14. sed quorum quadratus excedat 12. Ponatur 9 − 4 N. fiet 1 N. 36. & erunt quæsiti quadrati 2025. & 1521. quos si æques propositis numeris, maiorem maiori, & minorem minori, fiet vtrobique 1 N. 250.

Secundus casus est. Cùm numerorum quadrato æquandorum interuallum tale est, vt eo per aliquem vnitatum numerum multiplicato, vel diuiso, & producto vel quotiente à minore propositorum numerorum detracto, deficiat vnitatum numerus solus, qui ad multiplicatorem vel diuisorem.

rationem

rationem habeat quadrati ad quadratum. Vt si proponantur æquandi quadrato 6 N. + 25. & 2 N. + 3. quorum interuallum 4 N. + 22. quia hoc diuiso per 2. fit 2 N. + 11. quo detracto à minore numero superest − 8. & numerus 8. ad diuisorem 2. habet rationem quadrati ad quadratum, ideo explicabitur æquatio hac arte. Consideratis tribus numeris 6 N. + 25. 2 N. + 3. & − 8. quoniam maiorum interuallum, puta 4 N. + 22. duplum est interualli minorum, quod est 2 N. + 11. Quæram duos quadratos, quorum interuallum sit duplum interualli quo minor superat − 8 Ponatur minor 1 Q. huius interuallum suprà − 8 est 1 Q. + 8. cuius duplum 2 Q. + 16. quo addito ad minorem quadratum, fit maior 3 Q. + 16. Hoc ergo vt æques aptè quadrato, si quæras Numeri determinationem, inuenies latus ponendum esse 4 − tot numeris qui non excedant 4 $\frac{1}{2}$. & quorum quadratus superet 3. Ponatur ergo latus illud 4 − 3 N. fiet 1 N. 4. & erunt quæsiti quadrati 64. & 16. Nam siue æques 64. & 6 N. + 25. siue 16. & 2 N. + 3. fit vtrobique 1 N. 6 $\frac{1}{2}$. Itaque in hoc casu, vt æquatio sit explicabilis, oportet vt interualli propositorum numerorũ diuidendo Numeros per Numeros minoris, vel contra, & per quotientem hunc primum diuidendo, vel multiplicando vnitates interualli, fiat quotiens vel productus, à quo detrahendo vnitates minoris numeri, supersit numerus qui ad primum quotientem habeat rationem quadrati ad quadratum. Vt in allato exemplo, vbi interuallum est 4 N. + 22. minor numerus 2 N. + 3. quia diuidendo 4 N. per 2 N. & per quotientem 2. diuidendo 22. vnitates interualli fit 11. à quo auferendo 3. vnitates minoris numeri, superest 8. qui ad quotientem 2. habet rationem quadrato numero expressam, ideo æquatio potuit explicari. Quod si proponantur quadrato æquandi 15 N. + 39. & 12 N. + 31. quorum interuallum 3 N. + 8. quia diuidendo 12 N. per 3 N. fit quotiens 4. Quo ducto in 8. fit 32. à quo auferendo 31. superest 1. qui ad quotientem 4. habet rationem quadrati ad quadratum, ideo explicabitur æquatio hac arte. Consideratis tribus numeris 15 N. + 39. 12 N. + 31. & − 1. quia maiorum interuallum 3 N. + 8. est quadrans interualli minorum quod est 12 N. + 32. Quærendi sunt duo quadrati, quorum interuallum sit quadrans interualli quo minor superat − 1. esto minor 1 Q. erit maior $\frac{5}{4}$ Q. + $\frac{1}{4}$ æquandus quadrato, omnia in 4. fit 5 Q. + 4. æqualis quadrato, & si quæras Numeri determinationem. Inuenies latus eius ponendum 2 − certo numero vnitatum qui non sit maior quàm 2 $\frac{2}{7}$. nec minor quàm 2 $\frac{1}{4}$. Ponatur ergo 2 − 2 $\frac{1}{4}$ N. fiet 1 N. 144. & erunt quæsiti quadrati 25920 $\frac{1}{4}$ & 20736. quos si æques propositis numeris, maiorem maiori, & minorem minori, fiet vtrobique 1 N. 1725 $\frac{5}{12}$.

Hac arte in æquatione quam resoluit Diophantus propositione 17. lib. 3. æquans quadrato 10 N. + 9. & 5 N. + 4. Cùm ille vnicam solutionem reperire possit, nos infinitas dabimus. Etenim quia interuallum est 5 N. + 5. & diuidendo 5 N. per 5 N. fit 1. per quem diuidendo vnitates 5. fit quotiens 5. à quo auferendo 4. superest 1. qui ad priorem quotientem 1, habet rationem quadrati ad quadratum, puta æqualitatis, ideo explicabitur æquatio si quærantur duo quadrati, quorum interuallum sit æquale interuallo quo minor superat − 1. sit minor 1 Q. erit maior 2 Q. + 1. quadrato æquandus, sed si quæras Numeri determinationem inuenies latus fingendum esse 1 − tot numeris qui sint minus quàm 2. & quorum quadratus excedat 2. fingatur 1 − 1 $\frac{1}{4}$ N. fiet 1 N. 28. vt apud Diophantum. Rursus fingatur 1 − $\frac{5}{3}$ N. fiet 1 N. $\frac{30}{7}$ eruntque quæsiti quadrati $\frac{1849}{49}$ $\frac{900}{49}$. & primum si æques 10 N. + 9. secundum 5 N. + 4. fiet 1 N. vtrobique $\frac{704}{245}$.

Porrò vtraque regula suam vim obtinet qualicunque signo afficiantur numeri quadrato æquandi, vt constat ex sequentibus exemplis.

Sint quadrato æquandi 24. − 8 N. & 9 − 2 N. quia horum interuallum est 15 − 6 N. quo diuiso per 3. fit 5 − 2 N. quo detracto à minore superest 4. quadratus numerus, resoluetur æquatio per primam regulam; sit minoris quadrati latus 1 N. + 2. erit ipse 1 Q. + 4 N. + 4. Ergo maior 4 Q. + 16 N. + 4. cuius latus si ponas 2. − 8 N. fiet 1 N. $\frac{4}{5}$. & quæsiti quadrati $\frac{784}{25}$. & $\frac{196}{25}$. quos si æques propositis numeris, fiet vtrobique idem valor Numeri $\frac{19}{50}$.

Rursus sint quadrato æquandi 30 N. − 17. & 10 N. − 11. quia horum interuallum est 20 N. − 6. quo diuiso per 2. fit 10 N. − 3. quo detracto de minore superest − 8. qui ad diuisorem 2. habet rationem quadrati ad quadratum, resoluetur æquatio per secundam regulam. Sit minor quadratus 1 Q. erit maior 3 Q + 16. cuius latus esto 4 + 1 N. fiet 1 N. 4. Erunt ergo quadrati 64. & 16. qui si æquentur propositis numeris, fiet vtrobique valor Numeri $\frac{27}{10}$.

Rursus sint æquandi quadrato 24 N. − 2 & 8 + 10. cùm horum interuallum sit 16 N. − 12. quò diuiso per 2. fit 8 N − 6. quo detracto à minore superest 16. quadratus. Explicabitur æquatio per primam regulam. Sit minoris quadrati latus 4 + 1 N. erit ipse 16 + 8 N. + 1 Q. ergo maior erit 16 + 24 N. + 3 Q. cuius latus esto 4 + 2 N. fiet 1 N. 8. ergo quæsiti quadrati sunt 400. & 144. qui si æquentur propositis numeris, fit vtrobique valor Numeri $\frac{67}{4}$.

OBSERVATIO D. P. F.

Sed proponatur si placet hac duplicata æqualitas nempè 2 N. + 5. & 6 N. + 3. æquandi quadrato. Quadratus æquãdus 2 N. + 5. erit 16 & quadratus æquandus 6

N. + 3. erit 36. & inuenientur alij in infinitum quæstioni satisfacientes, nec difficile est regulam generalem ad huiusmodi quæstionum solutionem proponere, vt vix limitatio ista Bacheti sit tanto viro digna, cum ad infinitos casus extendi, quod in duobus tantum adinuenit, facillime possit, imo & ad casus omnes possibiles.

QVÆSTIO XLVI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μεγίστου τετράγωνος, τοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου τετραγώνου, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου, λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἔτι δὲ συνδύο λαμβανόμενοι, ποιῶσι τετράγωνον. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μεγίστου τετράγωνος, τοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου τετραγώνου, τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ὁ μέσος τοῦ ἐλαχίστου, ἔστω τριπλασίων. ἐπεὶ ὁ μέγιστος, καὶ ὁ μέσος ποιοῦσι τετράγωνον, ποιείτωσαν δυ ιϛ. ὁ ἄρα μέγιστος ἔσται μείζων δυ η. ἔστω δυ η. μο β. καὶ ἐπεὶ συναμφότερος ὁ μέγιστος, καὶ ὁ μέσος, μείζων ἐστὶ συναμφοτέρου τοῦ μεγίστου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου, καὶ ἔστι συναμφότερος ὁ μέγιστος, καὶ ὁ μέσος δυνάμεις ιϛ. συναμφότερος ἄρα ὁ μέγιστος, καὶ ὁ ἐλάχιστος, ἐλάσσων μέν ἐστι δυνάμεων ιϛ. μείζων δὲ δυνάμεων η. ἔστω οὖν συναμφότερος ὁ μέγιστος, καὶ ὁ ἐλάχιστος δυνάμεις θ. ἔστι καὶ ὁ μέγιστος, καὶ ὁ μέσος δυ ιϛ. ὧν ὁ μέγιστός ἐστι δυ η. μο β. ἔσται ἄρα καὶ ὁ μέσος δυ η. λείψει μο β. ὁ δὲ τρίτος δυ α. λείψει μο β. καὶ ἐπεὶ θέλω τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μεγίστου τὸν ἀπὸ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου εἶναι τριπλασίονα. ἀλλὰ ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μεγίστου τετράγωνος, τοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου τετραγώνου ἐστὶ δυ ξδ. ἡ δὲ ὑπεροχὴ, τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐστὶ δυ ζ. καὶ θέλομεν τὰς δυνάμεις ξδ. τῶν δυ ζ. εἶναι τριπλασίονα. ἀλλ' αἱ δυ ζ. τριπλασίονα γενόμεναι ποιοῦσι δυ κα. ἀλλ' αἱ δυνάμεις ξδ. ἐκ τοῦ τριακοντάκις καὶ δίς ἐστι τῶν μο β. γέγονεν οὖν μοι εὑρεῖν τινα ἀριθμὸν, ὃς τριακοντάκις, καὶ δὶς γενόμενος ποιῇ μο κα. ἔστι δὲ τὰ κα λβ^{ων}. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον δυ η. μο κα λβ^{ων}. τὸν δὲ μέσον δυ η. λείψει μο κα. λβ^{ων}. καὶ λοιπόν ἐστιν ἓν ἐπίταγμα, συναμφότερον τὸν μέσον, καὶ τὸν ἐλάσσονα εἶναι τετράγωνον, ἔστι δὲ ὁ μέσος, καὶ ὁ ἐλάχιστος δυ θ. λείψει μο μβ λβ^{ων}. ἴσαι τετραγώνῳ ἀπὸ πλευρᾶς ϛϛ γ. λείψει μο ϛ. καὶ γίνεται ὁ ϛ. φϟζ φοϛ^{ων}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος τϛ. ϡ λγ. αψοϛ. ὁ δὲ δεύτερος σξγ. γφμδ. λγ. αψοϛ. ὁ δὲ τρίτος λγ. ηχπα λγ. αψοϛ.

INVENIRE tres numeros, vt excessus quo quadratus maximi superat quadratum medij, ad interuallum medij & minimi, datam habeat rationem, sed & bini sumpti faciant quadratum. Porrò excessus quo quadratus mixími superat quadratum medij, ad excessum medij supra minimum sit triplus. Quandoquidem maximus & medius faciunt quadratum, faciant 16 Q. ergo maximus est maior quàm 8 Q. esto 8 Q. + 2. & quando maximus & medius coniuncti superant summam maximi & minimi, at maximus & medius simul sunt 16 Q. erit vtique summa maximi & minimi minor quidem quàm 16 Q. sed maior quàm 8 Q. Igitur summa maximi & minimi esto 9 Q. Atqui summa maximi & medij est 16 Q. quorum maximus est 8 Q. + 2. erit ergo medius 8 Q. − 2. Tertius verò 1 Q. − 2. & quia volo excessum quo quadratus maximi superat quadratum medij, ad excessum medij supra minimum esse triplum, sed excessus quo quadratus maximi superat quadratum medij est 64 Q. At interuallum medij & minimi est 7 Q. cuius triplum est 21 Q. Porro 64 Q. fiunt ex 32. in 2. ducto: incumbit ergo mihi vt numerum aliquem inueniam, qui per 32 multiplicatus faciat 21. est autem $\frac{21}{32}$. Pono igitur primum 8 Q. + $\frac{21}{32}$. Medium 8 Q. − $\frac{21}{32}$. tertium 1 Q. − $\frac{21}{32}$. & restat implendum vnum postulatorum, nimirum vt summa medij & minimi sit quadratus numerus. est autem hæc summa 9 Q. − $\frac{42}{32}$. hoc ergo æquatur quadrato à latere 3 N. − 6. & fit 1 N. $\frac{597}{576}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{3069000}{331776}$. secundus $\frac{2633544}{331776}$ tertius $\frac{338681}{331776}$.

IN QVAESTIONEM XLVI.

Hîc quatuor præstanda sunt. Primo summa maximi & medij debet esse quadratus, ideo statuitur 16 Q. & poni poterat quilibet alius quadratorum numerus quadratus. Quia verò ex duobus inæqualibus numeris, patet maiorem illorum excedere semissem summæ ipsorum eodem numero, quo minor deficit ab eodem semisse, ideo posito maximo 8 Q. + 2. sequitur medium esse 8 Q. − 2.

Secundò summa maximi & minimi debet quoque esse quadratus, sed quia summa maximi & minimi, minor est summa maximi & medij eodem numero quo medius superat minimum, ideò cùm posita sit summa maximi & medij 16 Q. oportet vtique summam maximi & minimi minorem esse quàm 16 Q. Quia verò, vt dictum est, ipse maximus maior est quàm 8 Q. multò magis summa maximi & minimi, maior erit quam 8 Q. quare rectè concludit Diophantus, pro summa maximi & minimi sumendum esse quadratum minorem quàm 16 Q. maiorem quàm 8 Q. puta 9 Q. vnde si auferatur maximus qui positus est 8 Q. + 2. restat minimus 1 Q. − 2.

Tertiò excessus quadrati maximi super quadratum medij ad excessum medij supra minimum, datam rationem habere debet, putà triplam. Quia verò maximus est binomium constans ex quadratis & vnitatibus, puta 8 Q. + 2. At minimus est residuum eiusdem binomij, puta 8 Q. − 2. Quadratus autem binomij excedit quadratum sui residui, quadruplo plani sub partibus comprehensi, vt constat ex genesi quadrati per quartam secundi Euclidis, cùm quadrati partium sint iidem tam in binimio quàm in residuo, ideo sequitur interuallum quadratorum maximi & medij esse quadruplum producti ex 8 Q. in 2. nimirum 64 Q. At interuallum medij & minimi est 7 Q. cuius triplum 21 Q. æquari deberet 64 Q. Hoc ergo vt per ipsas positiones consequamur, quærendus est numerus loco ipsius 2. qui quater ductus in 8. seu in 32. semel, efficiat 21. hoc habetur diuidendo 21. per 32. estque $\frac{21}{32}$. Hunc igitur sumentes loco ipsius 2. erit maximus 8 Q. + $\frac{21}{32}$. medius 8 Q. − $\frac{21}{32}$. Minimus 1 Q. $\frac{21}{32}$. & sic per ipsas positiones tribus postulati partibus est satisfactum.

Quartò restat vt summa medij & minimi sit quadratus. Quare 9 Q. − $\frac{21}{16}$ æquandus est quadrato, cuius latus ponitur à Diophanto 3 N. − 6. non absque cautione aliqua. Etenim talis inueniri debet valor Numeri, vt 1 Q. sit maior quàm $\frac{21}{32}$. quia scilicet minimus numerus positus est 1 Q. − $\frac{21}{32}$. At 1 Q. maior erit quàm $\frac{21}{32}$. si sit maior vnitate, & si 1 Q. maior sit vnitate, erit & 1 N. maior vnitate. Itaque cùm fiat valor Numeri ex quodam quadrato adsciscente $\frac{21}{16}$. & sic diuiso per sextuplum sui lateris, vt autem fiat quotiens maior vnitate, oportet diuisum numerum esse maiorem diuisore, quærendus est numerus cuius quadratus adsciscens $\frac{21}{16}$ sit maior sextuplo ipsius numeri. Porro talis est 6. & omnis numerus suprà 6. Quia enim quadratus ipsius 6. æquatur sextuplo sui lateris, & quadratus cuiuslibet numeri supra 6. est maior sextuplo sui lateris, patet addendo $\frac{21}{16}$. ad huiusmodi quadratum fieri semper numerum maiorem sextuplo lateris. Ideo numeri 9 Q. − $\frac{21}{16}$. latus ritè ponetur 3 N. − 6. vel 3 N. − 7. vel 3 N. − 8. & sic in infinitum.

Cæterùm eodem prorsus artificio soluetur huiusmodi quæstio.

Inuenire tres numeros, vt excessus quadrati medij supra quadratum minimi ad interuallum, quo maximus superat medium datam, habeat rationem. Sed & bini sumpti faciat quadratum. Sit data ratio tripla.

Ponatur summa minimi & medij 4 Q. & esto medius 2 Q. + 1. minimus 2 Q. − 1. Tum ponatur summa minimi & maximi quilibet quadratus maior quàm 4 Q. puta 9 Q. erit ergo maximus 7 Q. + 1. Est porro interuallum quadratorum minorum 8 Q. At interuallum maiorum 5 Q. cuius triplum 15 Q. æquari deberet 8 Q. fit autem 8 Q. ex 2 Q. quater in vnitatem. Itaque quærendus est numerus loco vnitatis, qui ductus in 2. quater, seu qui ductus in 8. semel, efficiat 15. is est $\frac{15}{8}$. hunc ergo sumentes loco vnitatis ponemus minimum 2 Q. − $\frac{15}{8}$. medium 2 Q. + $\frac{15}{8}$. maximum 7 Q. $\frac{15}{8}$. Superest vt summa medij & maximi æquetur quadrato, fit ergo 9 Q. + $\frac{15}{4}$ æqualis quadrato, cuius latus ita fingendum est vt fiat valor Numeri maior vnitate, quia minimus positus est 2 Q. − $\frac{15}{8}$. Quare oportet vt 1 Q. sit maior quàm $\frac{15}{16}$. quod accidit si sit maior vnitate. Porrò fiet valor numeri ex quodam quadrato multato numero $\frac{15}{4}$. & diuiso per sextuplum sui lateris. Quare vt hac diuisione prodeat quotiens maior vnitate, oportet 1 Q. − $\frac{15}{4}$ maiorem esse quàm 6 N. vnde tandem fit 1 Q. maior quàm 6 N. + $\frac{15}{4}$. qua æquatione resoluta fit 1 N. maior quàm 7. Igitur numeri 9 Q. + $\frac{15}{4}$ latus fingemus 3 N. − quotlibet vnitatibus quæ superent 7. Ponatur 3 N. − 10. fiet 1 N. $\frac{77}{48}$. eruntque quæsiti numeri $\frac{3769}{1152}$. $\frac{8089}{1152}$. $\frac{45823}{2304}$. qui satisfaciunt postulatis, nam bini faciunt quadratos $\frac{5929}{576}$. $\frac{53361}{2304}$. $\frac{62001}{2304}$. quorum latera $\frac{77}{24}$. $\frac{231}{48}$. $\frac{249}{48}$. interuallum verò quadratorum primi & secundi est $\frac{51226560}{1327104}$. seu $\frac{88935}{2304}$. triplus vtique interualli secundi & tertij quod est $\frac{29645}{2304}$.

DIOPHANTI ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBER QVINTVS.

QVÆSTIO I.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν λείψας τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ιβ. γεωμετρικὴ δὲ ἐστιν ἀναλογία, ὅταν ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἀριθμὸς πλευρὰν ἔχῃ τὸν μέσον. ζητῶ πρότερον τίς τετράγωνος λείψει μο ιβ ποιεῖ τετράγωνον. ἔστι δὲ τοῦτο ῥᾴδιον, καί ἐστιν ὁ μβ. α δ^. τάσσω οὖν ἕνα τῶν ἄκρων μο μβ. α δ^. τὸν δὲ ἕτερον δυ α. ὁ ἄρα μέσος ἔσται ςς ς α ς^. λοιπόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν ↑ μο ιβ ποιεῖν τετράγωνον. καὶ ἔστι δυ α λείψει μο ιβ ἴση τετραγώνῳ. καὶ ςς οἱ ς α ς^ λείψει μο ιβ. ἴσοι τετραγώνῳ. ἡ τούτων ὑπεροχή ἐστιν δυ α ↑ ςς ς. α ς^. ἡ μέτρησις, μετρεῖ ς α κατὰ ς α ↑ μο ς. α ς^. τὸ τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτό ἐστι μο ρξθ ις^. ταῦτα ἴσα τῷ ἐλάσσονι, τουτέστι, ςς οἱ ς. α ς^. λείψει μο ιβ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο τξα ρδ^. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο μβ. α δ^. ὁ δὲ δεύτερος βτμς ρδ^. α ς^. ὁ δὲ τρίτος ιγ. τκα α ις^.

INVENIRE tres numeros in geometrica proportionalitate, vt quiuis eorum detracto dato numero faciat quadratum. Esto datus 12. Est autem geometrica proportionalitas, cùm numerus sub extremis contentus habet medium pro latere quadrato. Quæro primùm quis quadratus, detractis 12. faciat quadratum, hoc autem facilè fit & est $42\frac{1}{4}$. Pono ergo alterum extremorum $42\frac{1}{4}$. alterum 1 Q. Igitur medius erit $6\frac{1}{2}$ N. Restat vt horum vterque demptis 12. faciat quadratum. Proinde 1 Q. − 12. æquatur quadrato, & quadrato, & $6\frac{1}{2}$ N. − 12. æquatur quadrato horum interuallum est 1 Q. − $6\frac{1}{2}$ N. mensuratio. Metitur 1 N. per 1 N. − $6\frac{1}{2}$. horum interualli semissis in se, facit $\frac{169}{16}$. hoc æquatur minori, seu $6\frac{1}{2}$ N. − 12. & fit 1 N. $\frac{361}{104}$. Ad positiones. Erit primus $42\frac{1}{4}$. secundus $\frac{2346}{104}\frac{1}{2}$. tertius $\frac{130321}{10816}$.

In V. Librum Diophanti Commentarij.

IN QVAESTIONEM PRIMAM.

RESTITVTO textu, nihil hîc superest difficultatis. Quadratum qui detracto 12. relinquat quadratum, inuenit Diophantus per vndecimam secundi, vt benè monet Xilander, cùm hoc nihil aliud sit quàm quærere duos quadratos interuallo 12. differentes. Cæterùm cùm ex duobus numeris quadrato æquandis 1 Q. − 12. & $6\frac{1}{2}$ N. − 12. non constet quisnam sit maior altero, potest eorum interuallum statim 1 Q. − $6\frac{1}{2}$ N. vt fecit Diophantus, vel etiam $6\frac{1}{2}$ N. − 1 Q. supponendo scilicet $6\frac{1}{2}$ N. − 12. esse maiorem, & eadem nihilominus inuenietur solutio. Nam metientes erunt $6\frac{1}{2}$ − 1 N. & 1 N. quorum summæ semissis quadratus $\frac{169}{16}$ æquatur maiori, putà $6\frac{1}{2}$ N. − 12. vt prius. Hinc etiam facilè Canonem fabricabimur.

Sume pro primo quæsitorum, quemlibet quadratum, qui detracto dato numero quadratum relinquat. Huius quadranti adde datum numerum, fiet secundus. Hunc diuide per latus primi, orietur latus tertij.

Sic ponendo primum $42\frac{1}{4}$ cum Diophanto, cùm eius quadrans fit $10\frac{9}{16}$. & addendo 12. fiat $22.\frac{9}{16}$. seu $\frac{361}{16}$. tantus erit secundus. Quo diuiso per $6\frac{1}{2}$. quod est latus primi, fit latus tertij $\frac{361}{64}$. & ipse tertius $\frac{130321}{4096}$. Diophantus loco $\frac{361}{16}$ posuit secundum more suo $\frac{2346}{104}\frac{1}{2}$ exprimens eum per partes à numero 104. denominatas.

QVÆSTIO II.

INVENIRE tres numeros in geometrica proportionalitate, vt quilibet ipsorum adsumens datum numerum, faciat quadratum. Esto datus 20. Rursus quæro quis quadratus adscito 20. faciat quadratum; est autem 16. Pono ergo alterum extremorum 16. alterum verò 1 Q. Igitur medius erit 4 N. Proinde ob ea quæ in præcedente dicta sunt, restat 4 N. + 20. æquari quadrato, & 1 Q. + 20. æquari quadrato, & est horum interuallum 1 Q. − 4 N. Mensuratio metitur 1 N. per 1 N. − 4. horum interualli semissis in se facit 4. æqualem minori seu 4. N. + 20. Quod est absurdum. Oporteret enim 4 maiorem esse quàm 20. sed vnitates 4. sunt quadrans de 16. Porrò 16. non est casu oblatus. Sed est quadratus qui adsciscens 20. facit quadratum. Eò igitur deuentum est vt quæratur quadratus, cuius quadrans sit maior quàm 20. & adsumens 20. faciat quadratum. Vtique quadratus hic maior erit quàm 80. At 81. est quadratus maior quàm 80. Ergo si latus quadrati quem quærimus statuimus 1 N. + 9. erit ipse quadratus 1 Q. + 18 N. + 81. hunc oportet additis 20. facere quadratum. Proinde 1 Q. + 18 N. + 101. æquantur quadrato. Esto quadrato à latere 1 N. − 11. Erit ergo quadratus 1 Q. + 121. − 22 N. Hæc æquantur 1 Q. + 18 N. + 101. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Erat autem quæsiti quadrati latus 1 N. + 9. Erit ergo quadratus $90\frac{1}{4}$. Recurro nunc ad id quod initio proponebatur, & statuo primum $90\frac{1}{4}$. tertium 1 Q. medius ergo erit $9\frac{1}{2}$ N. & eo ventum est vt quæram quo pacto & 1 Q. + 20. & $9\frac{1}{2}$ N. + 20. æquentur quadrato. Interualli semissis in se facit $\frac{361}{16}$ quod æquatur minori, hoc est $9\frac{1}{2}$ N. + 20. & fit 1 N. $\frac{41}{152}$. Ad positiones. Erit primus $90\frac{1}{4}$. secundus $\frac{389}{152}\frac{1}{2}$. tertius $\frac{1681}{23104}$.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν προσλαβὼν τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔστω δὴ τὸν κ. πάλιν ζητῶ τίς τετράγωνος προσλαβὼν μο κ. ποιεῖ τετράγωνον, ἔστι δὲ ὁ ις. τάσσω τοίνυν ἕνα τῶν ἄκρων μο ις. τὸν δὲ ἕτερον τῶν ἄκρων δυ α. ὁ ἄρα μέσος ἔσται ςς δ. καὶ κατὰ τὴν προτέραν λοιπὸν γίνεται ζητεῖν ςς δ μο κ. ἴσους τετραγώνῳ. καὶ δυ α. μο κ. ἴσους τετραγώνῳ, καὶ ἔστιν αὐτῶν ἡ ὑπεροχὴ δυ α. λείψει ςς δ. ἡ μέτρησις, μετρεῖ ς α. κατὰ ς α. λείψει μο δ. τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ποιεῖ μο δ. ἴσας τῷ ἐλάσσονι ςς δ. μο κ. ὅπερ ἄτοπον. δεῖ γὰρ τέσσαρας μονάδας μὴ ἐλάσσονας εἶναι μο κ. ἀλλ' αἱ μο δ. τέταρτόν εἰσι τῶν ις. αἱ δὲ μο ις. οὐκ εἰσὶν αἱ τυχοῦσαι. ἀλλ' ὁ τετράγωνός ἐστιν ὁ προσλαβὼν μο κ. καὶ ποιῶν τετράγωνον. ἀπῆκται οὖν μοι ζητῆσαι τίς τετράγωνος ἔχει μέρος τέταρτον, ὃ μεῖζόν ἐστιν μο κ. προσλαβὼν δὲ μο κ. ποιεῖ τετράγωνον. ὥστε ὁ τετράγωνος γίνεται μείζων μο π. ἔστι δὲ ὁ πα τετράγωνος μείζων π. ἐὰν ἄρα τὴν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου πλευρὰν κατασκευάσωμεν ἀπὸ ς α. μο θ. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δυ α. ςς ιη. μο πα. ἐπεὶ μετὰ μο κ. ὀφείλει γίνεσθαι τετράγωνος. ἔστιν ἄρα δυ α. ςς ιη. μο ρα. ἴσαι τετραγώνῳ ἔστω ἀπὸ πλευρᾶς ς α. λείψει μο ια. ὁ ἄρα τετράγωνος ἔσται δυ α. μο ρκα. λείψει ςς κβ. ταῦτα ἴσα δυ α. ςς ιη. μο ρα. καὶ γίνεται ὁ ς μονάδος ἡμίσεως. ἦν δὲ ἡ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου πλευρὰ ς α. μο θ. ἔσται ἄρα ὁ τετράγωνος μο ϙ. α δ. νῦν ἀνατρέχω ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω πρῶτον τῶν ἄκρων μο ϙ. α δ. τὸν δὲ τρίτον δυ α. ὁ ἄρα μέσος ἔσται ςς θ. α ς. καὶ ἔρχομαι εἰς τὸ ζητεῖν δυ α. μο κ. ἴσας τετραγώνῳ. καὶ ςς θ. α ς. μο κ. ἴσους τετραγώνῳ, καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ δυ α. λείψει ςς θ. α ς. μετρεῖ ς α κατὰ ς α. λείψει μο θ. α ς. τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτό ἐστι τξα ιϛ. ἴσα τῷ ἐλάσσονι, τουτέστι ςς θ. α ς. μο κ. καὶ γίνεται ὁ ς μα ρνβ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ϙ α δ. ὁ δεύτερος τπθ ρνβ. α ς. ὁ τρίτος αχπα βτδ.

IN QVAESTIONEM II.

IN prima operatione occurrunt quadrato æquandi 4 N. + 20. & 1 Q. + 20. ſed explicari non poteſt huiuſmodi æquatio, quia horum interuallum eſt 1 Q. − 4 N. quod fit ex 1 N. in 1 N. − 4 quorum interuallum 4. cuius ſemiſſis quadratus 4. æquari debet minori, putà 4 N. + 20. quod eſt impoſſibile, quia 4. non eſt maior quàm 20. Conſiderat ergo Diophantus vnde 4. prouenerit, eſt autem quadratus ſemiſſis numeri Numerorum 4. pro ſecundo poſiti. At ſecundus ſtatuitur numerus Numerorum qui latus eſt quadrati pro primo poſiti, quia enim primus poſitus eſt 16. fit ſecundus
11. octaui. 4. N. Quoniam ergo quadratus ſemiſſis cuiuſlibet numeri, eſt quadrans quadrati totius numeri, eò quod quadrati ſunt in ratione duplicata laterum, rectè concludit Diophantus quadratum 4. eſſe quadrantem quadrati 16. Quare eò deuentum eſt, vt loco 16. ſtatuamus pro primo aliquem alium quadratum, qui adſcito 20. faciat quadratum, & cuius quadrans ſit maior quàm 20. Reliqua plana ſunt, nec maiore explicatione indigent. Sed ex ipſa operatione talis Canon elici poteſt.

Sume pro primo quemlibet quadratum, qui adſcito dato numero quadratum faciat, & cuius quadrans excedat datum numerum. Ab huius quadrante aufer datum numerum, relinquetur ſecundus: quem diuide per latus primi, orietur latus tertij.

QVÆSTIO III.

ΔΟΘΕΝΤΙ ἀριθμῷ προσθεῖναι τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστός τε αὐτῶν, καὶ ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔστω δὴ τὸν ε. καὶ ἐπεὶ ἔχομεν ἐν τοῖς πορίσμασιν, ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἑκάτερός τε καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ αὐτοῦ δοθέντος ποιῇ τετράγωνον, γεγόνασιν ἀπὸ δύο τετραγώνων τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς. ἐκτίθεμαι οὖν δύο τετραγώνους τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς, ὃν μὲν ἀπὸ ςοῦ α. μο γ. ὃν δὲ ἀπὸ ςοῦ μο δ. καὶ γίνονται οἱ τετράγωνοι ὃς μὲν δυ α ςς ς. μο θ. ὃς δὲ δυ α. ςς η. μο ις. ἀφαιρῶ ἀπὸ ἑκάστου μο ε. καὶ τάσσω ὃν μὲν δυ α. ςς ς. μο δ. ὃν δὲ δυ α. ςς η. μο ια. τὸν δὲ τρίτον τὸν συναμφοτέρων δὶς παρὰ μονάδα, τουτέστι δυ δ. ςς κη. μο κθ. λοιπὸν ἄρα καὶ τοῦτον μετὰ μο ε. ποιεῖν τετράγωνον. δυνάμεις ἄρα δ. ςςοὶ κη. μο λδ. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς β. λείψει μο ς. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δυ δ. μο λς. λείψει ςς κδ. ἴσον δυνάμεσι δ. ςςοῖς κη. μο λδ. καὶ γίνεται ὁ ς μο α κςων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ,βωξα χοςων. ὁ δὲ δεύτερος ,ζχμε χοςων. ὁ δὲ τρίτος β. τλς χοςων.

DATO numero apponere tres numeros, vt quilibet ipſorum, & qui à binis producitur quibuſuis datum adſumens numerum, faciat quadratum. Datus eſto 5. Quoniam habemus in poriſmatibus; ſi duo ſint numeri, quorum tam vterque, quam productus eorum multiplicatione eodem dato numero adſcito faciat quadratum, oriuntur à duobus quadratis continenter proximis. Expono duos huiuſmodi quadratos, alterum à latere 1 N. + 3. alterum à latere 1 N. + 4. & fiunt quadrati, alter quidem 1 Q. + 6 N. + 9. alter verò 1 Q. + 8 N. + 16. Aufero ab vtroque 5. & ſtatuo alterum 1 Q. + 6 N. + 4. alterum 1 Q. + 8 N. + 11. tertium autem duplum ſummæ horum dempta vnitate, hoc eſt 4 Q. + 28 N. + 29. Reſtat ergo vt & hic adſumpto 5. faciat quadratum. Proinde 4 Q. + 28 N. + 34. æquantur quadrato, à latere ſcilicet 2 N. + 6. & fit quadratus 4 Q. + 36 − 24 N. æqualis 4 Q. + 28 N. + 34. & fit 1 N. $\frac{1}{26}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{2861}{676}$. ſecundus $\frac{7645}{676}$. tertius $\frac{20336}{676}$.

IN QVAESTIONEM III.

PORISMA quod aſſumit Diophantus, vniuerſalius propoſitum, demonſtrauimus propoſitione decima tertia libri ſecundi poriſmatum. Nam propoſitio illa hic facilè applicatur, ſi quod ibi vniuerſaliter demonſtratur de quibuſcumque quadratis, adaptetur quadratis continenter proximis. Etenim cùm laterum interuallum ſit vnitas, quæ numeros quos diuidit non immutat, patet quadratos multatos dato numero, vnà cum duplo ſummæ illorum, vnitate multato, præſtare quod ait Diophantus, & reliqua plana ſunt.

Porrò vſus erit huius poriſmatis, quare demonſtratum eſt loco citato, ſi proponatur huiuſmodi quæſtio.

Inuenire tres numeros, vt quem bini producunt adſcito dato numero quadratum faciat, ſed & quilibet in eundem aliquem numerum ductus, & aſſumens eundem datum numerum, fiat quadratus.

Datus eſto 5. & quilibet ductus in 2. & adſumens eundem 5. fiat quadratus. Exponantur duo quadrati, quorum interuallum ſit 2. ſintque eorum latera 1 N. + 3. & 1 N. + 5. erunt ipſi quadrati 1 Q. + 6 N. + 9. & 1 Q. + 10 N. + 25. aufer ab vtroque 5. & reſidua diuide per interuallum laterum 2. fient $\frac{1}{2}$ Q + 3 N + 2. & $\frac{1}{2}$ Q. + 5 N. + 10. primus & ſecundus quæſitorum, tertius autem erit duplum ſummæ illorum multatum eodem interuallo laterum 2. putà 2 Q. + 16 N. + 22. Reſtat vt & huius duplum adſcito 5. quadratum faciat. Igitur 4 Q. + 32 N. + 49. æquatur quadrato, eſto latus eius 2 N. − 17. fiet 1 N. $\frac{12}{5}$. Sunt ergo quæſiti numeri $\frac{302}{25}$. $\frac{622}{25}$. $\frac{1798}{25}$. qui ſatisfaciunt propoſito.

OBSERVATIO D. P. F.

Ex hac propoſitione facilè deducetur ſequens quæſtio. Inuenire 4. numeros eâ conditione, vt quod ſub binis producitur, adſcito dato numero faciat quadratum. Inueniantur tres quæſtioni ſatisfacientes ita vt ſinguli dato numero aucti conficiant quadratos iuxta hanc propoſitionem. Ponatur quartus inueniendus eſſe 1 N. + 1 orietur triplicata æqualitas cuius ſolutio noſtræ methodi beneficio erit in promptu. Vide adnotata ad 24. quæſtionem lib. 6. ſoluetur itaque quæſtio quam propoſuit Bachetus ad quæſtionem 12. lib. 31. per hanc methodum quæ cum multò ſit generalior, hoc præterea amplius habet quam methodus Bacheti quod tres priores numeri aucti dato numero conficiant quadratos in noſtrâ ſolutione. An verò ita ſolui poſſit quæſtio vt etiam quartus auctus dato numero conficiat quadratum, Hoc ſanè hactenus ignoramus. Inquiratur itaque vlterius.

QVÆSTIO IV.

DATO numero, innenire alios tres, vt quiuis ipſorum, & qui ex binis quibuſque fit, multatus dato numero faciat quadratum. Eſto datus 6. Rurſum ſimiliter expono duos quadratos continenter proximos, alterum 1 Q. alterum 1 Q. + 2 N. + 1. & his adiicio datum numerum, & ſtatuo primum 1 Q. + 6. ſecundum 1 Q. + 2 N. + 7. tertium ſimiliter duplum amborum dempta vnitate, hoc eſt 4 Q. + 4 N. + 25. Reſtat vt & is detracto 6. faciat quadratum. Proinde 4 Q. + 4 N. + 19. æquantur quadrato, eſto latus eius 2 N. 6. & fit quadratus 4 Q. + 36 − 24 N. æqualis 4 Q. + 4 N. + 19. & fit 1 N. $\frac{17}{28}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{4993}{784}$. ſecundus $\frac{6729}{784}$. tertius $\frac{22660}{784}$.

ΔΟΘΕΝΤΙ ἀριθμῷ εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ἑκάτερός τε αὐτῶν, καὶ ὁ ὑπὸ δύο ὁ ποιωνῶν λείψας τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ϛ. πάλιν δὴ ὁμοίως ἐκτίθεμαι δύο τετραγώνους τοὺς κατὰ τὸ ἑξῆς ὄντας, ὃν μὲν δυ α. ὃν δὲ δυ α. ςς β. μο α. καὶ τούτοις προστίθημι τὸν δοθέντα, καὶ τάσσω μὲν τὸν πρῶτον δυ α μο ϛ. τὸν δεύτερον δυ α ςς β μο ζ. τὸν δὲ τρίτον ὁμοίως τοῦ διπλασίονος συναμφοτέρου παρὰ μονάδα α. τουτέστι δυ δ. ςς δ. μο κε. λοιπὸν ἄρα καὶ τοῦτον λείψαντα μο ϛ. ποιεῖν τετράγωνον. δυ ἄρα δ. ςς δ. μο ιθ. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς β. ⋔ μο ϛ. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δυ δ ⋔ μο λϛ. λείψει ςς κδ. ἴσοι δυ δ. ςς δ. μο ιθ. καὶ γίνεται ὁ ς ιζ κη. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ͵δϠϟγ. ψπδ. ὁ δὲ δεύτερος ͵ϛψκθ. ψπδ. ὁ δὲ τρίτος β. ͵βχξ. ψπδ.

IN QVAESTIONEM IV.

PORISMA quoque quod hîc aſſumitur, demonſtratum eſt à nobis propoſitione decimaquarta libri ſecundi poriſmatum, ſed vniuerſalius, cuius etiam vſus ampliari poteſt, eodem prorſus modo, quo ad præcedentem docuimus id fieri poſſe in ſimili poriſmate.

QVÆSTIO V.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἔχομεν πάλιν ἐν τοῖς πορίσμασιν. ὅτι πᾶσι δύο τετραγώνοις τοῖς κατὰ τὸ ἑξῆς προσευρίσκεται ἕτερος ἀριθμὸς ὃς ὢν διπλασίων συναμφοτέρου καὶ δυάδι μείζων, τρεῖς ἀριθμοὺς ποιεῖ, ὧν ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λοιπὸν ποιεῖ τετράγωνον. τάσσωμεν οὖν τῶν ἐκκειμένων τριῶν τετράγωνον. ὃν μὲν δυ ᾱ. ςς β̄. μο ᾱ. ὃν δὲ δυ ᾱ. ςς δ̄. μο δ̄. τὸν δὲ τρίτον δυ δ̄. ςς ιβ̄. μο ιβ̄. λοιπὸν δεῖ κατασκευάσαι τὸν τρίτον, τουτέστι δυ δ̄. ἀριθμοὺς ιβ̄. μο ιβ̄. ἴσον τετραγώνῳ, καὶ ἐκείνου τὸ τέταρτον γίνεται δύναμις ᾱ. ἀριθμοὶ γ̄. μο γ̄. ἴσαι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς ᾱ. ⋔ μο γ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος. δυ ᾱ. μο θ̄. ⋔ ςς ς̄. ἴσαι δυ ᾱ. ςςοὶ γ̄. μο γ̄. καὶ γίνεται ὁ ς μο β̄ γ^ν. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κε̄ θ^ν. ὁ δὲ τρίτος ρϞς̄ θ^ν.

INVENIRE tres quadratos, vt quem bini faciunt planum, siue adsciscat amborum summam, siue reliquum, faciat quadratum. Habemus rursum in porismatibus. Quod duobus quibúsque quadratis continenter proximis adinueniri potest alius numerus, qui cum sit summæ illorum duplus, & binario amplior, tres facit numeros, quorum bini quem producunt, siue adsciscat amborum summam, siue reliquum, faciat quadratum. Statuo igitur trium quæsitorum quadratorum, alterum 1 Q. + 2 N. + 1. alterum 1 Q. + 4 N. + 4. tertium 4 Q. + 12 N. + 12. Restat vt tertiũ, nempè 4 Q. + 12 N. + 12. æquemus quadrato, sed & huius quadrans fit 1 Q. + 3 N. + 3. æqualis quadrato. Formo quadratum ab 1 N. − 3. est ergo quadratus ipse 1 Q. + 9 − 6 N. æqualis 1 Q. + 3 N. + 3. & fit 1 N. $\frac{2}{3}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{25}{9}$. secundus $\frac{64}{9}$. tertius $\frac{196}{9}$.

IN QVAESTIONEM V.

Hîc codex manu exaratus porismatis explicationem sic exhibet. ὅτι πᾶσι δύο τετραγώνοις τοῖς κατὰ τὸ ἑξῆς, προσευρίσκεται ἕτερος ἀριθμὸς, ὃς ὢν διπλασίων συναμφοτέρου καὶ δυάδι μείζων, ὅς τις τὸν ἑκκαίδεκα μείζονα, τρεῖς ἀριθμοὺς ποιεῖ, ὧν ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν, ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λοιπὸν, ποιεῖ τετράγωνον. Vnde nos, tanquam subreptitia, expunximus verba illa, ὅς τις τὸν ἑκκαίδεκα μείζονα. Ipsum verò porisma demonstrauimus vniuersalissimè propositione decimasexta libri secundi porismatum. Itaque nihil hîc superest difficultatis.

QVAESTIO VI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ἕκαστος μὲν αὐτῶν λείψας δυάδα ποιῇ τετράγωνον, ὁ δὲ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἐάν τε λείψῃ συναμφότερον, ἐάν τε λοιπὸν, ποιῇ τετράγωνον. ἐὰν ἑκάστῳ τῶν ἐν τῷ πρὸ τούτου εὑρεθέντων ἀριθμῶν, προσθῶ δυάδα, οἱ γινόμενοι ποιοῦσι τὸ προκείμενον. τὸ δὴ γινόμενον τοιοῦτόν ἐστι. τάσσωμεν γὰρ ἕνα τῶν ζητουμένων δυ ᾱ. μο β̄. τὸν δὲ ἕτερον δυ ᾱ. ςςοὶ β̄. μο γ̄. τὸν δὲ τρίτον δυ δ̄. ςςοὶ δ̄. μο ς̄. καὶ μένει τὰ ἐπιταχθέντα. λοιπόν ἐστι δυ δ̄. ςςοὶ δ̄. μο δ̄. ἰσῶσαι τετραγώνῳ, καὶ τὸ τέταρτον, ὥστε καὶ δύναμιν ᾱ. ς ᾱ. μο ᾱ. ἴσους εἶναι τετραγώνῳ, καὶ ἐὰν τάξωμεν τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ

INVENIRE tres numeros, vt quiuis eorum binario multatus faciat quadratum, & qui fit ex binorum mutuo ductu, siue amborum summam abiiciat, siue reliquum, fiat quadratus. Si cuiuis superiore quæstione inuentorum numerorum adiicio 2. sic confecti satisfaciunt postulatis. Quod itaque dicitur tale est. Ponimus vnum eorum qui quæruntur 1 Q. + 2. Alterum 1 Q. + 2 N. + 3. tertium 4 Q. + 4 N. + 6. & fit quod iubetur. Restat vt 4 Q. + 4 N. + 4. æquetur quadrato. Proinde & quadrans eius æquatur quadrato, nempè 1 Q. + 1 N. + 1. Quod si latus quadrati ponamus à differentia, erit

1 N

1 N − 2. fit quadratus 1 Q + 4 − 4 N. æqualis 1 Q. + 1 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{3}{5}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{59}{25}$. secundus $\frac{114}{25}$. tertius $\frac{246}{25}$. & euidens est demonstratio.

διαφορᾶς. ἔστω ἀπὸ ς^{οῦ} α᷄ ⋔ μ° β̄. γίνεται ὁ τετράγωνος. δ^{υ} ᾱ. μ° δ̄. ⋔ ςς δ̄. ἴσος δ^{υ} ᾱ. ς^{οῖς} ᾱ. μ° ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς^{ος} γ^{ων} ε^{ων}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος νθ κε^{ων}. ὁ δὲ δεύτερος ριδ κε^{ων}. ὁ δὲ τρίτος σμς κε^{ων}. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM VI.

IN huius quæstionis propositione, habet codex manuscriptus. ὁ δὲ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν, ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε τὸν ὅλον, ποιῇ τετράγωνον, pro quo reposuimus, ἐάν τε λείψῃ συναμφότερον, ἐάν τε λοιπὸν, &c.

Porrò duplicem modum tangit Diophantus, soluendi quæstionem istam. Primus est addendo binarium tribus numeris præcedentem soluentibus, vbi nulla opus est operatione Algebræ. Secundus est per operationem Algebræ supponendo porisma quod ostendimus propositione decima septima libri secundi. Nimirum. Si sumantur duo quadrati, itemque duplum summæ illorum & quadrati interualli laterum, fient tres numeri, quibus si addatur sigillatim duplum quadrati interualli laterum, fient tres alij, quorum bini quem producent mutuo ductu, is, siue multetur amborum summa, siue reliquo, fiet quadratus. Vnde sanè operatio Diophanti manifestè pendet, sed & primus modus hinc suam mutuatur demonstrationem, vt luce clarius est.

Huc pertinet quæstio quam tradidit Vieta Zetetico duodecimo libri quinti. Quamuis eam imperfectè tractauerit, omittens alteram illius partem, eò quod Porismatum quæ demonstrauimus propositione decimasexta, & decimaseptima libri secundi perfectam cognitionem non habuit. Nos vniuersalissimè proponemus hoc pacto.

Inueniantur tres quadrati, vt qui fit ex binorum mutuo ductu, additus ei qui fit ex quadrato dato, siue in amborum summam, siue in reliquum, conficiat quadratum.

Datus quadratus esto 9.

Ponatur primi latus 1 N. secundi 1 N. + 3. erunt quadrati 1 Q & 1 Q. + 6 N. + 9. & sit tertius duplum primi & secundi, & quadrati interualli laterum, seu ipsius 9 puta 4 Q. + 12 N. + 36. Constat ergo per decimamsextam secundi porismatum productum ex binorum mutuo ductu adscito producto ex quadrato 9. siue in amborum summam, siue in reliquum, facere quadratum. Restat vt tertius sit quadratus. Ergo 4 Q. + 12 N. + 36. æquandus est quadrato, cuius latus esto 2 N. + 4. fiet 1 N. 5. Erunt ergo quæsiti quadrati 25. 64. 196. & satisfaciunt proposito.

Rursus.

Inueniantur tres numeri, vt quiuis eorum multatus duplo dati quadrati, faciat quadratum; & productus ex binorum mutuo ductu, detracto eo qui fit ex dato quadrato, siue in summam amborum, siue in reliquum, relinquat quadratum.

Datus quadratus esto 9.

Si tribus per præcedentem inuentis quadratis addas duplum dati quadrati, puta 18. fient quæsiti numeri 43. 82. 214. qui satisfaciunt postulatis, vt constat ex decimaseptima secundi porismatum. Itaque non satis feliciter quæstiones istas explicauit Franciscus Vieta loco citato, cùm numerorum quos inuenit proprietates penitus perspectas non habuerit.

QVÆSTIO VII.

Lemma ad id quod sequitur.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione addito vtriusque quadrato, summam faciat quadratum. Esto primus 1 N. secundus vnitatum quotlibet, puta 1. & est productus eorum multiplicatione 1 N. summa verò quadratorum est 1 Q. + 1 adde 1 N. fit 1 Q. + 1 N. + 1 æqualis quadrato. Esto latus eius 1 N. − 2. fit quadratus 1 Q. + 4. − 4 N.

Λῆμμα εἰς τὸ ἑξῆς.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τοὺς ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετραγώνους τὴν σύνθεσιν ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ πρῶτος ς^{οῦ} ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος μ° ὅσων θέλεις. ἔστω μ° ᾱ. καὶ γίνεται ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν ς^{οῦ} ᾱ. ὁ δὲ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος ποιεῖ δ^{υ} ᾱ. μ° ᾱ. μετὰ τοῦ ς^{οῦ} ᾱ. γίνεται δ^{υ} ᾱ. ς^{οῦ} ᾱ. μ° ᾱ. ἴσον τετραγώνῳ. ἔστω ἡ πλευρὰ ἀπὸ πλευρᾶς ς^{οῦ} ᾱ. λείψει μ° β̄. γίνεται ὁ τετράγωνος δ^{υ}.

α. μ° δ. λείψει ςς δ. ἴσον δυ α. καὶ γίνεται ὁ ς γ ε^{ων}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος γ ε^{ων}. ὁ δὲ δεύτερος ε ε^{ων}. καὶ ἀρθέντος τοῦ μορίου. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ° γ. ὁ δεύτερος ε. καὶ ποιοῦσι τὸ προκείμενον. ὁ γὰρ ὑπ' αὐτῶν μετὰ τῶν ἀπ' αὐτῶν ποιεῖ τετράγωνον. ὁσάκις δὲ ἐὰν θέλης τὸν γ. καὶ τὸν ε. ποιήσουσιν οἱ γενόμενοι ἀριθμοὶ τὸ ἐπίταγμα.

æqualis 1 Q. + 1 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{3}{5}$. Ad positiones. erit primus $\frac{3}{5}$. secundus $\frac{5}{5}$. & abiecto denominatore, erit primus 3. secundus 5. & postulatis respondent, nam productus eorum multiplicatione cum summa quadratorum, facit quadratum. Quotiescunque autem voles ternarium & quinarium sumere, facient numeri qui nascuntur, id quod iuberis.

IN QVAESTIONEM VII.

Hic triplex varietas contingere potest. Primo enim posito altero 1 N. alter statui potest quotlibet vnitatum. Deinde primus etiam poni potest quilibet Numerorum numerus. Denique latus numeri quadrato æquandi diuersimodè fingi potest.

Restat probandum quod ait Diophantus, nimirum. Si dentur duo numeri quæstioni satisfacientes, duo alij quicunque in eadem ratione sumpti, soluent quæstionem. Sint A B propositum implentes, sint videlicet eorum quadrati C D. & productus multiplicationis E. & summa C E D. sit F. quadratus numerus. Tum sumantur G H in ratione ipsorum A B. & sint eorum quadrati K M, & productus L, & ipsorum K L M. summa sit N. Dico N. esse quadratum. Quia enim vt constat ex constructione vndecimæ octaui est C ad E. & E ad D. sicut A ad B, & similiter est K ad L. & L ad M. sicut G ad H. cùm sit A ad B. vt G ad H ex hypothesi, erit & C ad E. & E ad D, sicut K ad L & L ad M. & permutando erit C ad K. vt E ad L. & vt D ad M. [a] Quare & antecedentium summa, puta F ad summam consequentium, puta ad N. est vt vnus antecedens C ad vnum consequentem K. Sed vterque C & K quadratus est. Ergo F ad N. rationem habet quadrati ad quadratum. Ac proinde cùm F sit quadratus [b] & N. quadratus erit. Quod demonstrandum erat.

A 3. B 5. F. 49.
C 9. E 15. D 25.

G 6. H 10. N 196.
K 36. L 60. M 100.

[a] 12. septimi.
[b] 24. octaui.

Ex ipsa autem operatione formatur huiusmodi Canon.

Diuide quadratum quemlibet vnitate multatum, per duplum sui lateris vnitate auctum, duo numeri quicumque in ratione quotientis ad vnitatem, satisfacient proposito.

Cæterùm eadem arte soluetur hæc quæstio.

Inuenire duos numeros, vt summa quadratorum, detracto producto relinquat quadratum.

Esto primus 1 N. secundus 1. fit productus 1 N. summa quadratorum 1 Q. + 1. vnde auferendo 1 N. manet 1 Q. + 1 − 1 N. æquandus quadrato. Esto latus 1 N. − 3. fit 1 N. $\frac{8}{5}$. est ergo primus $\frac{8}{5}$ secundus $\frac{5}{5}$. & abiecto denominatore, fit primus 8. secundus 5. & satisfaciunt postulatis. Hinc etiam elicietur iste Canon.

Diuide quadratum quemlibet vnitate multatum, per duplum sui lateris vnitate multatum, quotiens ad vnitatem habebit rationem quæsitorum numerorum.

Vbi hoc animaduersione dignum occurrit, si sumantur duo numeri huic quæstioni satisfacientes, maior quoque illorum & eorum interuallum quæstionem soluunt. At minor illorum & interuallum, soluunt quæstionem Diophanti. Contrà, si duo numeri soluant quæstionem Diophanti, summa ipsorum, & alteruter eorundem, nostram hanc quæstionem soluunt. Sic sumptis 8. & 5. nostram quæstionem soluentibus (nam summa quadratorum detracto producto, facit quadratum 49.) maior 8. & interuallum 3. eandem soluunt quæstionem; nam rursus summa quadratorum detracto producto facit 49. At minor 5. & interuallum 3. soluunt quæstionem Diophanti, cùm summa quadratorum adsumpto producto, rursus faciat 49. Huius rei demonstratio, ab huiusmodi theoremate pendet.

Si numerus secetur in duas partes, quadrati partium, vnà cum producto multiplicationis earundem, æquantur quadratis à toto & à qualibet parte, multatis producto multiplicationis ex toto in eandem partem.

A . . . . . B . . . C

Sit numerus A C. sectus in A B B C. dico quadratos ex A B. B C. vnà cum producto ex A B in B C. æquari quadratis ex A C. A B multatis producto ex A C in A B. Itemque quadratis ex A C. B C. multatis producto ex A C in B C. Quia enim quadratus ex A C. [a] æquatur quadratis ipsorum A B. B C. & duplo producti ex A B. in B C. addito quadrato ex A B. erit summa quadratorum ex A C. A B. æqualis quadrato ex A B. bis, ex B C semel, & duplo producti ex A B in B C. At quadratus ex A B cum producto ex A B in B C. [b] æquatur producto ex A C in A B. Quare auferendo à summa quadratorum ex A C.

[a] 4. secundi.
[b] 3. secundi.

A B. productum ex A C in A B, seu quod idem est, quadratum ex A B & productum ex A B in B C, remanent quadrati ex A B. B C, vnà cum producto ex A B in B C. Eadem prorsus ratione ostendemus auferendo à quadratis ex A C. B C. productum ex A C in B C. remanere quadratos ex A B B C. vnà cum producto ex A C. in B C. Igitur ex omni parte constat propositum.

QVÆSTIO VIII.

INVENIRE tria triangula rectangula, quorum areæ sint æquales. Primùm oportet quærere duos numeros, vt productus eorũ multiplicatione cum summa quadratorum faciat quadratũ. Hoc autem suprà ostẽsum est, & sunt 3. & 5. quorum mutuo ductu productus cum summa quadratorum facit quadratum, cuius latus est 7. Compono ergo tria triangula rectangula à duobus numeris, alterum à 7. & 3. alterum à 7. & 5. & præterea alterum à 7. & à summa inuentorum numerorum 3. & 5. hoc est à 8. Erunt igitur triangula 40. 42. 58. & 24. 70. 74. & 15. 112. 113. & sunt triangula, quorum eadem est area 840.

ΕΥΡΕΙΝ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσα ἔχοντα τὰ ἐμβαδά. πρότερον δεῖ ζητῆσαι δύο ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ τῶν ἀπ' αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ προδέδεικται, καὶ εἰσὶ γ. καὶ ε. ὧν ὁ ὑπ' αὐτῶν, μετὰ τῶν ἀπ' αὐτῶν ποιεῖ τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τὸν ζ. συντάσσω τρία τρίγωνα ὀρθογώνια ἀπὸ ἀριθμῶν δύο, ἀπό τε τοῦ ζ. καὶ τοῦ γ. καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ ζ. καὶ τοῦ ε. καὶ ἔτι ἀπὸ τοῦ ζ. καὶ τῆς συνθέσεως τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν τοῦτε γ. καὶ τοῦ ε. τουτέστι η. ἀπὸ ἄρα τοῦ ζ. καὶ τοῦ η. ἔσται οὖν τὰ τρίγωνα. μ. μβ. νη. καὶ κδ. ο. οδ. καὶ ιε. ριβ. ριγ. καὶ ἔστι τὰ τρίγωνα ἴσα ἔχοντα ἐμβαδὰ ἀπὸ μο ωμ.

IN QVAESTIONEM VIII.

MAGNA hic verborum iactura facta erat in textu Diophanti, vt bene animaduertit Xilander, nos eam resarcire conati sumus, verba reponentes quæ virgulis inclusa vides. Itaque nil superest difficultatis, nisi vt demonstretur trium triangulorum rectangulorum, modo quem tradit Diophantus inuentorum, æquales esse areas, quod præstabimus more nostro, si prius hoc veluti lemma præmiserimus.

Si duobus quadratis addatur sigillatim productus ex mutuo laterum ductu, erit compositorum eadem ratio, quæ & laterum ipsorum.

Sint quadrati A B. quorum latera C D. ex quorum mutuo ductu fiat G. Dico summam duorum A G. ad summam duorum G B se habere, vt C ad D. etenim vt constat ex vndecima octaui, A G B sunt continuè proportionales in ratione C ad D. Quare cùm sit A ad G. vt G ad B. erit & componendo summa duorum A G ad G. sicut summa duorum G B. ad B. & permutando, erit summa duorum A G. ad summam duorum G B. sicut G ad B. hoc est sicut C ad D. Quod erat demonstrandum.

A 9. G 12. B 16.
C 3. D 4.

Hoc posito sint numeri A B præcedenti quæstioni satisfacientes, sint videlicet eorum quadrati E F. & productus mutuo illorum ductu G. & summa ipsorum E F G. sit quadratus H. cuius latus C. summa verò ipsorum A B. sit D. cuius quadratus K. Tum vt vult Diophantus [1] formetur triangulum à numeris C A. sit videlicet hypotenusa L. summa quadratorum H E. & sit basis M. interuallum eorundem. & sit cathetus N. duplum producti ex C in A. Similiter formetur triangulum à numeris C B. sitque hypotenusa P. summa quadratorum H F. At sit basis Q. interuallum eorundem ac demum cathetus R sit duplum producti ex C in B. Rursus formetur triangulum à numeris C D. sitque hypotenusa S. summa quadratorum H K. sit basis T. interuallum eorundem. & sit cathetus V duplum producti ex C. in D. Dico tria triangula L M N. P Q R. S T V. præstare quod requiritur, hoc est areas eorum æquales esse, seu productos ex M in N. ex Q. in R. & ex T in V æquales esse, sic enim sequitur areas æquales esse [2], cùm sint semisses huiusmodi productorum. Itaque quoniam idem C ductus bis in ipsos A B D. producit ipsos N R V. [3] erit N ad R. vt A ad B. & rursus R ad V. vt B ad D. Quoniam verò M est interuallum quadratorum H E. & H est summa ipsorum E F G. patet M æquari ipsis F G simul. Rursus quia Q. est interuallum quadratorum H F. patet Q. æquari ipsis E G. Est autem summa duorum E G ad summam duorum G F. sicut A ad B per Lemma assumptum. Igitur est Q ad M. sicut A ad B. Cùm ergo ostensum sit esse N ad R. vt A ad B. patet esse N ad R. vt Q. ad M. Quare [4] planus sub extremis N M. æquatur plano sub mediis R Q. ac proinde triangulorum L M N. P Q R. æquales sunt areæ. Præterea cùm ostensum sit Q. æquari duobus E G. quadrato

G 15.
H 49. E 9. F 25. K 64.
C 7. A 3. B 5. D 8.
L 58. M 40. N 42.
P 74. Q. 24. R 70.
S 113. T 15. V 112.

[1] 5. 3. porism.
[2] defin. 3. 3. porism.
[3] 17. septimi.
[4] 19. septimi.

3. secundi. scilicet ipsius A. & producto ex A in B. ' æquabitur idem Q. producto ex summa duorum A B, hoc est ex D in A. Quoniam verò K est quadratus summæ ipsorum A B '. patet K æquari ipsis E F. & du- 4. secundi. plo G. Quare ex K auferendo H qui continet ipsos E F G semel, patet reliquum T æqualem esse ipsi G. ac proinde fieri ex A in B. Itaque cùm idem A ductus in B. & in D. producat T & Q. erit T ad Q. vt B ad D. Sed vt B ad D. sic ostensum est esse R ad V. Igitur vt R ad V. sic T vt 19. septimi. ad Q. Quare ' rursus qui continetur sub extremis R Q. æquatur contento sub mediis V T. vnde sequitur triangulorum P Q R. S T V æquales esse areas, ac per consequens tria exposita triangula eandem prorsus aream habere. Quod erat demonstrandum.

OBSERVATIO D. P. F.

NVm verò inueniri possunt 4. aut etiam plura in infinitum triangula æqualis areæ nihil videtur obstare quo minus quæstio sit possibilis. inquiratur itaque vlterius.

Nos hoc problema construximus imò & data qualibet trianguli areâ infinita triangula eiusdem areæ exhibemus v.g. data areâ 6. trianguli 3. 4. 5. en aliud triangulum eiusdem areæ $\frac{7}{10}$ $\frac{120}{7}$ $\frac{1201}{70}$. *aut si placet eadem denominatio* $\frac{49}{70}$ $\frac{1200}{70}$ $\frac{1201}{70}$.

Perpetua & constans methodus hæc est. Exponatur quodlibet triangulum cuius hypothenusa Z basis B. perpendiculum D. ab eo sic formatur aliud triangulum dissimile eiusdem areæ, nempe formetur abs Z. quadrato & B in D. bis, & planoplana lateribus similia applicentur Z in B. quadratum bis — Z in D. quadratum bis hoc nouum triangulũ habebit aream æqualem areæ præcedentis, ab hoc secundo eâdem methodo formetur tertium, à tertio quartum, à quarto quintum & fient triangula in infinitum dissimilia eiusdem areæ & ne dubites plura tribus dari posse inuentis tribus Diophanti 40. 42. 58. 24. 70. 74. & 15. 112. 113. quartum adiungimus dissimile eiusdem tamen areæ. $\frac{1412881}{1189}$ *hypothe.* $\frac{1412880}{1189}$ *basis.* $\frac{1681}{1189}$ *perpendic.*

Et omnibus in eundem denominatorem ductis fient 4 triangula in integris æqualis areæ quæ sequuntur.

Primum.	47560.	49938.	68962.
Secundum.	28536.	83230.	87986.
Tertium.	17835.	133168.	134357.
Quartum.	1681.	1412880.	1412881.

Eâdemque methodo inuenientur triangula eiusdem areæ in infinitum, & quæstio sequens vltra Diophantæos limites progredietur.

En etiam aliâ methodo triangulum cuius area facit sextuplum quadrati sicut 3. 4. 5.

Nempe 2896804. 7216803. 7776485.

QVÆSTIO IX.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος ἐάν τε προσλάβῃ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἐάν τε λείψῃ ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ζητοῦμεν τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον, ἐάν τε προσλάβῃ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἐάν τε λείψῃ ποιεῖν τετράγωνον. παντὸς δὲ τριγώνου ὀρθογωνίου ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ἐάν τε προσλάβῃ τετράκις τὸ ἐμβαδὸν ἐάν τε λείψῃ ποιεῖ τετράγωνον. οἱ ἄρα τρεῖς ἀριθμοὶ ἔσονται ὀρθογωνίου τριγώνου ὑποτείνουσαι, ὁ δὲ ἐκ τῶν τριῶν συγκείμενος ἔσται τέσσαρα ἐμβαδὰ τριγώνων, ὧν εἰσὶν αἱ ὑποτείνουσαι. ἀπῆκται οὖν μοι ζητῆσαι τρία τρίγωνα ἴσα ἔχοντα ἐμβαδά.

INVENIRE tres numeros, vt vniuscuiusque quadratus, summa trium siue addita, siue detracta, faciat quadratum. Quoniam volumus vt quadratus primi, summa trium siue addita, siue dempta, faciat quadratum. In omni autem triangulo rectangulo, quadratus hypotenusæ, siue adiecto quadruplo areæ, siue detracto, facit quadratũ. Erunt vtique tres numeri, hypotenusæ triangulorum, rectangulorũ at summa trium erit quadruplũ areæ triangulorum, quorum hypotenusæ sunt ipsi numeri. Eò itaque res redit, vt tria triangula inueniantur, quorum eadem sit area.

Id autem iam demonstratum est, & sunt triangula 40. 42. 58. & 24. 70. 74. & 15. 112. 113. Nunc ad propositum ab initio rediens, statuo tres in numeris hypotenusarum triangulorum, & erit primus 58 N. secundus 74 N. tertius 113 N. summam verò trium, pono in quadratis quadrupli areæ. Proinde 3360 Q. æquantur 245 N. & fit 1 N. $\frac{7}{96}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{406}{96}$. secundus $\frac{518}{96}$. tertius $\frac{791}{96}$.

τοῦτο δὲ προδέδεικται, καὶ εἰσὶ τὰ τρίγωνα. μ. μβ. νη. καὶ κδ. ο. οδ. καὶ ιε. ριβ. ριγ. νῦν τάσσω ἐλθὼν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς τοὺς τρεῖς ἐν ἀριθμοῖς, τὰς ὑποτεινούσας τῶν τριγώνων καὶ ἔσται ὁ πρῶτος ςς νη. ὁ δεύτερος ςς οδ. ὁ τρίτος ςς ριγ. οἱ δὲ συγκείμενοι ἐκ τῶν τριῶν ἐν δυνάμεσι τοῦ τετραπλασίονος τοῦ ἐμβαδοῦ. δυνάμεις ἄρα γτξ. ἴσαι ςς^{οῖς} σμε. καὶ γίνεται ὁ ς^{ος} ζ. ϟς^{ων}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος υς ϟς^{ων}. ὁ δὲ δεύτερος φιη ϟς^{ων}. ὁ δὲ τρίτος ψϟα. ϟς^{ων}.

IN QVAESTIONEM IX.

Ex dictis ad præcedentem facilis redditur hæc quæstio. Quod assumitur de quadrato hypotenusæ trianguli rectanguli, qui assumpto vel dempto quadruplo areæ, quadratum facit; iam à nobis demonstratum est ad vigesimam secundam tertij, vbi etiam vsurpatur à Diophanto.

OBSERVATIO D. P. F.

Ex supradictis patet posse nos construere generaliter problema. inuenire quotcumque numeros vt vnius cuiusque quadratus summa omnium siue additâ siue detractâ quadratum faciat. Hanc quæstionem forte Bachetus ignorauit. Diophantum quippè promouisset vt suprà 31. quæstione lib.4. & alijs in locis si quæstionis huius solutionem detexisset.

QVÆSTIO X.

Datis tribus numeris quadratis, possunt inueniri tres numeri, quorum bini quadratos istos producant alter in alterum ductus. Nam si sint dati quadrati 4. 9. & 16. & ponamus vnum quæsitorum 1 N. erit reliquorum duorum alter $\frac{4}{1N}$. alter $\frac{9}{1N}$. Restat vt productus ex secundo in tertium faciat 16. atqui productus ex secundo in tertiũ est $\frac{36}{1Q}$. Hoc ergo æquatur 16. & fit 1 N. 1 $\frac{1}{2}$. Ad positiones. Erit primus 1 $\frac{1}{2}$. secundus 2 $\frac{2}{3}$. tertius 6. sed vt hoc etiam methodo exponatur. Inueni $\frac{36}{1Q}$. æqualia 16. & omnia per 1 Q. multiplicando fiunt 16 Q. æquales 36. & fit 1 Q. $\frac{36}{16}$. cuius latus $\frac{6}{4}$. atqui 6. fit ex mutuo ductu laterum ipsorum 4. & 9. hoc est primi & secundi. Denominator verò 4. est latus alterius quadrati 16. Quamobrem cùm iussus fueris tres numeros inuenire, quorum bini mutuo ductu datos quadratos producant, vt 4. 9. 16. sume productum ex

Τριῶν τετραγώνων δοθέντων, δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ποιῇ τοὺς δοθέντας τετραγώνους ἀριθμούς. ἐὰν γὰρ ὦσιν οἱ δοθέντες τετράγωνοι, ὅ τε δ. καὶ ὁ θ. καὶ ὁ ις. καὶ τάξωμεν ἕνα τῶν ζητουμένων ς^{ον} α. ἔσονται τὸ λοιπὸν δύο, ὁ μὲν δ ς^{οῦ}. ^{ων}. ὁ δὲ θ ς^{οῦ}. ^{ων}. καὶ λοιπόν ἐστι τὸ ὑπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ τοῦ τρίτου, ποιεῖν μ^{ο} ις. ἀλλὰ ὁ ὑπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ τοῦ τρίτου ἐστὶ λς δυ. ^{ων}. ἴσος μ^{ο} ις. καὶ γίνεται ὁ ς^{ος} μ^{ο} α. α ς^{ων}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος α. α ς^{ων}. ὁ δὲ δεύτερος β. α ς^{ων}. α. ὁ τρίτος ς. ἵνα δὲ καὶ ἐν μεθόδῳ κείμενον ᾖ. εὗρον λς δυ. ^{ων}. ἴσα μονάσι ις. καὶ πάντα ἐπὶ δύναμιν μίαν γίνεται δυνάμεις ις. ἴσαι μ^{ο} λς. καὶ γίνεται ἡ δύναμις λς ις^{ων}. ἡ πλευρὰ ὁ ς δ^{ων}. ἀλλὰ τὰ ς. τὰ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ δ καὶ τοῦ θ. τουτέστι τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου τὸ δὲ μόριον τουτέστι τὰ δ. πλευρά ἐστι τοῦ ις τετραγώνου. ὅταν οὖν σοι προβληθῇ εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ποιεῖ τοὺς δοθέντας τετραγώνους. οἷον τὸν δ. καὶ τὸν θ. καὶ τὸν ις. ποιεῖ τὸ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ δ. καὶ τοῦ θ. γίνεται ς. μερίσον ταῦτα παρὰ τὴν πλευρὰν τοῦ ις τετραγώνου, γίνεται ὁ ς^{ος} ς δ^{ων}. ἰων

πάλιν τὸν δ. τετράγωνον παρὰ τὸν ς δ. γίνονται μ° ις ς. καὶ πάλιν τὸν θ. τετράγωνον. παρὰ τὸν ς δ. γίνονται μ° ς. ἔσται ἄρα ὁ πρῶτος ς δ. ὁ δεύτερος ις ς. ὁ τρίτος μ° ς.

lateribus ipſorum 4.& 9.fit 6. hunc diuide per latus alterius quadratus 16. fit 1 N. $\frac{6}{4}$. Rurſus diuide quadratum 4. per $\frac{6}{4}$. fiunt $\frac{16}{6}$. & rurſum diuide quadratum 9.per $\frac{6}{4}$. fiunt 6. erit igitur primus $\frac{6}{4}$.ſecundus $\frac{16}{6}$.tertius 6.

IN QVAESTIONEM X.

OPERATIO Diophanti facilis eſt, & Canon quem tradit ab ea depromitur.

Poſſet tamen breuius & facilius explicari Canon iſte, hoc pacto.

Numeros quos producunt dati numeri, dum inter ſe bini & bini multiplicantur, diuide per reliquum, quotientum latera quæſitos exhibent numeros.

Vt in exemplo Diophanti productum ex 4. in 9. putà 36. Diuide per reliquum 16. fiet $\frac{36}{16}$. cuius latus $1\frac{1}{2}$ eſt vnus quæſitorum. Rurſus productum ex 4. in 9. putà 64. diuide per reliquum 9. fit $\frac{64}{9}$. cuius latus $2\frac{2}{3}$. eſt ſecundus quæſitorum. Denique productum ex 9. in 16. putà 144. diuide per reliquum 4. fit 36. cuius latus, eſt tertius quæſitorum.

Porrò vniuerſalius etiam proponi poteſt ipſa quæſtio in hunc modum.

Datis tribus numeris, inuenire tres numeros, quorum bini inuicem ducti, datos producant numeros. Oportet autem ſolidum ſub datis numeris contentum eſſe quadratum.

Sint dati 6. & 12. Ponatur primus 1 N. ſecundus $\frac{6}{1N}$. tertius $\frac{8}{1N}$. Reſtat vt ex ſecundo in tertium fiat 12. fit autem $\frac{48}{1Q}$ hoc ergo æquatur 12. & fit 1 N. 2. ſunt igitur quæſiti numeri 2. 3. 4.

QVÆSTIO XI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν, ἐάν τε προσλάβῃ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἐάν τε λείψῃ ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ζητοῦμεν πρότερον τρία τρίγωνα ἴσα ἔχοντα τὰ ἐμβαδὰ καὶ εὑρόντες λαμβάνομεν τοὺς ἀπὸ τῶν ὑποτεινουσῶν τετραγώνους. ἔστι δὲ ὁ μὲν γτξδ. ὁ δὲ ευος. ὁ δὲ α. βψξθ. καὶ ἔχοντες τούτους, εὑρίσκομεν ὡς προγέγραπται τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ποιῇ τοὺς δοθέντας τετραγώνους. ἔστω δὲ τοὺς κειμένους. τούτους δὲ ἐξεθέμεθα, διὰ τὸ ἕκαστον τῶν τετραγώνων ἐάν τε προσλάβῃ μονάδας γτξ. ἐάν τε λείψῃ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' αἱ γτξ. μονάδες ὁ τετράκις ἐστὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἑκάστου τοῦ τριγώνου. καὶ διὰ τοῦτο τίθημι τάσσω ἐν ςς. ὃν μὲν ἀριθμῶν δσϟβ ριγ. ὃν δὲ καὶ δ.., γψλγ. ὃν δὲ ζ. αρπζ. καὶ ὁ ὑπὸ δύο αὐτῶν ποιεῖ τοὺς ἐπάνω τετραγώνους. λοιπὸν δεῖ τοὺς γ. ἰσῶσαι δυνάμεσι γτξ. καὶ πάντα ἴσα ἐν μορίον γένηται βάλλομεν ι. εψξς. καὶ ὁ ς ςς υς. ηςι. μορίου τοῦ αὐτοῦ. ὁ τρίτος ςς ψβ. ευλα. μορίου τοῦ αὐτοῦ. καὶ γίνονται οἱ τρεῖς ςς απξα. εσια. μορίου ι. εψξς. ἴσοις δυνάμεσι γτξ. καὶ πάντα εἰς ι. εψξς. εσιπ. ἴσος δυ α. ηψμζ. δφμξ. καὶ γίνεται ὁ ς μ° απξα. ετιδ. μορίου β μοριάδος π. καὶ α. ηψμζ. μ° δψξ. μορίου κοινοῦ ληφθέντος πρὸς, ὅπερ ἐστὶ ἀσύνθετον. πρώτοι γὰρ ἥμισυ ἄλλη εἰσὶν ςς. ἔσται ὁ ς μ° απξα. ετιδ. μορίου α. ηψμζ. μ. φξε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος.*

INVENIRE tres numeros, vt qui fit ex binorum mutuo ductu, omnium ſumma ſiue detracta quadratum faciat. Rurſum primò quærantur tria triangula æquales areas habentia. Quibus inuentis ſumemus quadratos hypotenuſarum. Eſt autem primus 3364. ſecundus 5476. tertius 12769. Hos nacti, inueniemus, vt iam traditum eſt, tres numeros, vt producti ex binorum mutuo ductu faciant datos quadratos, qui ſint ij quos expoſuimus autem iſtos, quia quiuis ipſorum ſiue addas ei, ſiue adimas 3360. facit quadratum. At 3360. eſt quadruplum areæ ſingulorum triangulorum. Ea propter nunc in numeris pono primum $\frac{4292}{113}$. N. ſecundum [illegible]. N. tertium [illegible] N. quorum bini inuicem ducti faciunt ſupradictos quadratos. Reſtat vt hi tres æquentur 3360 Q. & omnia vt vnius fiant denominationis, reducantur ad 121249. erit primus $\frac{4605316}{121249}$. N. ſecundus $\frac{17480720}{121249}$. N. tertius $\frac{10738770}{121249}$. N. & fit trium ſumma $\frac{32824806}{121249}$ N. æqualis 3360 Q. & omnia in 121249. fiunt 32824806. N. æquales 407396640 Q. & fit 1 N. $\frac{32824806}{407396640}$. Ad poſines, erit primus.

IN QVAESTIONEM XI.

HÆC quæstio, vt bene monet Xilander, à duobus præcedentibus pendet omnino, & operatio Diophanti plana est, sed tota minutiarum tractatio in textu Græco scatet mendis. Quamobrem malui in mea versione rem subiicere per veros numeros modo nobis consueto, quàm in verbis & in numeris Diophantæis omni ex parte restituendis diutius animum torquere.

Porro quod deest in Diophanto (ipsa nimirum quæstionis solutio) sic à nobis supplebitur sit 1 N. [illegible]. seu in minimis [illegible]. Ad positiones erit primus [illegible]. secundus [illegible] tertius denique [illegible]. Vt autem proposito satisfaciant huiusmodi numeri, tu si vacat experire, nos ad ea quæ maioris sunt momenti interim progrediemur.

QVAESTIO XII.

VNITATEM diuidere in duas partes, & vtrique segmento datum numerum adjicere, & facere quadratum. Oportet autem datum neque imparem esse, * neque duplum eius N. vnitas maiorem habere quadrantem quàm est numerus, quo ipsum metitur primus numerus. * Imperatum sit vt vtrique portioni adiungamus 6. itáque efficiamus quadratum. Quia ergo volumus vnitatem secare, & vtrique segmento addere 6. & facere quadratum: summa duorum qui sic fient quadratorum erit 13. Oportet igirur diuidere 13. in duos quadratos, vt vterque ipsorum maior sit senario. Ergo si 13. diuidam in duos quadratos, quorum interuallum vnitate sit minus, soluo quæstionem. Sumo semissem de 13. qui est $6\frac{1}{2}$. & quæro quam partem possim ad $6\frac{1}{2}$. adiungere, ita vt quadratum conficiam. Multiplico per 4. & quæro postmodum partem quadratam, quæ si ad 26. adijciatur faciat quadratum. sit pars apponenda $\frac{1}{1Q}$. fiunt 26. + $\frac{1}{1Q}$. æqualia quadrato, & si omnia per 1 Q. multiplicentur, fiunt 26 Q. + 1. æqualia quadrato, esto latus eius 5 N. + 1. & fit 1 N. 10. Quadratus ergo 100. Pars quadratica $\frac{1}{100}$. Proinde pars addenda ad 26. est $\frac{1}{100}$. Quare pars addenda ad $6\frac{1}{2}$. est $\frac{1}{400}$. & facit quadratum à latere $\frac{51}{20}$. Oportet igitur ita diuidere 13. in duos quadratos, vt vtriusq; latus proximè accedat ad $\frac{51}{20}$. Et quæro quo numero ternarius multatus, & quo binarius auctus faciat supradictum numerum $\frac{51}{20}$. Statuo itáque duos quadratos, alterum à latere 11 N. + 2. alterum à latere 3 − 9 N. & fit summa quadratorum ab his ortorum. 202 Q. +

ΤΗΝ μονάδα διελεῖν εἰς δύο μόρια, καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τετράγωνον. δεῖ δὴ τὸν διδόμενον μήτε περισσὸν εἶναι, * μήτε ὁ διπλασίων αὐτοῦ ἢ μο α. μείζονα ἔχῃ μέρος δ. ἢ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ α ου. ς ου. * ἐπιτετάχθω δὴ ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων προσθεῖναι μο ς. καὶ ποιεῖν τετράγωνον. ἐπεὶ οὖν θέλομεν τὴν μονάδα τεμεῖν, καὶ ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων προσθεῖναι μονάδας ς καὶ ποιεῖν τετράγωνον. τὸ ἄρα σύνθεμα τῶν τετραγώνων ἐστὶ μο ιγ. δεήσει ἄρα τὸν ιγ. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους, ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μείζων ᾖ μο ς. ἐὰν οὖν τὸν ιγ. διέλω εἰς δύο τετραγώνους, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἐλάσσων ἐστὶ μονάδος α. λύσω τὸ ζητούμενον. λαμβάνω τοῦ ιγ. τὸ ἥμισυ, γίνεται ς. α ς^. καὶ ζητῶ τί μόριον προσθεῖναι μονάσιν ς. α ς^. καὶ ποιεῖν τετράγωνον, καὶ πάντα τετράκις. ζητῶ ἄρα μόριον τετραγωνικὸν προσθεῖναι ταῖς κς. μονάσι καὶ ποιεῖν τετράγωνον. ἔστω τὸ προστιθέμενον μόριον α δυ. ^. καὶ γίνονται μο κς. α δυ. ^. ἴσα τετραγώνῳ, καὶ πάντα ἐπὶ δύναμιν. γίνονται δυ κς. μο α. ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς ε. μο α. καὶ γίνεται ὁ ς μο ι. δύναμις γὰρ μο ρ. τὸ δυναμοστὸν μο α ρ^. ἔσται ἄρα τὸ ταῖς κς. προστιθέμενον α. ρ^. τὸ ἄρα ταῖς μονάσιν ς. α ς^. γίνεται α υ^. καὶ ποιεῖ τετράγωνον τὸν ἀπὸ πλευρᾶς να κ^ δεῖ οὖν τὸν ιγ. διαιρούμενον εἰς δύο τετραγώνους κατασκευάζειν τὴν ἑκάστου πλευρὰν ὡς ἔγγιστα να κ^. καὶ ζητῶ τίς ἡ τριὰς λείψασα προσλαβοῦσα δυὰς ποιεῖ τὸν αὐτὸν, τουτέστι να κ^. τάσσω οὖν δύο τετραγώνους ἕνα μὲν ἀπὸ ςς ια. μο β. τὸν δὲ ἕτερον ἀπὸ μο γ. λείψει ςς θ. καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων. δυνάμεις σβ. μο ιγ. λείψει ςς ι. ἴσους μο ιγ. καὶ γίνεται

ὁ ς° ε̅ ρα̅. ἔσται ἄρα ἑνὸς τῶν τετραγώνων ἡ πλευρὰ σνζ ρα. ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου σνη ρα. καὶ ἀπὸ ἑκατέρου τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, ἄρα μὲν μο ϛ. ἔσται τὸ μὲν ἓν τμῆμα τῆς μονάδος ͵ετνη ͵αϲα. τὸ δὲ ἕτερον ͵δωμγ ͵αϲα. καὶ δῆλον ὡς ἑκάτερος μετὰ μονάδων ϛ. ποιεῖ τετράγωνον.

13 – 10 N. æqualis 13. & fit 1 N. $\frac{5}{101}$. Erit igitur alterius quadrati latus $\frac{257}{101}$. alterius verò $\frac{258}{101}$ & ſi ab vtroque quadratorum inde factorum auferamus 6; erit alterum ſegmentum vnitatis $\frac{5358}{10201}$. alterum $\frac{4843}{10201}$. & liquet horum vtrumque adſcito 6. facere quadratum.

IN QVAESTIONEM XII.

PVLCHERRIMVM problema, ſed miſerrimè affectum, ita vt medicantis manum vix admittat, & cùm in eo enodando multùm deſudauerit Xilander, id tamen quod potiſſimum eſt prætermiſit, accuratam ſcilicet appoſitæ conditionis explicationem. Quàm enim ſit neceſſaria conditionis huius cognitio, manifeſtum eſt ex eo quod in hypotheſi Diophanti tota vis æquationis conſiſtit in diuidendo numero 13. in duos quadratos, quorum quilibet ſit maior quàm 6. minor quàm 7. Nullibi autem traditus eſt modus diuidendi numerum aliquem in duos quadratos, niſi numerus ille ſit quadratus, vel ſuaptè natura ex duobus quadratis compoſitus. Itaque cùm euidens ſit, ponendo latera quadratorum 11. N. + 2. & 3. – 9 N. æquationem ſuccedere non poſſe niſi quadrati ipſorum 2. & 3. ſimul efficiant 13. Neceſſe eſt vtique 13. componi ex duobus quadratis. Atqui 13. eſt duplum dati numeri 6. vnitate auctum. Certum ergo eſt conditionem à Diophanto allatam requirere debere, vt duplum dati numeri vnitate auctum, ſit quadratus numerus, vel compoſitus ex duobus quadratis. Quod etiam validè confirmatur verbis illis. *Oportet autem datum neque imparem eſſe.* Nam ſi datus numerus ſit impar, nullo modo duplum eius vnitate auctum poteſt eſſe quadratus, vel compoſitus ex duobus quadratis, vt facilè eſt demonſtrare. Sit enim numerus impar A B. cuius duplum eſto

A . . . B . . . C D

A C. cui addita vnitate C D. fiat A D. dico primo A D. non eſſe quadratum. Si enim ponatur quadratus; cùm numero pari A C. addita vnitate C D, fiat A D eſt
21. 1. poriſ. A D impar. Ergo à quadrato impari A D, detracta vnitate C D[1] reliquus A C eſt pariter par.[2] Qua-
8. 1. poriſ. mobrem illius dimidium A B eſt numerus par, contrà hypotheſim. Rurſus dico numerum A D non componi ex duobus quadratis. Etenim cùm A D oſtenſus ſit, impar, neceſſe eſt è duobus qua-
20. & 21. 1. poriſm. dratis ex quibus componi dicitur, alterum parum eſſe, alterum imparem.[3] At omnis quadratus par, eſt pariter par. Et ab omni quadrato impari auferendo vnitatem relinquitur pariter par.
16. 1. poriſ. Igitur à toto A D ablata vnitate, reliquus A C componetur ex duobus pariter partibus,[4] ac proin-
8. 1. poriſm. de A C. pariter par eſt.[5] Quamobrem illius dimidium A B, par, eſt contrà hypotheſim.

Reliqua verò verba. *Neque duplum eius*, &c. adeo vitiata ſunt, vt nullam commodè recipere poſſint explicationem. Non dubito quidem Diophantum reſpexiſſe ad aliquam numerorum non vulgarem proprietatem, qua definitur quis numerus par deligendus ſit, vt duplum eius vnitate auctum ſit quadratus numerus, vel compoſitus ex duobus quadratis. Sed quid ſibi velit in tanta verborum caligine diuinare non poſſunt. Id oneris relinquam illi qui in codicem aliquem emendatiorem inciderit. Sufficiat nobis appoſitiſſimam attuliſſe conditionem, cum qua neceſſe eſt conditionem Diophanti coincidere ſi rectè præſcribatur. Sanè quod ait Xilander verba illa corrupta, videri velle, debere eum qui datur eſſe duplum numeri primi, id vtique futile eſt, & nulli fundamento nixum, quodque ipſa ſtatim experientia refelli poteſt, nam ſi datus ſit 10. is eſt duplus numeri primi 5. & tamen quæſtioni ſoluendæ minimè reperitur idoneus, nam oporteret diuidere in duos quadratos numerum 21. Quod quidem impoſſibile eſt, vt reor, cùm is neque quadratus ſit, neque ſuapte natura compoſitus ex duobus quadratis.

OBSERVATIO D. P. F.

NVmerus 21. non poteſt diuidi in duos quadratos in fractis. Hoc autem facillime demonſtrare poſſumus, & generalius omnis numerus cuius triens non habet trientem non poteſt diuidi in duos quadratos neque in integris neque in fractis.

Aliquando mihi venit in mentem Diophantum voluiſſe duplum dati numeri paris vnitate auctum eſſe numerum primum, quandoquidem omnes fere huiuſmodi numeri componuntur ex duobus quadratis, quales ſunt 5. 13. 17. 29. 41. aliique primi numeri qui ſublata vnitate relinquunt numerum pariter parem. Veruntamen neque hæc explicatio ſuſtineri poteſt. Nam primum hac ratione per huiuſmodi conditionem excluderentur omnes numeri, quorum duplum vnitate auctum eſt quadratus numerus, quos tamen aptiſſimos eſſe ſoluendæ quæſtioni patet, quia quilibet quadratus diuidi poteſt in duos quadratos per octauam ſecundi; ſed & infrà exemplo

exemplo id comprobabimus. Deinde excluderentur etiam multi numeri, quorum duplum vnitate auctum componitur ex duobus quadratis, quales sunt 22. 58. 62. & alij innumerabiles. Nam dupli horum vnitate aucti sunt 45. 117. 125. quorum nullus est primus numerus, cùm quilibet multos habeat metientes; vnusquisque tamen è duobus quadratis conflatur, primus scilicet ex quadratis 36. & 9. secundus ex quadratis 81. & 36. tertius ex quadratis 100. & 25. Itaque satius erit conditionem à nobis allatam amplecti, donec aliquis ex emendatiore codice restituat Diophantum. Solùm hoc moneo in codice Vaticano, hæc verba sic haberi. μήτε ὁ διπλασίων αὐτοῦ ἀριθμὸν μονάδα α. μείζονα ἔχῃ μέρος τέταρτον, ἢ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ.

OBSERVATIO D. P. F.

Vera limitatio hac est, generalis nempe & omnes numeros inutiles excludens. Oportet datum numerum non esse imparem, neque duplum eius vnitate auctum per maximum quadratum ex quo mensuratur diuisum diuidi à quouis numero primo vnitate minori quâ multiplex quaternarij.

Porro quoniam operatio Diophanti subtilis est, & non vulgaris artificij, placet eam explicare, quoad potero breuiter & dilucidè. Primum itaque cùm 13. diuidendus sit in duos quadratos, quorum vterque maior sit senario, rectè quæritur pars quadrati quæ ad $6\frac{1}{2}$ addita faciat quadratum, sic enim diuidendo postmodum 13. in duos quadratos, quorum quilibet proximè accedat ad inuentum quadratum, satisfactum erit proposito, nam quilibet illorum non multùm distabit à $6\frac{1}{2}$. Reducit autem omnia ad integros more suo Diophantus, multiplicando $6\frac{1}{2}$ per 4. vnde fit 26. Nam inuenta parte quadratica quæ ad 26. addita quadratum faciat, illius vtique quarta pars addita ad $6\frac{1}{2}$. faciet quadratum. Ponitur ergo pars huiusmodi $\frac{1}{1 Q.}$ quia scilicet pars quadratica fit diuidendo vnitatem per aliquem quadratum; vnde sequitur $26 + \frac{1}{1 Q.}$ æquari quadrato; vt autem rursus ad integros fiat reductio, ducuntur omnia in 1 Q. & fit 26 Q. + 1. æquandus quadrato; cuius latus ita fingendum est vt valor Numeri sit maior vnitate, si enim sit vnitate minor, patet $\frac{1}{1 Q.}$ fore plerũque maiorem vnitate, ac proinde non fore propriè partem quadraticam, vnde sequitur inuentum quadratum, tota vnitate, vel etiam maiore interuallo superaturum numerũ $6\frac{1}{2}$. Verbi gratia si fingatur latus supradicti quadrati 1 N. + 1. erit quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. æqualis ab Q. + 1. & fiet 1 N. $\frac{2}{25}$. Quare $\frac{1}{1 Q.}$ erit $\frac{625}{4}$ cuius quadrans $\frac{625}{16}$ additus ad $6\frac{1}{2}$ quadratum facit $\frac{729}{16}$. qui excedit ipsum $6\frac{1}{2}$ plus quàm 39. vnitatibus, ac proinde quæstioni soluendæ prorsus est inutilis. Igitur vt arte certa, non fortuitò fingatur huiusmodi latus, ita vt valor Numeri superet vnitatem, cùm fingi possit huiusmodi latus vel 1 + tot numeris, quorum quadratus sit minor quàm 26. vel 1 − tot numeris. quorum quadratus sit maior quàm 26. Primo modo fiet valor Numeri, auferendo quendam quadratum à 26. & per residuum diuidendo duplũ lateris eiusdem quadrati. Vt ergo quotiens sit maior vnitate reperiẽdus est quadratus quo detracto à 26. relinquatur numerus minor duplo lateris eiusdem quadrati, ponatur is 1 Q. ergo 2 N. maior est quàm 26 − 1 Q. & tandem 1 Q. + 2 N. maior est quàm 26. Qua æquatione resoluta, fit 1 N. non minor quàm $4\frac{1}{5}$. Fingetur ergo latus quadrati 1 + tot numeris qui excedant $4\frac{1}{5}$ dum eorum quadratus sit minor quàm 26. sic Diophantus posuit hoc latus 1 + 5 N. & poni posset 1 + $4\frac{1}{2}$ N. vel 1 + $4\frac{2}{3}$ N. & sic aliis infinitis modis. Secundo verò modo fingendo latus quadrati, fiet valor Numeri, à quodam quadrato auferendo 26. & per residuum diuidendo duplum lateris. Quare vt fiat valor Numeri maior vnitate, posito illo quadrato 1 Q. erit 2 N. maior quàm 1 Q. − 26. & tandem 1 Q. maior erit quàm 2 N. + 26. Qua æquatione resoluta fit 1 N. minor quàm $6\frac{1}{5}$. fingetur ergo latus 1 − aliquot Numeris infrà $6\frac{1}{5}$ dum eorum quadtatus excedat 26. Verbi gratia fingatur 1 − 6 N. fiet 1 N. $\frac{6}{5}$ & pars quadratica ad $6\frac{1}{2}$ adiicienda erit $\frac{25}{144}$. fietque quadratus $\frac{961}{144}$. à latere $\frac{31}{12}$. Vnde collige partem quadraticam hîc non sumi strictè pro fractione quadrata cuius numerator sit 1. Sed tantum pro fractione quadrata quæ minor sit vnitate, idest cuius numerator sit minor denominatore.

Inuenta porro parte quadratica $\frac{1}{400}$. quæ ad $6\frac{1}{2}$ addita facit quadratum $\frac{2601}{400}$ cuius latus $\frac{51}{20}$ rectè infert Diophantus numerum 13. ita diuidendum esse in duos quadratos, vt latus vtriusque proximè accedat ad $\frac{51}{20}$. sic enim vterque quadratus proximè accedet ad $6\frac{1}{2}$. Vt autem 13. diuidatur in duos quadratos per operationem decimæ secundi, debent sumi 2. & 3. latera quadratorum, ex quibus 13. suaptè natura componitur, & alteri addi oportet certum numerum Numerorum, ab altero detrahi. Vt ergo vtriusque quadrati latus adæquetur numero $\frac{51}{20}$. necesse est ad 2. addi $\frac{11}{20}$. & à 3. auferri $\frac{9}{20}$. Quare si 1 N. supponatur esse $\frac{1}{20}$. erit vtique 11. N. + 2. æqualis $\frac{51}{20}$. Itemque 3 − 9 N. sic autem quadrati horum laterum æquari deberent $13\frac{1}{200}$. Quare si æquentur ipsi 13. fiet vtique 1 N. paulò minor quàm $\frac{1}{20}$. ac proinde 11 N. & 9 N. paulò minus erunt quàm $\frac{11}{20}$ & $\frac{9}{20}$. vnde sequetur vtrumque latus non multùm distare posse à $\frac{51}{20}$. ac per consequens vtrumque quadratum fore proximum numero $6\frac{1}{2}$ atque adeo proposito ritè satisfacturum. Hinc satis colligitur, quod suprà diximus, in conditionis

Ff

explicatione nimirum, fuisse necessarium numerum 13. componi ex duobus quadratis. Qua de causa res etiam optimè succedet, si datus numerus talis sit, vt eius duplum vnitate auctum sit quadratus numerus, quandoquidem omnis quadratus in duos quadratos potest diuidi per octauam secundi.

Hoc autem vt manifestius fiat, & simul artificium Diophanti magis illustretur; talis quæstio proponatur. *Vnitatem secare in duas partes, vt vtrique addendo 4. fiat quadratus.* Patet numerum 9. diuidendum esse in duos quadratos, quorum interuallum sit vnitate minus, hoc est tales vt vterque superet 4. Quare sumendo semissem ipsius 9. puta $4\frac{1}{2}$. quæro quæ pars quadrati huic addita faciat quadratum, & ducendo in 4. fit 18. Positâque parte quadrati $\frac{1}{1Q}$. fit $18 + \frac{1}{1Q}$. æquandus quadrato, & omnia ducendo in Q. fit 18 Q. + 1. æquandus quadrato, esto latus 4 N. + 1. fiet 1 N. 4. Igitur $\frac{1}{1Q}$. est $\frac{1}{16}$. cuius quadrans puta $\frac{1}{64}$. additus ad $4\frac{1}{2}$ facit quadratum $\frac{289}{64}$. cuius latus $\frac{17}{8}$. Quare 9. ita diuidendus est in duos quadratos, vt vtriusque latus adæquetur ipsi $\frac{17}{8}$. Diuiditur autem 9. in duos quadratos per octauam secundi, putà in $\frac{81}{25}$. & $\frac{144}{25}$ quorum latera $\frac{9}{5}$ & $\frac{12}{5}$. Video ergo quid addendum sit ad $\frac{9}{5}$. & quid detrahendum à $\frac{12}{5}$. vt fiant $\frac{17}{8}$. & inuenio hinc $\frac{13}{40}$ inde $\frac{11}{40}$. Quare fingo quadratorum latera $\frac{9}{5} + 13$ N. & $\frac{12}{5} - 11$ N. fitque summa quadratorum 290 Q. + 9 − 6 N. æqualis 9. vnde fit 1 N. $\frac{3}{145}$. suntque latera quadratorum $\frac{60}{29}$. $\frac{63}{29}$. ipsi quadrati $\frac{3600}{841}$ & $\frac{3969}{841}$ vnde si auferas sigillatim 4. supersunt quæsitæ partes vnitatis $\frac{236}{841}$ & $\frac{605}{841}$.

Possem etiam in huiusmodi quæstione artificium imitari decimæ tertiæ sequentis, hoc pacto. Ponatur alter quadratorum 1 Q. erit alter 9 − 1 Q. qui æquari debet quadrato, ita tamen vt 1 Q. inueniatur maior quàm 4. minor quàm 5. Sumantur ergo duo quadrati inter 4. & 5. quales sunt $\frac{441}{100}$ & $\frac{484}{100}$. quorum latera $\frac{21}{10}$ & $\frac{22}{10}$. Quare curandum vt valor numeri cadat inter $\frac{21}{10}$ & $\frac{22}{10}$. fit autem valor Numeri, diuidendo sextuplum alicuius numeri per quadratum ipsius vnitate auctum. Oportet igitur $\frac{6 N}{1 Q + 1}$ maiorem esse quàm $\frac{21}{10}$ minorem quàm $\frac{22}{10}$. & tandem 60 N. maiores sunt quàm 21 Q. + 21. minores quàm 22 Q. + 22. Et vtraque æquatione per approximationem resoluta, fit 1 N. maior quàm $\frac{51}{22}$. minor quàm $\frac{53}{22}$. ponatur ergo $2\frac{1}{3}$. & quadrati 9 − 1 Q. latus statuatur $3 - 2\frac{1}{3}$ N. fiet 1 N. $\frac{63}{29}$. & erunt quadratorum latera $\frac{63}{29}$. & $\frac{60}{29}$. ipsi quadrati $\frac{3969}{841}$ & $\frac{3600}{841}$ à quibus auferendo sigillatim 4. remanent quæsitæ partes vnitatis $\frac{605}{841}$ & $\frac{236}{841}$. vt suprà.

Animaduersione quoque dignum est, eodem prorsus artificio Numerum quemlibet ita diuidi posse in duas partes, vt vtrique adiiciendo eundem datum numerum, fiat quadratus, dummodo duplum addititij numeri adsumens numerum diuidendum, faciat quadratum, vel numerum è duobus quadratis compositum. Verbi gratia. Sit diuidendus 2. in duas partes, vt vtrique adiiciendo 4. fiat quadratus. Patet numerum 10. diuidendum esse in duos quadratos, quorum quilibet sit maior quàm 4. sumo ergo semissem de 10. puta 5. & quæro quæ pars quadrati huic addita faciat quadratum, ponatur $\frac{1}{1Q}$ ergo $5 + \frac{1}{1Q}$ æquatur quadrato, & omnia per 1 Q. multiplicando, fit 5 Q. + 1. æquandus quadrato. Esto latus illius 1 + 2 N. fit 1 N. 4. est ergo pars quadrati $\frac{1}{16}$ qua addita ad 5. fit quadratus $\frac{81}{16}$ cuius latus $\frac{9}{4}$. Diuidendus ergo est 10. in duos quadratos, quorum latera proximè accedunt ad $\frac{9}{4}$. Diuiditur autem 10. suaptè natura in quadratos, quorum latera sunt 1. & 3. Quare imitando artificium Diophanti fingemus latera quæsitorum quadratorum 1 + 5 N. & 3 − 3 N. fiet summa quadratorum 10 + 34 Q. − 8 N. æqualis 10. & fiet 1 N. $\frac{4}{17}$. Sunt igitur quadratorum latera $\frac{37}{17}$. & $\frac{39}{17}$. ipsi quadrati $\frac{1369}{289}$. & $\frac{1521}{289}$. à quibus si auferas 4. sigillatim, restant quæsitæ binarij partes $\frac{213}{289}$ & $\frac{365}{289}$.

Denique, non dissimulandum eadem arte solui quæstionem quam tradidit Vieta Zetetico 5. lib. quarti nimirum.

Datum numerum ex duobus quadratis compositum, rursus diuidere in duos quadratos, quorum alter consistat intra limites præstitutos.

Sit diuidendus 5. in duos quadratos, quorum alter sit maior quàm 1. minor quàm 2. sumo medium in arithmetica medietate inter 1. & 2. puta $1\frac{1}{2}$. & quæro quæ pars quadrati illi addita, quadratum faciat, inuenietur modo suprà tradito $\frac{1}{16}$. fitque quadratus $\frac{25}{16}$. cuius latus $\frac{5}{4}$. Ita ergo fingendum erit latus præfiniti quadrati vt accedat ad $\frac{5}{4}$. Quoniam verò volumus ita diuidere 5. in duos quadratos, vt alter proximà accedat ad $1\frac{1}{2}$. & detracto $1\frac{1}{2}$. ab ipso 5. superest $3\frac{1}{2}$. euidens est alterum quadratum accedere debere ad $3\frac{1}{2}$. Rursus ergo quæro quæ pars quadrati ad $3\frac{1}{2}$. addita, faciat quadratum, ea inuenietur modo tradito $\frac{1}{64}$. fitque quadratus $\frac{225}{64}$. à latere $\frac{15}{8}$. Itaque diuidendus est 5. in duos quadratos ita vt huius latus adæquetur $\frac{5}{4}$. seu $\frac{10}{8}$. alterius verò $\frac{15}{8}$. Sunt autem latera quadratorum ex quibus 5. suaptè natura componitur 1. & 2. Quare cùm vnitati desint $\frac{7}{8}$. quominus æquet $\frac{15}{8}$. & binarius superest $\frac{10}{8}$. interuallo $\frac{6}{8}$. fingo quadratorum latera 1 + 7 N. & 2 − 6 N. estque quadratorum summa 5 + 85 Q. − 10 N. æqualis 5. & fit 1 N. $\frac{2}{17}$. suntque latera quadratorum $\frac{31}{17}$. & $\frac{22}{17}$. ipsi quadrati $\frac{961}{289}$. & $\frac{484}{289}$. quorum summa 5. & alter puta $\frac{484}{289}$. maior est vnitate, minor binario vt postulabatur.

Rursus diuidendus esto 20. in duos quadratos quorum alter maior sit quàm 6. minor quàm 10. sumo medium arithmeticè inter 6. & 10. puta 8. & quæro partem quadrati quæ illi addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{36}$. fitque quadratus $\frac{289}{36}$. à latere $\frac{17}{6}$. Quia verò detrahendo 8. ab ipso 20. superest 12. Quæro rursus partem quadrati quæ ad 12. addita, faciat quadratum, ea est $\frac{1}{4}$. fitque quadratus $\frac{49}{4}$ cuius latus $\frac{7}{2}$. Itaque diuidendus est 20. in duos quadratos, ita vt vnius latus accedat ad $\frac{17}{6}$. alterius verò latus adæquetur $\frac{7}{2}$. seu $\frac{21}{6}$. Componitur autem 20. ex duobus quadratis suaptè natura, quorum latera

2. & 4. Quare cùm ipsi 2. desint $\frac{9}{6}$. quominus æquet $\frac{21}{6}$ & ipse 4. superet $\frac{17}{6}$. interuallo $\frac{7}{6}$. fingo quadratorum latera 2. + 9. N. & 4 — 7 N. estque summa quadratorum 20 + 130 Q. — 20 N. æqualis 20. & fit 1 N. $\frac{2}{13}$. sunt igitur quadratorum latera $\frac{44}{13}$. & $\frac{38}{13}$. ipsi quadrati $\frac{1936}{169}$. & $\frac{1444}{169}$. quorum summa 20. & alter, puta $\frac{1444}{169}$. maior est quàm $\frac{1014}{169}$. seu quàm 6. & minor quàm $\frac{1690}{169}$. seu quàm 10. vt postulabatur. Soluit hoc problema Franciscus Vieta loco citato, alia methodo, sibique peculiari: sed cum ea, non sit ista melior, immò sit longè difficilior, non est cur eam explicandi laborem assumamus.

QVÆSTIO XIII.

D — A G B — E

1 1 1

VNitatem secare, & adiicere vtrique segmento alium atque aliū datum numerum, itáque quadratum conficere. Imperatum sit vt vnitas secetur, & adiiciatur alteri segmento 2. alteri 6. vt fiat vtrimque quadratus. Exponatur vnitas A B. & secetur in G. & ipsi A G. adjiciatur binarius A D. At ipsi G B. addatur senarius B E. vterque igitur ipsorum G D. G E. est quadratus. Et quia A B. est vnitas. At summa duorum A D. B E. est 8. Totus vtique D E erit 9. Et hunc oportet diuidere in duos quadratos, nempè in ipsos G D. G E. Sed quoniam quadratorum alter maior est binario A D. & minor ternario D B. eo res rediit vt datum quadratum 9. diuidam in duos quadratos nempè ipsos G D. G E. vt alter ipsorum G D. cadat medius inter binarium, & ternarium. Nam inuento ipso G D. cùm A D. binarius sit, dabitur etiam reliquus A G. Est autem A B. vnitas. Quamobrem & reliquus B G. datus erit, sed & dabitur G. in quo secanda est vnitas. Iam descriptionis ductum sic exequamur. Esto alter quadratorum, is qui inter 2. & 3. cadere debet 1 Q. alter ergo erit 9. — 1 Q. æquandus quadrato. Et quidem hunc æquare quadrato. facile est, sed oportet talem inueniri 1 Q. vt cadat inter 2. & 3. Sumamus duos quadratos, alterum maiorem quàm 2. alterum minorem quàm 3. sunt autem $\frac{289}{144}$. & $\frac{361}{144}$. Iam si 1 Q. ita adornemus vt inter hos duos quadratos incidat, soluemus quæstionem. Oportebit ergo Latus etiam 1 Q. hoc est 1 N. maius esse quàm $\frac{17}{12}$. minus verò quàm $\frac{19}{12}$. Oportet igitur 9 — 1 Q. æquantes quadrato, inuenire 1 N. maiorem quàm $\frac{17}{12}$. minorem quàm $\frac{19}{12}$. Quod si 9 — 1 Q. æqualem quadrato statuamus, fingemus qua-

δ — α γ β — ε

1 1 1

ΜΟΝΑΔΑ τεμεῖν καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων, ἄλλον καὶ ἄλλον δοθέντα ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ μονάδα τεμεῖν καὶ προσθεῖναι ᾧ μὲν μο β. ᾧ δὲ μο ϛ. καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τετράγωνον. ἐκκείσθω μονὰς ἡ αβ. καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ. καὶ τῷ μὲν αγ. προσκείσθω δυὰς ἡ αδ. τῷ δὲ γβ. ἑξὰς ἡ βε. ἑκάτερος ἄρα τῶν γδ. γε. ἐστὶ τετράγωνος. καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν αβ. ἐστὶ μονὰς α. συναμφότερος δὲ ὁ αδ. βε. ὀκτάς. ὅλος ἄρα ὁ δε. γίνεται μο θ. καὶ ταύτας χρὴ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους τοὺς γδ. γε. ἀλλὰ ἐπεὶ εἷς τῶν τετραγώνων. τοῦ μὲν αδ. ἐστὶ μείζων, τουτέστι δυάδος. τοῦ δὲ βδ. ἐστὶν ἐλάσσων, τουτέστι τριάδος. ἀπῆκταί μοι εἰς τὸν ἐπιταχθέντα τετράγωνον, οἱονεὶ τὸν θ. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους τοὺς γδ. γε. ὥστε ἕνα τὸν γδ. εἶναι ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῆς τε δυάδος καὶ τῆς τριάδος. εὑρεθέντος γὰρ τοῦ γδ. δοθεὶς ὢν ὁ αδ. ἐστὶ δυάς. λοιπὸς ἄρα ὁ αγ. δοθείς. ἔστι δὲ ὁ αβ. μονὰς α. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ βγ. ἐστὶ δοθείς. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ γ. καθ' ὃ τέμνεται ἡ μονὰς, ἡ δὲ ἀγωγὴ ὑπογραφῆς. ἔστω γὰρ ὁ εἷς τῶν τετραγώνων μεταξύ τε δυάδος, καὶ τῆς τριάδος δύναμις α. ὁ ἄρα λοιπὸς ἔσται μονάδες θ λείψει δυνάμεως α. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. καὶ ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ποιεῖν ῥᾴδιόν ἐστι, δεῖ δὲ εὑρεῖν τὴν δύναμιν μεταξὺ τοῦ τε β. καὶ τοῦ γ. λαμβάνομεν δύο τετραγώνους, ἕνα μὲν μείζονα τοῦ β. τὸν δὲ ἕτερον ἐλάσσονα τοῦ γ. εἰσὶ δὲ τὰ σπθ ρμδ. καὶ τξα ρμδ. ἐὰν οὖν τὴν δύναμιν κατασκευάσωμεν ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν προειρημένων δύο τετραγώνων. λύσομεν τὸ ζητούμενον. δεῖ οὖν καὶ τὴν πλευρὰν δυ α. τουτέστιν ς α. μείζονα μὲν εἶναι ιζ ιβ. ἐλάσσονα δὲ ιθ ιβ. ὥστε δεῖ ζητοῦντα μο θ ⋔ δυ α. ἴσον τετραγώνῳ, εὑρεῖν τὸν ς μείζονα μὲν μο ιζ ιβ. ἐλάσσονα δὲ ιθ ιβ. ἐὰν δὲ μο θ ⋔ δυ α.

ποιῶμεν ἴσας τετραγώνῳ. πλάσσομεν τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ μο γ λείψει ςς τινῶν, καὶ εὑρίσκομεν τὸν ς γίνεσθαι ἔκ τινος ἀριθμοῦ ἑξάκις γινομένου καὶ μεριζομένου εἰς τὸν μονάδι μιᾷ μείζονα τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου. ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν τινα ἀριθμὸν ὃς ἑξάκις γινόμενος, καὶ παραβληθεὶς εἰς τὸν μονάδι μείζονα τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου, τὴν παραβολὴν ποιῇ μείζονα μὲν ιζ ιβων. ἐλάσσονα δὲ ιθ ιβων. ἔστω ὁ ζητούμενος ςος α. θέλω ἄρα ςςοὺς ς. παραβληθέντας εἰς ΔΥ α μο α. ποιεῖν τὴν παραβολὴν μείζονα μὲν ιζ ιβων. ἐλάσσονα δὲ ιθ ιβων. ἀλλὰ καὶ ὁ ιζ. παραβληθεὶς παρὰ τὸν ιβ. τὴν παραβολὴν ποιεῖ ιζ ιβων. ὥστε δὴ ςςοὺς ς πρὸς ΔΥ α μο α. μείζονα λόγον ἔχειν, ἤπερ ιζ πρὸς ιβ. τὸ ἄρα ὑπὸ ςς ς. καὶ μο ιβ. τουτέστι ςςοὶ οβ. ὀφείλει μεῖζον εἶναι τοῦ ὑπὸ δυνάμεως α μο α. καὶ ιζ. τουτέστι δυνάμεων ιζ. μο ιζ. τῶν ςς τοῦ ἡμίσεως ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται ,ασϟς. ἄφελε τὰς δυνάμεις ἐπὶ τὰς μονάδας τουτέστι σπθ. λοιπὸν ἄρα ,αζ. τούτων πλευρὰ οὐ μείζων λα. πρόσθες τὸ ἥμισυ τῶν ςς γίνεται οὐ μείζων ξζ. παράβαλε παρὰ τὸ πλῆθος τῶν δυνάμεων, γίνεται ὁ ς ὁ ξζ ιζων. καὶ ὁμοίως ἐπεὶ δεήσει ςςοὺς ς. πρὸς ΔΥ α μο α. ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἤπερ ιθ πρὸς ιβ. εὑρήσομεν τὸν ςς οὐκ ἐλάσσονα ξς ιζων. ἀλλὰ καὶ οὐ μείζονα ξζ ιζων. ἔστω μο γ. α ςων. πλάσσω οὖν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου ἀπὸ μο γ λείψει ςς γ. α ςων. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος ΔΥ ιβ. α δων. μο θ ⋔ ςς κα. ταῦτα ἴσα μο θ ⋔ ΔΥ α. ὅθεν ὁ ς ὁ πδ νγων. ἡ δὲ δύναμις ,ζνς ,βωθων. καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλωμεν τὴν δυάδα. ἔσται ἓν τμῆμα τῆς μονάδος ,αυλη ,βωθων. ὥστε τὸ ἕτερον ἔσται ,ατοα ,βωθων. καὶ μένει τὸ ἐπίταγμα.

drati latus à 3. cum defectu aliquot numerorum, & inueniemus 1 N. fieri ex aliquo numero sexies sumpto, & diuiso per quadratum ipsius vnitate auctum. Eò itaque sum redactus vt inueniam aliquem numerum, qui sexies sumptus, & diuisus per quadratum ipsius vnitate auctum quotientem faciat maiorem quàm $\frac{17}{12}$. minorem quàm $\frac{19}{12}$. Esto qui quæritur 1 N. Volo ergo vt 6 N. diuisi per 1 Q. + 1. quotientem faciant maiorem quam $\frac{17}{12}$. minorem quàm $\frac{19}{12}$. Sed & 17. diuisus per 12. quotientem facit $\frac{17}{12}$. Oportet itaque 6 N. ad 1 Q. + 1. maiorem habere rationem quàm quæ est 17. ad 12. productus ergo ex 6 N. in 12. hoc est 72 N. maior esse debet producto ex 1 Q. + 1. in 17. hoc est 17 Q. + 17. Numerorum semissis in se ducatur, fit 1296. aufer productum ex quadratis in vnitates, hoc est 289. relinquitur 1007. huius latus non maius 31. adde dimidium numerorum, fit non maius 67. diuide per multitudinem quadratorum fit 1 N. $\frac{67}{17}$. Similiter quandoquidem oportet 6 N. ad 1 Q. + 1. minorem rationem habere quàm quæ est 19. ad 12. Inueniemus 1 N. non minorem $\frac{66}{19}$. sed & non maior inuentus est $\frac{67}{17}$. esto igitur $3\frac{1}{2}$. formo ergo quadratum à latere $3 - 3\frac{1}{2}$ N. & fit $12\frac{1}{4}$ Q + $9 - 21$ N. Hæc æquantur $9 - 1$ Q. vnde fit 1 N. $\frac{84}{53}$. Quadratus verò $\frac{7056}{2809}$. & si hinc auferamus binarium, erit alterum segmentum vnitatis $\frac{1438}{2809}$. alterum $\frac{1371}{2809}$. Et postulatis satisfit.

IN QVAESTIONEM XIII.

SATIS accuratè quæstionem hanc explicauit Xilander, multa tamen prætermisit notatu digna, quæ vt sigillatim persequamur. Aduerte primò necessariam à Diophanto hîc omissam esse conditionem. Certum est enim numerum $9 - 1$ Q. æquari non potuisse quadrato, nisi 9. quadratus fuisset. Quare cùm 9. factus sit addita vnitate ad 8. summam adiiciendorum numerorum 2. & 6. euidens est huiusmodi conditionem præscribi debere. *Oportet autem summam adiiciendorum numerorum conficere quadratum vnitate auctam.* Moneo tamen sic esse concipiendam conditionem, si non aliter quàm per operationem Diophanti soluenda sit quæstio. Cùm enim, vt infrà commonstrabimus, quæstio æquè bene solui possit, dum summa numerorum additiorum vnitate aucta conficiat numerum ex duobus quadratis compositum, poterit vniuersalius proponi conditio, nimirum sic. *Oportet autem summam adiiciendorum numerorum vnitate auctam conficere quadratum, vel numerum ex duobus quadratis compositum.*

Aduerte secundò in codice manu exarato deesse diagramma descriptionis Diophantææ quod nos restituimus, cùm absque illo non possint intelligi Græca authoris verba. Cæterùm absque huiusmodi descriptione res facilius & breuius explicari potest, hoc modo. Cùm ad 2. addendo partem vnitatis debeat fieri quadratus, & ad 6. addendo residuum vnitatis conficiendus sit aliter quadratus, patet

summam quadratorum fore 9. Quare 9. diuidendus est in duos quadratos, quorum alter cadat inter 2. & 3. alter 6. & 7. consistat. Vnde duplici via perueniri potest ad æquationem. Sicut enim Diophantus, eum qui inter 2. & 3. cadere debet, posuit 1 Q. alterum 9 − Q. sic ille qui inter 6. & 7. consistere debet poni potest 1 Q. alter 9 − 1 Q. & similis prorsus erit operatio. Certùm est autem hisce quadratis inuentis solui quæstionem, nam si ab altero auferatur 2. ab altero 6. remanebunt quæsitæ partes vnitatis.

Aduerte tertiò vt inueniat Diophantus quadratum maiorem quàm 2. minorem quàm 3. rectè sumere duos quadratos qui cadant inter 2. & 3. quales sunt $\frac{289}{144}$ & $\frac{361}{144}$. si enim curemus vt 1 Q. cadat inter hosce duos quadratos, euidens est eum fore maiorem quàm 2. minorem quàm 3. est autem facile duos quadratos reperire qui cadant inter 2. & 3. id enim fiet, si sumatur quilibet quadratus, inter cuius duplum & triplum cadant duo quadrati. Vt si sumas 36. cuius duplum 72. triplum 108. cùm inter 72. & 108. cadant duo quadrati 81. & 100. his subscribendo denominatorem 36. fient quadrati quæsiti $\frac{81}{36}$. & $\frac{100}{36}$. Quare si per hos soluere velis quæstionem curandum erit, vt valor Numeri cadat inter $\frac{9}{6}$ & $\frac{10}{6}$.

Denique aduerte vt fiat valor Numeri maior quàm $\frac{17}{12}$ minor quàm $\frac{19}{12}$. Diophantum vti artificio quo iam sæpè in simili vsus est. Quia enim 9 − 1 Q. quadrato æquandus est, fiet valor Numeri, fingendo latus 3 − aliquot numeris, quorum sextuplum diuidetur per eorum quadratum vnitate auctum. Quærendus ergo Numerus cuius sextuplo per quadratum ipsius numeri diuiso fiat quotiens maior quàm $\frac{17}{12}$ minor quàm $\frac{19}{12}$. Posito ergo huiusmodi numero 1 N. fiet $\frac{6\ N}{1\ Q. + 1}$ maior quàm $\frac{17}{12}$. minor quàm $\frac{19}{12}$. & omnia per denominatores 1 Q. + 1. & 12. multiplicando, fient 72 N. maiores quàm 17 Q. + 17. minores quàm 19. Proinde vtraque æquatione per approximationem resoluta, fiet 1 N. maior quàm $\frac{66}{17}$ minor quàm $\frac{67}{19}$. Quare sumetur numerus aliquis intermedius, puta $3\frac{1}{2}$ & fingetur numeri 9 − 1 Q. latus 3 − $3\frac{1}{2}$ N. & cætera sunt manifesta.

Porro Diophanti operatio eatenus locum habet, quatenus adiiciendorum numerorum summa vnitate aucta quadratum facit. Sed si huiusmodi summa vnitate aucta, conficiat numerum ex duobus quadratis compositum, aliter operandum erit, imitando scilicet artificium eius quam ad præcedentem attulimus ex Vieta. Verbi gratia. Diuidenda sit vnitas in duas partes, vt alteri addendo 2. alteri 7. fiat vtrimque quadratus. Euidens est numerum 10. diuidendum esse in duos quadratos, quorum alter cadat inter 2. & 3. Alter verò inter 7. & 8. Cùm ergo addendo semissem vnitatis vtrique datorum numerorum fiant $2\frac{1}{2}$. & $7\frac{1}{2}$. Quærendi sunt quadrati qui ad hos numeros accedant. Quæro ergo quæ pars quadrati addita ad $2\frac{1}{2}$. faciat quadratum, ea reperietur $\frac{1}{144}$. fitque quadratus $\frac{361}{144}$ cuius latus $\frac{19}{12}$. Rursus quæro quæ pars quadrati ad $7\frac{1}{2}$ adiecta, faciat quadratum, ea reperitur $\frac{1}{16}$. & fit quadratus $\frac{121}{16}$ à latere $\frac{11}{4}$. Quamobrem 10, diuidendus est in duos quadratos, ita vt latus vnius accedat ad $\frac{19}{12}$. Alterius vero ad $\frac{11}{4}$ seu ad $\frac{33}{12}$. Statuentur ergo per ad æqualitatem quadratorum latera 1 + 7 N. & 3 − 3 N. fietque summa quadratorum 10 + 58 Q. − 4 N. æqualis 10. vnde fiet 1 N. $\frac{2}{29}$. & erunt quadratorum latera $\frac{43}{29}$ & $\frac{81}{29}$. ipsi quadrati $\frac{1849}{841}$. & $\frac{6561}{841}$. quorum summa 10. & si à primo auferas 2. à secundo 7. restant quæsitæ partes vnitatis $\frac{167}{841}$ & $\frac{674}{841}$.

Hæc autem quæstio extendetur quoque ad quemlibet numerum, & sic vniuersalius proponetur:

Datum numerum diuidere in duas partes, vt vtrique addendo alterum atque alterum numerum, fiat vtrimque quadratus. Oportet autem compositum ex diuidendo numero, & vtroque adiiciendorum, quadratum esse, vel compositum ex duobus quadratis.

Diuidendus esto 6. adiiciendi verò 3. & 7. Cùm ergo horum trium summa sit 16. oportet diuidere 16. in duos quadratos, quorum alter sit maior quàm 3. minor quàm 9. Alter verò sit maior quàm 7. minor quàm 13. Ponatur primus 1 Q. erit alter 16. − 1 Q. cuius latus ita fingendum est, vt 1 Q. cadat inter 3. & 9. sumantur duo quadrati cadentes inter 3. & 9. puta 4. & $\frac{64}{9}$. quorum latera 2. & $\frac{8}{3}$. Oportet igitur fictitium latus ita ponere, vt 1 N. sit maior quàm 2. minor quàm $\frac{8}{3}$. Porro fiet valor Numeri ponendo fictitium latus 4 − aliquot numeris, quorum octuplum diuidetur per eorum quadratum vnitate auctum. Quamobrem $\frac{8\ N}{1\ Q. + 1}$ maior est quàm 2. minor quàm $\frac{8}{3}$. & tandem 8 N. maior est quàm 2 Q. + 2. & 24. N. minor est quàm 8 Q. + 8. & vtraque æquatione per approximationem resoluta fit 1 N. maior quàm $\frac{21}{8}$ minor quàm $\frac{4}{1}$. Ponatur 3. & numeri 16 − 1 Q. latus statuatur 4 − 3 N. fiet 1 N. $\frac{12}{5}$. erunt igitur latera quadratorum $\frac{12}{5}$ & $\frac{16}{5}$. ipsi quadrati $\frac{144}{25}$ & $\frac{256}{25}$ & à primo auferendo 3. à secundo 7. remanent quæsitæ senarij partes $\frac{69}{25}$. & $\frac{81}{25}$.

Rursus numerus 8. diuidendus sit in duas partes, vt alteri addendo 5. alteri 7. fiat vtrumque quadratus. Cùm ergo ipsorum 8. 5. 7. summa sit 20. oportet diuidere 20. in duos quadratos quorum alter cadat inter 5. & 13. alter consistat inter 7. & 15. sumo medium arithmeticè inter vtrumque terminum, puta 9. & 11. & quæro quæ pars quadrati ad vtrumque addita faciat quadratum; inuenio hinc $\frac{49}{64}$. inde $\frac{1}{9}$. fiuntque quadrati $\frac{625}{64}$ & $\frac{100}{9}$ quorum latera in eadem denominatione sunt $\frac{75}{24}$. & $\frac{80}{24}$. Diuidendus ergo mihi est 20. in duos quadratos, ita vt vnius latus accedat ad $\frac{75}{24}$. Alterius latus sit proxi-

mum $\frac{81}{4}$. erunt ergo per ad æqualitatē huiusmodi latera 2 + 27 N. & 4 − 16 N. estque summa quadratorum 20 + 985 Q. − 20 N. vnde fit 1 N. $\frac{4}{197}$. & sunt quadratorum latera $\frac{502}{197}$ & $\frac{724}{197}$ ipsi quadrati $\frac{252004}{38809}$ & $\frac{524176}{38809}$. Quod si à priore auferas 5. à posteriore 7. remanent quæsitæ partes octonarij, $\frac{57959}{38809}$ & $\frac{252513}{38809}$.

QVÆSTIO XIV.

ΜΟΝΑΔΑ διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς, καὶ προσθεῖναι ἑκάστῳ αὐτῶν τὸν αὐτὸν δοθέντα, καὶ ποιεῖν ἕκαστον τετράγωνον. δεῖ δὴ τὸν διδόμενον ἀριθμὸν, μήτε δυάδα εἶναι, μήτε τινὰ τῶν ἀπὸ δυάδος ὀκτάκις παραυξανομένων. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μονάδα διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς, καὶ προσθεῖναι ἑκάστῳ μο γ. καὶ ποιεῖν ἕκαστον τετράγωνον. πάλιν δεῖ τὸν ι. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ᾖ μο γ. ἐὰν οὖν πάλιν τὸν ι. διέλωμεν εἰς τρεῖς τετραγώνους τῇ τῆς παρισότητος ἀγωγῇ. ἔσται ἕκαστος αὐτῶν μείζων τριάδος. καὶ δυνησόμεθα ἀφ' ἑκάστου αὐτῶν ἀφελόντες μο γ. ἔχειν εἰς οὓς ἡ μονὰς διαιρεῖται. λαμβάνομεν ἄρτι τοῦ ι. τὸ τρίτον, γίνεται γ. α γ^ον. καὶ ζητοῦμεν τί προστεθέντες μόριον τετραγωνικὸν ταῖς μονάσι γ. α γ^ον. ποιήσομεν τετράγωνον πάντα ἐννάκις, καὶ δεῖ τῷ λ. προσθεῖναι τι μόριον τετραγωνικὸν, καὶ ποιεῖν τὸν ὅλον τετράγωνον. ἔστω τὸ προστιθέμενον μόριον α^ον δυ^ον. καὶ πάντα ἐπὶ δύναμιν γίνονται δυ λ. μο α. ἴσα τετραγώνῳ, τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς ε. μο α γίνεται ὁ τετράγωνος δυ κε. ςς ι. ἴσος δυ λ. μο α. ὅθεν ὁ ς μο β. ἡ δύναμις μο δ. τὸ δυναμοστὸν μο α δ^ον. εἰ οὖν ταῖς μο λ. προστίθεται μο α δ^ον. ταῖς μονάσι γ. α γ^ον. προστεθήσεται α^ον λς^ον. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος ρκα^ον λς^ον. δεῖ οὖν τὸν ι. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους ὅπως ἑκάστου τετραγώνου ἡ πλευρὰ πάρισος ᾖ μο ια ς^ων. ἀλλὰ καὶ ὁ ι. σύγκειται ἐκ δύο τετραγώνων τοῦ τε θ. καὶ τῆς μονάδος. διαιροῦμεν οὖν τὴν μονάδα εἰς δύο τετραγώνους τά τε θ κε^ων. καὶ τὰ ις κε^ων. ὥστε τὸν ι. συγκεῖσθαι ἐκ τριῶν τετραγώνων. ἔκ τε τοῦ θ. καὶ τοῦ ις κε^ων. δέον οὖν ἑκάστην τῶν πλευρῶν τούτων παρασκευάσαι πάρισον ια ς^ων. ἀλλὰ καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἰσι μο γ. καὶ μο δ ε^ων. καὶ μο γ ε^ων. καὶ πάντα τριακοντάκις. καὶ γίνονται μο Ϟ. καὶ μο κδ. καὶ μο ιη. τὰ δὲ ια ς^ων. γίνονται μο νε. δεῖ οὖν ἑκάστην πλευρὰν κατασκευάσαι νε. πλάσσομεν ἑκάστου πλευρὰν μο γ. ⋔ ςς λε. ἑτέραν δὲ ςς λζ μο γ ε^ων. γίνονται οἱ ἀπὸ τῶν εἰρημένων τετράγωνοι. δυ γφνε μο ι λεῖψει ςς ρις. ταῦτα ἴσα μονάσι ι. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς ρις γφνε^ων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. καὶ γίνονται αἱ πλευραὶ

VNITATEM diuidere in tres numeros, & cuilibet addere datum eundem numerum, & ita quemlibet quadratum facere. Oportet autem datum neque binarium esse, neque aliquem eorum qui fit addito binario ad octonarij multiplicem. Imperatum sit vt vnitas diuidatur in tres numeros, & cuilibet addatur 3. & sic fiat quadratus. Rursus oportet diuidere 10. in tres quadratos, vt quilibet ipsorum sit maior quàm 3. Si ergo iterum diuidamus 10. in tres quadratos adæqualitatis ductu, erit quilibet ipsorum maior ternario, & poterimus ternario à quouis detracto, eos habere in quos vnitas diuidenda est. Sumamus itaque trientem de 10. hoc est $3\frac{1}{3}$. Et quæramus quæ pars quadrata possit adiici ad $3\frac{1}{3}$. vt fiat quadratus. Omnia nouies. Iam ad 30. oportet partem à quadrato denominatum addi, & fieri quadratum. Esto pars adiicienda $\frac{1}{1 Q.}$. & omnia multiplicentur per 1 Q. fiunt 30 Q. + 1. æqualia quadrato à latere 5 N. + 1 fitque quadratus 25 Q. + 10 N + 1. æqualis 30 Q. + 1. vnde fit 1 N. 2. & 1 Q. 4. Parsque quadratica $\frac{1}{4}$. Si ergo ad 30. adiicimus $\frac{1}{4}$. ad $3\frac{1}{3}$. addemus $\frac{1}{36}$. & fit quadratus $\frac{121}{36}$. Oportet igitur diuidere 10. in tres quadratos, vt vniuscuiusque quadrati latus sit adæquale vnitatibus $\frac{11}{6}$. Atqui 10. componitur ex duobus quadratis 9. & 1. Diuidimus ergo 1. in duos quadratos $\frac{9}{25}$. & $\frac{16}{25}$. ita vt 10. constet ex tribus quadratis 9. $\frac{16}{25}$. & $\frac{9}{25}$. Oportet igitur horum cuiusuis lateri adæqualem facere $\frac{11}{6}$. Sed & latera eorum sunt 3. $\frac{4}{5}$. & $\frac{3}{5}$. & omnia per 30. multiplicentur. Et fiunt 90. 24. & 18. Ipse verò $\frac{11}{6}$. fit 55. Oportet itaque vnum quodque latus adæquare ipsi 55. fingamus vnius latus 3 − 35 N. alterius autem 31 N. + $\frac{4}{5}$. Alterius denique 37 N. + $\frac{3}{5}$. fiunt ab his quadrati in vnam summam redacti 3555 Q. + 10. − 116 N. N. hæc æquantur 10. vnde inuenitur 1 N. $\frac{116}{3555}$. Ad positiones. Et fiunt la-

tera quadratorum data, ipsique etiam dantur, & reliqua sunt manifesta.

τῶν τετραγώνων δοθῶσι, ὥστε καὶ αὐτοί, τὰ λοιπὰ δῆλα.

IN QVAESTIONEM XIV.

VERBA illa δεῖ δὴ τὸν διδόμενον ἀριθμὸν μήτε δυάδα εἶναι, μήτέ τινα τῶν ἀπὸ δυάδος ὀκτάκι παραυξανομένων, perperam vertit Xilander & ex eius versione commodum aliquem sensum recipere nequeunt. Itaque cùm eorum vim non perciperet, nihil super huiusmodi limitatione adnotauit. Certum est autem, vt quæstio solui possit oportere vt triplum dati numeri vnitate auctum sit quadratus, vel ex duobus, aut ex tribus etiam quadratis suapre natura compositis. Quare vt Diophanti limitatio sit necessaria, ostendendum est numeros 2. 10. 18. 26. 34. 42. & alios omnes qui fiunt addendo 2. ad aliquem octonarij multiplicem tales esse, vt eorum triplum vnitate auctum non possit esse quadratus, neque numerus ex duobus aut tribus quadratis compositus. Et de binario quidem, manifestum est eius triplum vnitate auctum puta 7. nec quadratum esse, nec è duobus vel tribus quadratis compositum. De aliis autem sic demonstrabitur.

Esto A. quilibet octonarij multiplex, cui addito binario fiat B. & sumatur C H triplum ipsius B. cui addita vnitate H K. fiat C K. dico C K nec quadratum esse, nec è duobus vel tribus quadratis compositum: Quia enim B. continet A & binarium, & C H triplus est ad B, patet C H continere triplum ipsius A, & triplum binarij, puta senarium. Sit ergo C F triplum ipsius A, erit reliquus F H senarius, in quo sumendo binarium G H, relinquetur quaternarius F G.

A 16. B 18.
C————————F....G..H.K

Primum itaque C K non esse quadratum, sic probatur. Quoniam A est multiplex octonarij, [1] est A 21. nonl.
par, addito binario fit rursus B par. Quamobrem & C H multiplex ad B. par est, ac proinde C K est impar ex definitione. Si ergo C K. ponatur quadratus, ablata vnitate, [2] reliquus C H. erit pariter par. [3] Quare quaternarius eum metietur. Sed 21. 1. porif.
idem quaternarius metitur C F multiplicem octonarij, ergo idem quaternarius metietur reliquum 10. 1. porif.
F H. sed & quaternarius metietur seipsum, puta F G. ergo idem quaternarius metietur reliquam binarium G H. Quod est impossibile. Quare C K non est quadratus.

Deinde C K. non componi ex duobus quadratis sic ostendo. Etenim si componatur ex duobus quadratis, non erit vterque par, nec vterque impar, alioquin ipse C K. esset par, contrà id quod ostensum est. Necesse est ergo alterum quadratorum parem esse, alterum imparem. [4] At quadratus 20. 1. porif.
par est pariter par; [5] & à quadrato impare auferendo vnitatem, relinquitur pariter par. Igitur à nu- 21. 1. porif.
mero C K. auferendo vnitatem, reliquus C H. componitur ex duobus pariter paribus, [6] ac proinde 16. 1. porif.
C H. est pariter par. Quare vt prius sequitur quaternarium metiri binarium. Quod est absurdum. Igitur C K. non componitur ex duobus quadratis.

Denique si C K. ponatur componi ex tribus quadratis; non erit quilibet illorum par; nec erunt duo impares & tertius par; sic enim fieret ex illis compositus C K. par, contra id quod ostensum est. Relinquitur ergo tres illos quadratos vel impares esse omnes; vel duos esse pares & tertium imparem. Atqui neutrum possibile est. Nam primò si ponantur duo pares & tertius impar, si à tertio auferatur vnitas, [7] relinquetur pariter par, quo addito aliis duobus quadratis itidem pari- 21. 1. porif.
ter paribus [8] fiet totus C H. pariter par. Quare rursus inferetur quaternarium metiri binarium. Quod 16. 1. porif.
est impossibile. Deinde si quilibet trium quadratorum ex quibus C K. componi dicitur, ponatur impar cùm à quolibet ipsorum detracta vnitate relinquatur multiplex octonarij, vt ostensum est ad quadragesimam quartam quarti, & euidentius demonstrabitur ad octauam de numeris multangulis: patet si à composito ex tribus, nempè à toto C K, auferatur ternarius G K, residuum C G, multiplicem esse octonarij: sed & C F. multiplex est octonarij ex constructione. Igitur octonarius metiens totum C G. & ablatum C F, metietur & reliquum quaternarium F G. Quod est impossibile. Non erit ergo C K. quadratus, nec compositus è duobus vel tribus quadratis. Quod demonstrandum erat.

Ex his liquidò apparet eum esse sensum verborum Diophanti, quem expressimus versione nostra, nam ingeniosa est, & authore digna huiusmodi limitatio. Cæterùm quamuis, vt ostensum est, hæc conditio sit necessaria, non est tamen sufficiens, nam non solùm numeri omnes hac limitatione comprehensi soluendæ quæstioni sunt inutiles, sed præterea numerus 9. & omnes alij qui fiunt addito 9. ad 32. vel ad aliquem eius multiplicem, quales sunt 41. 73. 105. &c. nam horum triplum addita vnitate, neque quadratus est, neque numerus è duobus vel tribus quadratis compositus. Et quidem de ipso 9. patet experientia, nam eius triplum vnitate auctum, puta 28. nec quadratus est, nec è duobus vel tribus quadratis compositus. De aliis autem sic demonstratur. Esto A multiplex ad 32. cui addendo 9. fiat B. cuius triplum vnitate auctum esto C E. Dico C E. nec quadratum esse, nec è duobus vel tribus quadratis compositum. Quia enim B. continet A. & nouenarium, ipse C E. continet triplum ipsius A, & triplum ipsius 9. & vnitatem. Sit C D triplum ipsius A, erit ergo D E. tri-

plum nouenarij & vnitas, puta numerus 28. Quare cùm C D. multiplex pariter paris sit pariter par & ipse etiam D E, seu 28. sit pariter par erit totus C E, pariter par,[a] ac proinde metietur cum quaternarius, sit illius quadrans F L, constans ex F G. quadrante ipsius. C D, & ex G L. seu septenario quadrante ipsius D E, seu 28. in quo sumatur G H, quaternarius. H K binarius. K L vnitas. Cùm ergo C D sit multiplex ad 32. & quadrans ipsius 32. sit 8. patet F G multiplicem esse ad 8. & toties continere 8. quoties C D continet 32. Quare F G. est pariter par, & multiplex octonatij.

11. 1. porism.

C ——— ——— A 64. ——— B 73. ——— D ——— ——— E

F ——— ——— ——— G . . . . H . . K . L

Primum itaque C E non esse quadratum sic probatur. Si enim C E quadratus sit, eo per quadratum 4. diuiso, fiet & F L quadratus. Quare cùm F L sit impar, constans scilicet ex pari F G. & ex impari G L, ablata inde vnitate, residuum F K, erit multiplex octonarij per ostensa ad quadragesimam quartam quarti. Cùm ergo 8. metiatur totum F K, & ablatum F G, vt ostensum est, metietur & 8. reliquum senarium G K Quod est impossibile.

Deinde C E, non componi ex duobus quadratis sic ostenditur. Non potest componi ex duobus quadratis, quorum alter sit par, alter impar, alioquin C E esset impar contra id quod ostensum est.
21. 1. porism. Non componetur etiam ex duobus imparibus[b], nam ab vtroque auferendo vnitatem, relinquerentur duo numeri pariter pares, quorum summa esset pariter par; ac proinde totus C E, constaret ex nu-
11. 1. porism. mero pariter pari, atque ex binario[c]. Quare C E, esset pariter impar tantùm contra id quod demon-
22. 1. porism. stratum est. Restat ergo vt vterque quadratorum ex quibus C E componi dicitur, sit par[d], vterque ergo erit pariter par. Quare eorum quadrantes sumendo, fient duo quadrati æquales toti F L. Cùm ergo F L sit impar, necesse est alterum quadratorum ex quibus componitur, esse parem, alterum imparem, & ab impari auferendo vnitatem cùm remaneat pariter par, patet F K ex duobus pariter
10. 1. porism. paribus compositum, esse pariter parem[e]. Igitur metietur quaternarius totum F K, sed & metietur pariter parem F G, & seipsum puta G H. Ergo idem quaternarius metietur reliquum binarium H K. Quod est absurdum.

Denique C E non potest componi ex tribus quadratis. Etenim non potest componi ex tribus imparibus neque ex duobus paribus & tertio impari, alioquin ipse C E esset impar contra demonstrata. Non componetur etiam ex duobus imparibus, & tertio pari, sic enim à quadratis imparibus concipiendo auferri vnitatem, concludetur totum C E componi ex tribus numeris pariter paribus, & ex
10. 1. porism. binario,[f] ac proinde C E esse pariter imparem tantùm, contra id quod ostensum est. Restat ergo C E componi ex tribus quadratis paribus, qui cùm sint pariter pares, & eorum quadrantes sint quadrati numeri, erit F L compositus ex tribus quadratis. Non erunt autem tres hi quadrati pares, neque duo impares erunt & tertius par, alioquin totus F L erit par contra demonstrata. Non erunt etiam duo pares, tertius impar, nam si à tertio impari auferatur vnitas, relinquetur totus F K compositus ex tribus pariter paribus, ac proinde pariter par. Quare vt prius inferetur quaternarium metiri binarium. Demum non erunt tres quadrati impares, nam tunc à quolibet auferendo vnitatem, relinquentur tres numeri quos sigillatim octonarius metietur per ostensa, ad quadragesimam quartam quarti ac proinde à toto F L auferendo ternarium, relinquetur F H multiplex octonarij. Cùm ergo 8. metiatur totum F H, & ablatum F G vt ostensum est, metietur idem 8. reliquum quaternarium G H. Quod est impossibile. Non est ergo C E quadratus, nec componitur è duobus vel tribus quadratis. Quod erat demonstrandum. Cæterùm an hæ duæ limitationes simul sufficientes sint, ita vt per vtramque simul excludantur omnes omnino numeri quorum triplum vnitate auctum non est quadratus, nec è duobus vel tribus quadratis compositus, non ausim temerè affirmare. Equidem vix adducor vt aliter sentiam, cùm in omnibus numeris ab vnitate vsque ad 325. id sim expertus.

OBSERVATIO D. P. F.

Limitatio ipsa Bacheti est insufficiens, imo nec ipsius experientia satis fuit accurata, nam 37 numerus cadit in limitationem, non autem in regulam.

Vera limitatio sic concipi debet.

Exponantur duæ progressiones quadrati altera ab 1, altera ob octonario, & vna alteri superponatur sic.

1	4	16	64	256	1024	4096	&c.
8	32	128	512	2048	8192	32768	&c.

Et considerando primò terminum primum secundæ qui est 8. oportet datum numerum non esse duplum vnitatis quia ipsi superponitur vnitas, neque superare duplo vnitatis multiplicem 8.

Deinde

Deinde considerando secundum terminum secundæ progressionis qui est 32, sumatur duplum numeri superpositi qui est 4. fit 8. cui si addas omnes in eadem progressione superiori proxime antecedentes (in hoc exemplo inuenietur sola vnitas) fit 9. sumptis igitur duobus numeris 32 & 9. oportet datum numerum neque esse 9 neque superare dicto numero 9. multiplicem 32. consideretur mox tertius progressionis secundæ terminus qui est 128. sumatur duplum numeri superpositi qui est 16. fit 32, cui si addas omnes in eadem progressione superiori proxime antecedentes qui iam sunt 1. & 4. fit 37. sumptis igitur duobus numeris 128. & 37 oportet datum numerum neque esse 37. neque superare dicto 37. multiplicem 128.

Considerato deinde 4. progressionis secundæ termino fient ex methodo numeri 512 & 149. oportebit itaque datum numerum neque esse 149. neque superare dicto 149. multiplicem 512. & est vniformis & perpetua in infinitum methodus quam neque Diophantus generaliter indicauit, nec Bachetus ipse detexit cuius vel ipsa experientia fallit, vt iam præmonuimus, non solum in numero 37 qui est intra limites experientiæ de quâ fidem facit, sed etiam in numero 149. & alijs.

Reliqua operatio Diophanti ex dictis ad duodecimam perspicua redditur. Inuento $\frac{11}{6}$ latere quadrati cui adæquari oportet latera quadratorum in quos numerus 10. diuidendus est, sumit latera quadratorũ ex quibus 10. suapte natura cõponitur, puta 3. $\frac{4}{5}$. & $\frac{3}{5}$. & omnia reducendo ad eandem denominationem, fiunt hæc tria latera $\frac{90}{30}$ $\frac{24}{30}$ $\frac{18}{30}$ ipse verò $\frac{11}{6}$ fit $\frac{55}{30}$. Posito ergo valore Numeri $\frac{1}{30}$. patet latera quadratorum quæsitorum ponẽda esse, vt facit Diophantus 3 − 35 N. 31 N. + $\frac{4}{5}$. 37 N. + $\frac{3}{5}$. & reliqua sunt manifesta. Placuit autem παρισότητα vertere cum Xilandro ad æqualitatem. Quia enim in huiusmodi quæstionibus Diophantus, cuidam lateri adæquat proximè latera quadratorum quæsitorum, non autem æquat propriè, vocat ille hanc comparationem παρισότητα, non autem ἰσότητα. Nos etiam non æqualitatem sed adæqualitatem appellamus, sicut etiam πάρισον vertimus adæquale.

Porrò solutionem quæstionis omisit Diophantus molestiæ fractionum se subtrahens, sed talis est, fit 1 N. $\frac{116}{711}$ per quem si resoluas hypostases, fiunt quadratorum latera $\frac{1321}{711}$ $\frac{1285}{711}$ $\frac{1288}{711}$. Ipsi quadrati $\frac{1745041}{505521}$ $\frac{1651225}{505521}$. $\frac{1658944}{505521}$. à quibus si auferas sigillatim ternarium, restant quæsitæ partes vnitatis, videlicet $\frac{228478}{505521}$ $\frac{134662}{505521}$ $\frac{142381}{505521}$. Hæc autem quæstio extendetur etiam ad quemlibet numerum, sic eam proponendo.

Datum numerum secare in tres partes, & cuilibet addere eundem numerum, & facere quadratum. Oportet autem, vt numerus diuidendus adsumens triplum additij numeri, faciat quadratum, vel numerum è duobus aut tribus quadratis compositum.

Diuidendus esto 5. additiitius numerus 3. Igitur 14. diuidendus est in tres quadratos, quorum quilibet excedat 3. sumo $\frac{1}{3}$ de 14. puta $\frac{14}{3}$ & quæro partem quadrati quæ illi addita, faciat quadratum ea inuenietur $\frac{1}{36}$ & fit quadratus $\frac{169}{36}$ à latere $\frac{13}{6}$. Diuidendus ergo est 14. in tres quadratos, ita vt cuiuslibet latus adæquetur $\frac{13}{6}$. At 14. suapte natura componitur ex tribus quadratis, quorum latera 3. 2. 1. fingentur ergo per adæqualitatem quæsitorum quadratorum latera 3 − 5 N. 2 + 1 N. & 1 + 7 N. eritque summa quadratorum 14 + 75 Q. − 12 N. æqualis 14. vnde fiet 1 N. $\frac{4}{25}$. sunt ergo quadratorum latera $\frac{55}{25}$ $\frac{54}{25}$ $\frac{53}{25}$. ipsi quadrati $\frac{3025}{625}$ $\frac{2916}{625}$ $\frac{2809}{625}$. à quibus sigillatim auferendo ternarium remanent quæsitæ quinarij partes $\frac{1150}{625}$ $\frac{1041}{625}$ $\frac{934}{625}$.

Rursus vniuersalius etiam proponetur quæstio, hoc pacto.

Datum numerum secare in quotlibet partes, vt cuilibet addendo eundem numerum, fiat quadratus.

Sit secandus 6. in quatuor partes vt cuilibet addendo 4. fiat quadratus, oportet ergo quadruplum ipsius 4. adsumpto 6. puta 22. diuidere in quatuor quadratos, quorum quilibet excedat 4. Porrò 22. diuiditur in tres quadratos 9. 9. 4. quorum primus 9. excedit 4. & duorum reliquorum summa 13. excedit triplum ipsius 4. Quare superest vt diuidamus 13. in tres quadratos quorum quilibet excedat 4. sumo trientem de 13. puta $\frac{13}{3}$. & quæro quæ pars quadrati huic addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{144}$. & fit quadratus $\frac{625}{144}$ cuius latus $\frac{25}{12}$. Porrò 13. diuiditur in tres quadratos quorum latera $\frac{9}{5}$. 2. $\frac{12}{5}$. Quare per adæqualitatem constituentur quæsitorum quadratorum latera $\frac{9}{5}$ + 17 N. 2 + 5 N. $\frac{12}{5}$ − 19 N. & fit quadratorum summa 13 + 675 Q. − 10N. æqualis 13. vnde fit 1 N. $\frac{2}{135}$. sunt ergo latera quadratorum $\frac{277}{135}$ $\frac{280}{135}$ $\frac{286}{135}$. Ipsi quadrati $\frac{76729}{18225}$ $\frac{78400}{18225}$ $\frac{81796}{18225}$. quibus si addatur quartus quadratus 9. habentur quatuor quæsiti quadrati, à quibus auferendo sigillatim numerum 4. remanent quæsitæ partes senarij $\frac{3829}{18225}$ $\frac{5500}{18225}$ $\frac{8896}{18225}$ & 5. Hîc nulla conditio præscribitur, quia quilibet numerus in quatuor pluresve quadratos diuidi potest, vt abundè docuimus ad trigesimam primam quarti, vbi etiam quarundem

quæſtionum explicationem in hunc locum reiecimus, quas iam enodare libet. Sit ergo propoſitum.

Inuenire duos quadratos, quorum ſumma cum ſumma laterum, datum faciat numerum. Oportet autem dati numeri quadruplum binario auctum diuidi poſſe in duos quadratos.

Datus eſto 6.

Patet ex dictis ad trigeſimam primam quarti, ſi ad 6. addamus duos quadrantes vnitatis, puta $\frac{2}{4}$ ſummam 6 $\frac{2}{4}$ æquari debere duobus quadratis, à quorum lateribus ſi auferatur ſigillatim $\frac{1}{2}$ reſtant quæſitorum quadratorum latera. Porro ad vitandas minutias ducto 6 $\frac{2}{4}$ in 4. fit 26. diuidendus in duos quadratos. Quia verò 6 $\frac{2}{4}$ ita diuidendus eſt in duos quadratos, vt quilibet excedat $\frac{1}{4}$. patet eius quadruplum 26. ita diuidendum in duos quadratos, vt quilibet excedat 1. id eſt vt quilibet ſit maior quàm 1. minor quàm 25. Sumpto ergo medio inter 1. & 25. puta 13. quæro quæ pars quadrati huic addita faciat quadratum ea eſt $\frac{4}{9}$. fitque quadratus $\frac{121}{9}$ à latere $\frac{11}{3}$. Ergo latera quadratorum adæquari debent $\frac{11}{3}$. Quare ſumptis lateribus quadratorum ex quibus 26. componitur 1. & 5. fingentur per adæqualitatem quæſitorum latera 1 + 8 N. & 5 − 4 N. fit ſumma quadratorum 26 + 80 Q. − 24 N. æqualis 26. vnde fit 1 N. $\frac{3}{10}$. ſunt igitur latera quadratorum $\frac{17}{5}$. $\frac{19}{5}$. Quorum ſemiſſes puta $\frac{17}{10}$ $\frac{19}{10}$ ſunt latera quadratorum ex quibus 6 $\frac{2}{4}$ componitur. Quamobrem à quolibet auferendo $\frac{1}{2}$ remanent quæſitorum quadratorum latera $\frac{6}{5}$ $\frac{7}{5}$. nam horum ſumma cum ſumma quadratorum conficit 6.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire tres quadratos, quorum ſumma cum ſumma laterum, datum conficiat numerum. Oportet autem dati numeri quadruplum auctum ternario, diuidi poſſe in tres quadratos.

Datus eſto 4.

Ergo 4 $\frac{3}{4}$ diuidendus eſt in tres quadratos quorum quilibet excedat $\frac{1}{4}$. omnia per 4. fit 19. diuidendus in tres quadratos, quorum quilibet excedat 1. Diuiditur autem 19. in tres quadratos 9. 9. 1. quorum primo retento, ſupereſt vt reſiduum de 19. puta 10. diuidamus in duos quadratos, quorum quilibet excedat 1. Quæro partem quadrati quæ ad 5. addita quadratum faciat, ea eſt $\frac{1}{16}$. & fit quadratus $\frac{81}{16}$ à latere $\frac{9}{4}$. fingo ergo latera quadratorum per adæqualitatem 1 + 5 N. & 3 − 3 N. fitque ſumma quadratorum 10 + 34 Q. − 8 N. æqualis 10. vnde fit 1 N. $\frac{4}{17}$. ſunt igitur latera $\frac{37}{17}$ & $\frac{39}{17}$. & ſic totus 19. diuiſus eſt in tres quadratos, quorum latera 3. $\frac{37}{17}$. $\frac{39}{17}$. quorum ſemiſſes $\frac{3}{2}$ $\frac{37}{34}$ $\frac{39}{34}$ ſunt latera quadratorum ex quibus 4 $\frac{3}{4}$. componitur. Proinde à quolibet auferendo $\frac{1}{2}$ remanent quæſitorum quadratorum latera 1. $\frac{10}{17}$. $\frac{11}{17}$ quorum ſumma cum ſumma quadratorum conficit 4.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire quotlibet quadratos, quorum ſumma cum ſumma laterum datum conficiat numerum.

Hîc nulla conditio præſcribitur, quia quilibet Numerus in quatuor vel plures quotlibet quadratos diuidi poteſt. Sufficit ergo, ſi datus numerus tot quadrantibus vnitatis auctus, quot quadrati poſtulantur, diuidatur in totidem quadratos, quorum quilibet excedat $\frac{1}{4}$. ſeu quod idem eſt; ſi dati numeri quadruplum auctum tot vnitatibus quot quadrati poſtulantur, diuidatur in totidem quadratos, quorum quilibet excedat 1. Quod perficietur eadem arte.

QVÆSTIO QVARTA.

Inuenire quotlibet quadratos, quorum ſumma adſcito quolibet multiplice ſummæ laterum conficiat quadratum.

Sint inueniendi quatuor quadrati, quorum ſumma adſcito triplo ſummæ laterum, faciat 3. Quoniam per lemma vniuerſaliter demonſtratum ad decimam tertiam quarti, omnis quadratus auctus triplo ſui lateris, & numero 2 $\frac{1}{4}$ facit quadratum, cuius latus detracto 1 $\frac{1}{2}$ exhibet prioris quadrati latus. At quater 2 $\frac{1}{4}$ conficit 9. & volumus quatuor quadratos cum ſuis lateribus efficere 3. patet addito 3. ad 9. eò deuentum eſſe vt numerus 12. diuidatur in quatuor quadratos, quorum quilibet excedat 2 $\frac{1}{4}$. nam ſi à latere cuiuſlibet auferamus 1 $\frac{1}{2}$. reſtabunt quæſitorum quadratorum latera. Diuiditur autem 12. in quatuor quadratos 4. 4. $\frac{64}{25}$ $\frac{36}{25}$. quorum tres primi ſatis congruunt propoſito, cùm quilibet excedat 2 $\frac{1}{4}$. Quartus verò minor eſt. Quare oportet rurſus diuidere 12. in quatuor alios quadratos propoſito ſatisfacientes. Sumo 3. quadrantem ipſius 12. & quæro partem quadrati quæ illi addita quadratum faciat, ea eſt $\frac{1}{225}$. fitque quadratus $\frac{676}{225}$ à latere $\frac{26}{15}$. Ita igitur fingam quadratorum latera, vt quotlibet per adæqualitatem proximè accedat ad $\frac{26}{15}$. Et quia inuentorum latera ad eam-

dem redacta denominationem sunt $\frac{30}{15}$. $\frac{30}{15}$. $\frac{24}{15}$. $\frac{18}{15}$. sumo differentias numeratorum à 26. & fingo latera quæsitorum quadratorum 2 − 4 N. 2 − 4 N. $\frac{8}{5}$ + 2 N. $\frac{6}{5}$ + 8 N. fitque quadratorum summa 12 + 100 Q. − $\frac{32}{5}$ N. æqualis 12. vnde fit 1 N. $\frac{8}{125}$. seu $\frac{16}{250}$. Quare latera quadratorum sunt $\frac{436}{250}$. $\frac{436}{250}$. $\frac{432}{250}$. $\frac{428}{250}$. Proinde à quolibet auferendo 1 $\frac{1}{2}$ supersunt quæsitorum quadratorum latera $\frac{61}{250}$. $\frac{61}{250}$. $\frac{57}{250}$. $\frac{53}{250}$. suntque ipsi quadrati $\frac{3721}{62500}$. $\frac{3721}{62500}$. $\frac{3249}{62500}$. $\frac{2809}{62500}$. quorum summa cum triplo summæ laterum quod est $\frac{174000}{62500}$. facit $\frac{187500}{62500}$. seu 3.

QVÆSTIO XV.

VNITATEM diuidere in tres numeros, & addere cuilibet ipsorum alium atque alium datum numerum, & facere vnumquemque quadratum. Sunto dati 2. & 3. & 4. Rursum eò res rediit vt diuidam 10. in tres quadratos, vt primus ipsorum sit maior binario, secundus sit maior ternario, tertius sit maior quaternario. Si ergo vnitatem bifariam secantes, cuilibet datorum adiiciamus $\frac{1}{2}$. Oportebit quærere vnum quadratorum maiorem quàm 2. minorem verò quàm 2 $\frac{1}{2}$. Alterum maiorem quàm 3. minorem quàm 3 $\frac{1}{2}$. tertium denique maiorem quàm 4. minorem quàm 4 $\frac{1}{2}$. Eoque omnia deducuntur vt 10. ex duobus conflatum quadratis, rursus diuidam in alios duos, vt vnus eorum maior sit quàm 2. minor quàm 2 $\frac{1}{2}$. Et ab hoc si auferamus 2. inueniemus vnam partium vnitatis. Rursus alterum quadratorum diuidemus in alios duos quadratos, ita vt vnus ipsorum sit maior quàm 3. minor quàm 3 $\frac{1}{2}$. A quo item si detraxero 3. inueniam alterum quæsitorum. Eadem etiam ratione inueniemus tertium.

ΜΟΝΑΔΑ διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς, καὶ προσθεῖναι ἑκάστῳ αὐτῶν ἄλλον καὶ ἄλλον δοθέντα, καὶ ποιεῖν ἕκαστον τετράγωνον. ἔστωσαν οἱ δοθέντες ὅτε β. καὶ ὁ γ. καὶ ὁ δ. καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ τὸν ι. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. ὅπως αὐτῶν ὁ μὲν πρῶτος μείζων ἢ δυάδος. ὁ δὲ ἕτερος μείζων ἢ τριάδος. ὁ δὲ τρίτος μείζων ἢ μο δ. ἐὰν οὖν τεμόντες μο α. δίχα προσθῶμεν τοῖς δοθεῖσιν, ἀνὰ μονάδος ἡμίσειας, γίνεται ἕνα τῶν τετραγώνων. ζητεῖν μείζονα μὲν δυάδος, ἐλάσσονα δὲ μο β. α ς. ἕτερον μείζονα μὲν μο γ. ἐλάσσονα δὲ μο γ. α ς. τὸν δὲ τρίτον μείζονα μὲν μο δ. ἐλάσσονα δὲ μο δ. α ς. καὶ ἀπάγεται ἅπαντα εἰς τὸ τὸν ι. συγκείμενον ἐκ δύο τετραγώνων μεταδιελεῖν εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους, ὅπως εἷς αὐτῶν μείζων μὲν ἢ μο β. ἐλάσσων δὲ μο β. α ς. καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλωμεν δυάδα, εὑρήσομεν ἕνα τῶν ἀπὸ τῆς μονάδος. καὶ πάλιν τὸν ἕτερον τῶν τετραγώνων μεταδιαιροῦμεν εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους, ὅπως εἷς μὲν αὐτῶν μείζων ἢ μο γ. ἐλάσσων δὲ μο γ. α ς. καὶ πάλιν ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλωμεν μονάδας τρεῖς, εὑρήσομεν ἕνα τῶν ζητουμένων. ὥστε καὶ τὸν τρίτον ὁμοίως εὑρήσομεν.

IN QVÆSTIONEM XV.

EX adnotatis ad duodecimam & decimam tertiam pendet quæstionis huius enodatio, & verba Diophanti satis sunt perspicua, sed totam operationem, quam ipse prætermisit, in tyronum gratiam subiicere non grauabor. Quoniam 10. diuidendus est in tres quadratos, quorum primus sit maior quàm 2. secundus quàm 3. tertius quàm 4. Diuido primum 10. in duos quadratos quorum alter cadat inter 2. & 3. id fiet per ea quæ attulimus ad duodecimam, eruntque huiusmodi quadrati $\frac{1849}{841}$ & $\frac{6561}{841}$ quorum latera $\frac{43}{29}$ & $\frac{81}{29}$. Habeoque iàm vnum ex tribus quadratis quæsitis, puta $\frac{1849}{841}$. qui maior est quàm 2. minor quàm 3. vnde si auferatur 2. remanet vna ex quæsitis partibus vnitatis, puta $\frac{167}{841}$. Restat ergo vt reliquum quadratum $\frac{6561}{841}$ diuidamus in duos quadratos quorum alter cadat inter 3. & 4. Id fiet per ipsam operationem decimæ tertiæ. Quæro primum duos quadratos qui cadânt inter 3. & 4. quales sunt $\frac{256}{81}$ & $\frac{289}{81}$ quorum latera $\frac{16}{9}$ & $\frac{17}{9}$. Tum posito altero quadratorum 1 Q. altero $\frac{6561}{841}$ − 1 Q. posterioris latus ita fingendum est. vt fiat 1 N. maior quàm $\frac{16}{9}$ minor quàm $\frac{17}{9}$. fingi autem debet hoc latus à $\frac{81}{29}$ minus aliquot Numeris quorum duplum ductum in $\frac{81}{29}$ & diuisum per ipsorum numerorum quadratum vnitate auctum fiet valor Numeri. Quare posito numero Numerorum 1 N. fiet $\frac{162}{29}$ N. diuisus per 1 Q. + 1. maior quàm $\frac{16}{9}$ minor quàm $\frac{17}{9}$. Et vtraque æquatione per approximationem resoluta fiet 1 N. maior quàm $\frac{1266}{493}$ minor quàm $\frac{1291}{494}$. Ponatur ergo 2 $\frac{3}{4}$. & fingatur numeri $\frac{6561}{841}$ − 1 Q. latus, $\frac{81}{29}$ − 2 $\frac{3}{4}$ N. fiet 1 N. $\frac{7128}{3973}$. latus scilicet primi quadrati, eritque latus secundi $\frac{8505}{3973}$. suntque ipsi quadrati $\frac{50808384}{15784729}$ & $\frac{72335025}{15784729}$. à priore

si auferas 3. A posteriore 4. remanent reliquæ partes vnitatis [illegible], & [illegible] quibus si addas primam iam inuentam [illegible] seu vt idem sit denominator [illegible]. soluta erit quæstio.

Posset etiam aliter institui operatio, fingendo scilicet simul & semel tria latera quadratorum, eodem artificio quo iam vsi sumus ad decimam tertiam. Quoniam enim 10. diuidendus est in tres quadratos quorum primus superet 2. secundus 3. tertius 4. Diuido vnitatem in tres trientes, & cuilibet datorum numerorum addo $\frac{1}{3}$. fiuntque $2\frac{1}{3}$. $3\frac{1}{3}$. $4\frac{1}{3}$. Iam quæro partes quadrati quæ singulis additæ quadratum faciant, eæ sunt $\frac{1}{1296}$ $\frac{1}{36}$ $\frac{1}{144}$ & fiunt quadrati $\frac{3025}{1296}$ $\frac{121}{36}$ $\frac{625}{144}$. quorum latera $\frac{55}{36}$ $\frac{66}{36}$ $\frac{75}{36}$. vt omnium sit idem denominator. Oportet igitur ita fingere latera quadratorum, vt primum adæquetur $\frac{55}{36}$. secundum adæquetur $\frac{66}{36}$. tertium adæquetur $\frac{75}{36}$. Porrò numerus 10. diuiditur in tres quadratos, quorum latera 3. $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$. quæ vt reducantur ad eandem denominationem cum lateribus adæqualitatis, erunt hæc $\frac{540}{180}$ $\frac{108}{180}$ $\frac{144}{180}$. Illa verò $\frac{275}{180}$ $\frac{330}{180}$ $\frac{375}{180}$. Itaque fingentur per adæqualitatem latera primum $\frac{3}{5}$ + 167 N. secundum $\frac{4}{5}$ + 186 N. tertium 3 − 166 N. fitque summa quadratorum 10 + 89710 Q. − 492 N. æqualis 10. vnde fit 1 N. $\frac{246}{44855}$ sunt igitur quæsita latera, primum $\frac{13599}{8971}$. secundum $\frac{16328}{8971}$. tertium $\frac{18795}{8971}$. Ipsi verò quadrati $\frac{184932801}{80478841}$ $\frac{266603584}{80478841}$ $\frac{353252025}{80478841}$. Et si auferas 2. à primò, 3. à secundo, 4. à tertio, remanent quæsitæ partes vnitatis $\frac{23975119}{80478841}$ $\frac{25167061}{80478841}$ $\frac{31336661}{80478841}$.

Cæterùm non est dubium, & hîc requiri huiusmodi conditionem.

Oportet autem datorum numerorum summam vnitate auctam conficere numerum qui in tres quadratos diuidi possit.

Patet etiam eodem artificio quemlibet numerum diuidi posse in tres partes, ita vt cuilibet addendo alterum atque alterum numerum fiat quadratus. Et rursus tam vnitatem quàm numerum quemlibet diuidi posse in partes quotlibet, quibus addendo datos quoscunque numeros, fiant quadrati. Quæ omnia facilè mihi esset exemplis commonstrare, sed huic labori, ne sim prolixior, supersedebo.

QVÆSTIO XVI.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως συνδύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ι̅. καὶ ἐπεὶ ἐν τοῖς ζητουμένοις τρισὶν ἀριθμοῖς ὁ μείζων καὶ ὁ μέσος ποιοῦσι τετράγωνον. ὁμοίως καὶ ὁ μέσος μετὰ τοῦ τρίτου ποιεῖ τετράγωνον. καὶ ὁ τρίτος μετὰ τοῦ πρώτου. οἱ ἄρα τρεῖς δὶς γινόμενοι ποιοῦσι τρεῖς τετραγώνους, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶ μ° ι̅. ἀλλὰ δὶς οἱ τρεῖς εἰσι μ° κ̅. δεῖ οὖν τὸν κ̅. διαιρεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ᾖ μ° ι̅. ὁ δὲ κ̅. σύγκειται ἐκ δύο τετραγώνων, τοῦ τε ι̅ϛ̅. καὶ τοῦ δ̅. καὶ ἐὰν τάξωμεν ἕνα τῶν ζητουμένων μ° δ̅. δεήσει τὸν ι̅ϛ̅. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ᾖ μ° ι̅. ἐμάθομεν δὲ τὸν δοθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ὅπως εἷς τῶν αὐτῶν μείζων μὲν ᾖ μ° ϛ̅. ἐλάσσων δὲ μ° ι̅. ἔσονται ἀμφότεροι μ° ι̅ϛ̅. ὥστε διῃρήσθω κ̅. εἰς τρεῖς τετραγώνους ὅπως ἕκαστον αὐτῶν ἐλάσσονα εἶναι μ° ι̅. καὶ ἐὰν ἕκαστον ἀφέλωμεν ἀπὸ μ° ι̅. εὑρήσομεν τοὺς λοιποὺς οἳ συνδύο λαμβανόμενοι ποιοῦσι τετράγωνον.

DATVM numerum diuidere in tres numeros, vt bini coniuncti quadratum conficiant. Datus esto 10. Quoniam de tribus qui quæruntur numeris maior & medius simul faciunt quadratum, sed & medius cum tertio facit quadratum, & tertius cum primo. Ergo tres bis sumpti faciunt tres quadratos, quorum quilibet minor est quàm 10. Sed tres bis sumpti sunt 20. Oportet ergo diuidere 20. in tres quadratos, quorum quiuis minor sit quàm 10. Atqui 20. componitur è duobus quadratis 16. & 4. Et si de quæsitis vnum ponamus 4. oportebit diuidere 16. in duos quadratos, quorum quiuis minor sit quàm 10. Didicimus autem datum quadratum diuidere in duos quadratos, vt quiuis eorum maior sit quàm 6. minor quàm 10. sunto ambo simul 16. Itaque 20. diuisus erit in tres quadratos, quorum quilibet minor erit quàm 10. & si vnumquemque auferamus à denario, inueniemus reliquos, quorum bini coniuncti quadratum faciunt.

ee

IN QVAESTIONEM XVI.

OPERATIO Diophanti facilis est, & ex dictis in præcedentibus pendet. Certum est autem cùm tres numeri sumuntur bini & bini, vnumquemque bis sumi, quare posita summa numerorum 10. necesse est summam quadratorum quos bini conficiunt esse 20. Igitur oportet diuidere 20. in

tres quadratos quorum quilibet sit minor quàm 10. tum verò singulos quadratos ab ipso 10. detrahendo, remanebunt tres quæsiti numeri, vt constat ex Canone decimæ-sextæ primi. Quoniam verò 20. diuiditur suaptè natura in duos quadratos 4. & 16. quorum primus minor est quàm 10. ac proinde congruit proposito. Restat vt diuidamus 16. in duos quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 10. maior quàm 6. quia scilicet 10. & 6. conficiunt 16. Hoc autem fiet per operationem decimætertiæ hac arte. Sumo duos quadratos inter 6. & 10. puta 9. & $\frac{64}{9}$. quorum latera 3. & $\frac{8}{3}$. Positoque altero quadratorum quæsitorum 1 Q. altero 16 − 1 Q. fingo huius latus à 4 − tot numeris, vt fiat 1 N. maior quàm $\frac{8}{3}$. minor quàm 3. fiet autem valor numeri, si octuplum numeri Numerorum diuidatur per ipsorum quadratum vnitate auctum. Quare posito numero Numerorum 1 N. fiet $\frac{8 N}{1 Q + 1}$. maior quàm $\frac{8}{3}$. minor quàm 3. vnde vtraque hac æquatione resoluta, inuenietur 1 N. maior quàm $\frac{7}{3}$. minor quàm $\frac{5}{2}$. ponatur $\frac{12}{5}$. Igitur quadrati 16 − 1 Q. latus statuetur 4 − $\frac{12}{5}$. N. & fiet 1 N. $\frac{480}{169}$. latus scilicet vnius quæsitorum quadratorum, estque alterum $\frac{476}{169}$. Quamobrem tres quæsiti quadrati sunt 4. $\frac{230400}{28561}$. $\frac{226576}{28561}$. quos si auferas sigillatim à denario, restant tres denarij quæsitæ partes 6 $\frac{55210}{28561}$. & $\frac{59034}{28561}$.

Hinc collige huic quoque quæstioni præscribi debere huiusmodi conditionem.

Oportet dati numeri duplum diuidi posse in tres quadratos.

Potest etiam aliter institui operatio, fingendo simul & semel trium latera quadratorum, & imitando artificium decimæquartæ hoc pacto. Quoniam 20. diuidi debet in tres quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 10. sumo trientem de 20. puta 6 $\frac{2}{3}$. & quæro partem quadrati quæ huic addita quadratum faciat, hæc est $\frac{1}{144}$. fitque quadratus $\frac{961}{144}$. à latere $\frac{31}{12}$. fingenda ergo sunt latera quadratorum, vt vnumquodque adæquet $\frac{31}{12}$. Porrò numerus 20. diuiditur in tres quadratos, quorum latera 4. $\frac{8}{5}$. $\frac{6}{5}$. quæ redacta ad eandem denominationem cum numero adæqualitatis, fiunt 240. $\frac{96}{60}$. $\frac{72}{60}$. Ipse verò adæqualitatis numerus fit $\frac{155}{60}$. Quamobrem fingentur aptè latera quadratorum 4 − 85 N. $\frac{8}{5}$ + 59 N. $\frac{6}{5}$ + 83 N. estque summa quadratorum 20 + 17595 Q. − 292 N. æqualis 20. vnde fit 1 N. $\frac{292}{17595}$. sunt ergo latera quadratorum $\frac{9112}{3519}$. $\frac{9076}{3519}$. & $\frac{9070}{3519}$. Ipsi quadrati $\frac{83028544}{12383361}$. $\frac{82373776}{12383361}$. & $\frac{82264900}{12383361}$. quos si auferas sigillatim à denario, remanent vtique quæsitæ denarij partes $\frac{40805066}{12383361}$. $\frac{41459834}{12383361}$. $\frac{41568710}{12383361}$.

QVÆSTIO XVII.

DATVM numerum diuidere in quatuor numeros, vt terni coniuncti quadratum faciant. Datus esto 10. Quoniam qui à primo deinceps tres iuncti faciunt quadratum, itemque tres à secundo, & tres à tertio, & tres à quarto deinceps idem præstant. Ergo quatuor numeri ter sumpti faciunt quatuor quadratos. At quatuor numeri ter sumpti faciunt 30. Ergo 30. diuidendus est in quatuor quadratos, quorum quilibet minor sit quàm 10. Hoc autem sic inuenietur. Si per adæqualitatem statuamus quemlibet 7 $\frac{1}{2}$. & vnumquemque quadratorum auferamus de 10. inueniemus quæsitos. Sin autem animaduerto 30. componi ex 16. 9. 4. & 1. ponam 4. & 9. quandoquidem vterque minor sit quàm 10. si ergo 17. diuidamus in duos quadratos vt didicimus, quorum alter maior sit quàm 8 $\frac{1}{2}$. minor quàm 10. erit vterque ipsorum minor quàm 10. Proinde si vtrumque eorum de 10. auferamus, inueniemus reliquos de quæsitis. Nam duo iam sunt inuenti, nempe 6. & 1 & soluetur quæstio.

ΔΟΘΕΝΤΑ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τέσσαρας ἀριθμούς, οἳ σὺν τρεῖς λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. τετάχθω δὴ τὸν ι. ἐπεὶ οὖν οἱ ἀπὸ τοῦ πρώτου τρεῖς κατὰ τὸ ἑξῆς ποιοῦσι τετράγωνον. ἀλλὰ καὶ οἱ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τρεῖς, τὸ αὐτὸ ποιοῦσι, καὶ οἱ ἀπὸ τοῦ τρίτου τρεῖς τὸ αὐτὸ ποιοῦσι. καὶ οἱ ἀπὸ τοῦ τετάρτου τρεῖς. οἱ ἄρα τέσσαρες τρὶς ποιοῦσι τέσσαρας τετραγώνους. ἀλλ' οἱ τέσσαρες τρὶς ποιοῦσι μο λ δηλονότι ἄρα μο λ. διελεῖν εἰς τέσσαρας τετραγώνους ὅπως ἕκαστος ἐλάσσων ᾖ μο ι. τοῦτο δὲ οὕτως εὑρεθήσεται. ἐάν τε διὰ τῆς παρισότητος τάξαντες ἕκαστον αὐτῶν μο ζ. ∠. καὶ ἕκαστον τετραγώνων ἀφέλωμεν ἀπὸ μο ι. εὑρήσομεν τοὺς ζητουμένους, εἰ δὲ μὲν ὁρῶ τὸν λ. συγκείμενον ἐκ τε τοῦ ις. καὶ τοῦ θ. καὶ τοῦ δ. καὶ τῆς μο α. θήσομεν τὸν δ. καὶ τὸν θ. ἐπειδὴ ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ἐστὶ μο ι. λοιπὸν γίνεται μο ιζ. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους, ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν ἐλάττων ᾖ μο ι. ἐὰν οὖν τὸν ιζ. διέλωμεν εἰς δύο τετραγώνους ὡς ἐμάθομεν ὥστε ἑκάτερον αὐτῶν μείζονα εἶναι μο η. ∠. ἐλάσσονα δὲ μο ι. ἔσται ἑκάτερος αὐτῶν ἐλάσσων μο ι. καὶ ἐὰν ἑκάτερον αὐτῶν ἀφέλωμεν ἀπὸ μο ι εὑρήσομεν τοὺς λοιποὺς τῶν ζητουμένων [δύο γὰρ ἤδη εὑρήκαμεν] ὃν μὲν μο ϛ. ὃν δὲ μο α. ὥστε λελύσθαι τὸ ζητούμενον.

IN QVAESTIONEM XVII.

DVPLICEM operandi modum tangit Diophantus in proposito exemplo. Primus talis est. Quoniam 30. diuidendus est in quatuor quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 10. sumo quadrantem de 30. puta $7\frac{1}{2}$. & quæro partem quadrati quæ huic addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{16}$. fitque quadratus $\frac{121}{16}$. à latere $\frac{11}{4}$. Curandum ergo vt diuidatur 30. in quatuor quadratos, ita vt cuiuslibet latus adæquatur $\frac{11}{4}$. Atqui 30. suaptè natura diuiditur in quatuor quadratos, quorum latera sunt 4. 3. 2. 1. Quare per adæqualitatem statuentur quæsitorum quadratorum latera 4 − 5 N. 3 − 1 N. 2 + 3 N. 1 + 7 N. eritque summa quadratorum 30 + 84 Q. − 20 N. æqualis 30. vnde fiet 1 N. $\frac{5}{21}$. Erunt igitur latera quadratorum $\frac{59}{21}$. $\frac{58}{21}$. $\frac{57}{21}$. $\frac{56}{21}$. Ipsi verò quadrati $\frac{3481}{441}$. $\frac{3364}{441}$. $\frac{3249}{441}$. $\frac{3136}{441}$. à quibus si auferatur sigillatim numerus 10. remanent quæsitæ denarij partes $\frac{929}{441}$. $\frac{1046}{441}$. $\frac{1161}{441}$. $\frac{1274}{441}$.

Secundus operandi modus talis est. Quoniam 30. suapte natura diuiditur in quatuor quadratos 16. 9. 4. 1. quorum duo 9. & 4. proposito congruunt cùm sint minores denario, restat vt reliquorũ summam. puta 17. diuidamus in duos alios quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 10. maior quàm 7. quod si fiet, sumo semissem de 17. puta $8\frac{1}{2}$ & quæro partem quadrati quæ illi addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{144}$ & fit quadratus $\frac{1225}{144}$ à latere $\frac{35}{12}$. Quare per adæqualitatem fingentur latera quadratorum 4 − 13 N. & 1 + 23 N. est summa quadratorum 17 + 698 Q − 58 N. æqualis 17. vnde fit 1 N. $\frac{29}{349}$. Quare latera quadratorum sunt $\frac{1019}{349}$ $\frac{1016}{349}$. Ipsi quadrati $\frac{1038361}{121801}$ & $\frac{1032256}{121801}$. quibus addendo tertium & quartum 4. & 9. habemus totum 30. diuisum in quatuor quadratos, quos sigillatim auferendo à denario, remanent quæsitæ denarij partes, puta $\frac{185754}{121801}$. $\frac{179649}{121801}$. 6. & 1.

Cæterùm in textu Græco verba illa mendo non carent, ἐὰν οὖν τὸν ιζ. διέλωμεν εἰς δύο τετραγώνους, ὡς ἐμάθομεν, ὥστε ἑκάτερον αὐτῶν μείζονα εἶναι μο. η. α΄ β. ἐλάσσονα δὲ μο. ι. nam si numerus η. α΄ β΄. hoc est $8\frac{1}{2}$ retinendus est, procul dubio non ἑκάτερον, sed ἕτερον legendum est, nam impossibile est numerum 17. diuidi in duos quadratos quorum vterque sit maior quàm $8\frac{1}{2}$ vt euidens est. Quod si vocem ἑκάτερον retinere libet, numerus η. α΄ β΄ mutandus est in ζ, seu in 7. verè enim numerus 17. diuidendus est in duos quadratos quorum vterque sit maior quàm 7. minor quàm 10. sed & postrema verba mutila erant, vt ex iis quæ adiecimus manifestum est.

Demum moneo eodem prorsus artificio datum numerum diuidi posse in quinque partes, vt quaternæ quadratum conficiant, vel in sex partes, vt quinæ quadratum faciant, & sic in infinitum. Restat vt quæstionem explicemus, quam in hunc locum reiecimus in adnotatione ad sextam tertij nimirum.

Inuenire quinque numeros quadrato æquales, vt quaterni reliquum superent quadrato numero.

Ponatur summa eorum quilibet quadratus, puta 1. Quia ergo vt ostensum est ad vigesimam primi summa excessuum tripla est summæ numerorum, erit summa excessuum 3. Oportet igitur diuidere 3. in quinque quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 1. Et quidem diuidendo bis vnitatem in duos quadratos, totus 3. diuisus erit in quinque quadratos, puta in $\frac{9}{25}$. $\frac{16}{25}$. $\frac{144}{169}$. $\frac{25}{169}$. 1. Sed quia quintus non est minor vnitate, adiicio eum vni priorum, puta $\frac{25}{169}$ & fit $1\frac{25}{169}$. diuidendus rursus in duos alios quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 1. semissis summæ est $\frac{97}{169}$. cui proximus est quadratus $\frac{100}{169}$. à latere $\frac{10}{13}$. Ita ergo diuidendus $1\frac{25}{169}$. in duos quadratos vt cuiuslibet latus adæquetur $\frac{10}{13}$. Quare fingentur latera quadratorum 1 − 3 N. & $\frac{5}{13}$ + 7 N. fitque summa quadratorum $1\frac{25}{169}$ + 58 Q. − $\frac{8}{13}$ N. æquales $1\frac{25}{169}$. vnde fit 1 N $\frac{4}{377}$ sunt ergo latera quadratorum $\frac{365}{377}$ & $\frac{173}{377}$. ipsi quadrati $\frac{133225}{142129}$. & $\frac{29929}{142129}$. Quamobrem quinque excessus sunt $\frac{9}{25}$. $\frac{16}{25}$. $\frac{144}{169}$. $\frac{133225}{142129}$. $\frac{29929}{142129}$. quos si auferas sigillatim ab vnitate, & residuorum semisses sumas, fient quæsiti numeri $\frac{8}{25}$. $\frac{9}{50}$. $\frac{25}{338}$. $\frac{4452}{142129}$. $\frac{56100}{142129}$.

Ita si quærantur sex numeri quadrato æquales, quorum quini reliquum superent quadrato numero, ponetur summa numerorum quilibet quadratus, puta 1. Et quia excessuum summa est quadrupla summæ numerorum, diuidetur 4. in sex quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 1. quod fiet eodem prorsus artificio. Et sic ad quotlibet numeros quæstio extendetur.

Immo res extenditur, etiam si proponatur quilibet datus numerus diuidendus in quotlibet partes, vt omnium vna dempta super reliquam excessus sit quadratus numerus. Sed si tres tantùm partes postulentur, oportebit datum numerum diuidi posse in tres quadratos.

QVÆSTIO XVIII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος προσλαμ-

INVENIRE tres numeros, vt cubus summæ eorum adsciscens quemlibet

ipſorum, faciat cubum. Statuatur ſumma trium 1 N. Quæſitorum autem alter 7 C. alter 26 C. tertius 63 C. & conſtat cubum ſummæ adſcito quolibet ipſorum facere cubum. Reliquum eſt vt tres iſti coniuncti faciant 1 N. ſed tres coniucti faciunt 96 C. Hoc ergo æquatur 1 N. & omnia per numerum diuidantur, fiunt 96 Q. æquales 1. & vnitas quidem quadratus eſt, ac ſi 96. item quadratus eſſet, ſoluta fuiſſet quæſtio. Proinde quæro vnde 96. ortus ſit, eſt nimirum ſumma trium numerorum, quorum quilibet vnitate auctus cubum facit. Itaque eò res rediit vt inueniantur tres numeri, quorum quilibet vnitate adſcita cubus fiat, ſed & ſumma trium ſit quadratus. Ponatur primi latus 1 N. + 1. ſecundi verò 2 − 1 N. tertij 2. cubi fient, primus quidem 1 C. + 3 Q. + 3 N. + 1. ſecundus 6 Q. + 8 − 1 C. − 12 N. tertius 8. Aufero ab vnoquoque vnitatem, & ſtatuo primum 1 C. + 3 Q. + 3 N. ſecundum 6 Q. + 7. − 1 C. − 12 N. tertium 7. Reliquum eſt vt ſumma eorum ſit quadratus, fit autem 9 Q. + 14 − 9 N. æqualis quadrato à latere 3 N. − 4. & fit 1 N. $\frac{2}{15}$. erit igitur quæſitorum primus $\frac{1538}{3375}$. ſecundus $\frac{18577}{3375}$. tertius 7. Venio ad id quod initio propoſitum erat, & pono primum $\frac{1538}{3375}$ C. ſecundum $\frac{18577}{3375}$ C. tertium 7 C. & rurſus ſtatuo trium ſummam 1 N. & fiunt $\frac{43740}{3375}$ C. æquales 1 N. & omnium decimaquinta pars ſumatur, & omnia per numerum diuidantur, fiunt 2916 Q. æquales 225. & fit 1 N. $\frac{15}{54}$. Ad poſitiones, & conſtat.

βὰν ἕκαστον, ποιῇ κύβον. τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ς^ος ᾱ. ἕκαστος δὲ τῶν ζητουμένων, ὁ μὲν κύβων ζ̄. ὁ δὲ κύβων κς̄. ὁ δὲ κύβων ξγ̄. καὶ μένει ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος προσλαβὼν ἕκαστον αὐτῶν ποιεῖ κύβον. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ς^ῷ ᾱ. ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσι κ^υ ϟς̄. ὥστε κ^υ ϟς̄. ἴσοι ς^ῷ ᾱ. καὶ πάντα παρὰ ἀριθμὸν δ^υ ϟς̄. ἴσαι μ^ο ᾱ. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος. εἰ ἦσαν καὶ αἱ δ^υ ϟς̄ τετράγωνος, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον. ὅθεν ζητῶ πόθεν ἐστὶ ὁ ϟς̄. ἔστι δὲ τριῶν ἀριθμῶν σύνθεμα, ὧν ἕκαστος μετὰ μονάδος μιᾶς ποιεῖ κύβον. ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν ἀριθμοὺς τρεῖς, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μετὰ μονάδος μιᾶς ποιῇ κύβον, ἔτι δὲ τὸ σύνθεμα τῶν τριῶν ᾖ τετράγωνος. ἐκκείσθω ἡ μὲν τοῦ πρώτου πλευρὰ ς^ου ᾱ. μ^ο ᾱ. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου μ^ο β̄. λείψει ς^ου ᾱ. ἡ δὲ τοῦ τρίτου μ^ο β̄. οἱ κύβοι γίνονται. ὁ μὲν κ^υ ᾱ. δ^υ γ̄. ς^οὶ γ̄. μ^ο ᾱ. ὁ δὲ δ^υ ς̄. μ^ο η̄. λείψει κ^υ ᾱ. ς^οῖς ιβ̄. ὁ δὲ μ^ο η̄. αἴρω ἀπὸ ἑκάστου μ^ο ᾱ. καὶ τάσσω τὸν μὲν πρῶτον κ^υ ᾱ. δ^υ γ̄. ς^οὺς γ̄. τὸν δὲ δεύτερον δ^υ ς̄. μ^ο ζ̄. λείψει κ^υ ᾱ. ς^οῖς ιβ̄. τὸν δὲ τρίτον μ^ο ζ̄. λοιπόν ἐστι αὐτοὺς συντεθέντας ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ δ^υ θ̄. μ^ο ιδ̄ ⋔ ς^οῖς θ̄. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς^ῶν γ̄. λείψει μ^ο δ̄. καὶ γίνεται ὁ ς^ος β̄ ιε^ων. ἔσται τῶν ζητουμένων ὁ μὲν πρῶτος ‚αφλη γτοε^ων. ὁ δὲ δεύτερος ᾱ. ‚ηφοζ γτοε^ων. ὁ δὲ τρίτος ζ̄. ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὸν μὲν κ^υ ‚αφλη γτοε^ων. τὸν δὲ κ^υ ᾱ. ‚ηφοζ γτοε^ων. τὸν δὲ κ^υ ζ̄. καὶ πάλιν τάσσομεν τοὺς τρεῖς ς^ὸν ᾱ. καὶ γίνονται κύβοι δ̄. ‚γψμ γτοε^ων. ἴσοι ς^ῷ ᾱ. πάντων τὸ πεντεκαιδέκατον καὶ παρὰ ἀριθμόν, καὶ γίνονται δ^υ ‚βϡις̄. ἴσαι μ^ο σκε̄. καὶ γίνεται ὁ ς^ος ιε νδ^ων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. καὶ μένει.

IN QVAESTIONEM XVIII.

PENDET omnino ſolutio quæſtionis huius, à lemmate aſſumpto, quo ſcilicet quæruntur tres cubi vnitate multati, quorum ſumma ſit quadratus numerus. Et ponit Diophantus latus primi 1 N + 1. latus ſecundi 2 − 1 N. vbi numeri contrario ſigno afficiuntur, vt etiam in cubis, numeri cuborum contrario ſigno reperiantur affecti, cùm hinc reperiatur + 1 C. inde verò − 1 C. vnde fit vt in ſumma cuborum cubis ſe mutuo elidentibus, remaneant ſolùm Quadrati, Numeri, & Vnitates; cùm autem tertij cubi latus ponatur quilibet vnitatum numerus. puta 2. eius cubus vnitate multatus, puta 7. eſt certus vnitatum numerus, cui additus ſummæ priorum cuborum vnitate multatorum, non conſtituit diuerſam ſpeciem, quia in illa ſumma, vt dictum eſt, reperiuntur vnitates; ſic fit ſumma trium cuborum vnitate multatorum 9 Q. + 14. − 9 N. quæ quadrato æquari debet. Hoc verò fieri non poſſet, ſi numerus quadratorum 9. non eſſet quadratus, vt euidens eſt, quod tamen non animaduertit Xilander. Vt ergo poſitiones arte certa, non caſu inſtituantur, videndum vnde in ſumma cuborum contentus numerus quadratorum prouenerit. Atqui eſt triplum ſummæ vnitatum] quæ ponuntur in primo & ſecundo latere, quia videlicet in primo latere ponitur 1.

in secundo 2. quorum summa 3. cuius triplum 9. Idcirco 9 Q. reperiuntur in summa cuborum. Igitur cùm in primo latere ponatur 1. cuius triplum 3. oportebit in secundo latere constituere tot vnitates, quarum triplum adsumpto 3 faciat quadratum, id autem facillimè fiet, infinitisque modis si à quolibet quadrato auferatur 3. & residui triens sumatur, vt si à 9. auferas 3. residui triens 2. poni poterit in secundo latere, vt fecit Diophantus. Rursus si à 36. auferas 3. residui triens 11. congruet proposito, & poni poterit secundum latus 11 − 1 N. & sic in infinitum. Tertius quoque cubus poni potest quilibet vnitatum numerus cubicus; ita si loco 8. quem posuit Diophantus, sumas 27. erit summa trium cuborum vnitate multatorum 9 Q. + 33 − 9 N. æqualis quadrato, cuius latus si fingas 3 N − 6. fiet 1 N $\frac{1}{9}$. & diuersa omnino continget solutio ab ea quam tradit Diophantus, quam sanè in falsis numeris assignauit Xilander, in eo allucinatus quod putauit 1 N. fieri $\frac{17}{8}$. cum fiat $\frac{5}{18}$. Quare tres quæsiti numeri sunt $\frac{1538}{157464}$. $\frac{81570}{157464}$. $\frac{23625}{157464}$. Quorum summa est $\frac{5}{18}$. cuius cubus $\frac{125}{5832}$. quo addito ad singulos numeros, fiunt cubi $\frac{4913}{157464}$. $\frac{85939}{157464}$. $\frac{27000}{157464}$. quorum latera $\frac{17}{54}$. $\frac{23}{5}$. $\frac{30}{54}$.

Animaduersione præterea dignum est numeri 9 Q + 14 − 9 N. latus cautè fingendum esse. Quia enim latus secundi cubi positum est 2 − 1 N. necesse est 1 N. minorem esse quàm 2. fiet autem valor numeri fingendo latus quadrati 3 N − tot vnitatibus, quarum quadratus superet 14. diuidendo harum vnitatum quadratum multatum numero 14. per sextuplum earundem vnitatum multatum numero 9. Oportet ergo quotientem hunc minorem esse quàm 2. hoc est $\frac{1 Q - 14}{6 N - 9}$ minor est quàm 2. & tandem 1 Q + 2 minor est quàm 12 N. Qua æquatione per approximationem resoluta, fit 1 N 11 $\frac{2}{3}$. Ponetur igitur ficticium latus 3 N − tot vnitatibus quæ sint minores quàm 11 $\frac{2}{3}$. dum earum quadratus excedat 14. Ponit Diophantus 3 N − 4. vnde fit 1 N. $\frac{2}{15}$.

Cæterùm ex ipsius operationis ductu manifestum est; quæstionem ad quotlibet numeros extendi posse. Nam verbi gratia propositum sit inuenire quatuor numeros, vt cubus summæ eorum, quouis adsumpto cubum faciat. Sanè quærendi erunt quatuor cubi, quorum vnitate multatorum summa sit quadratus numerus. Ponatur primi latus 1 N. + 1. secundi 2 − 1 N. tertij 2. quarti 3. Erit summa cuborum vnitate multatorum 9 Q. + 40 − 9 N. æqualis quadrato. Quod si Numeri determinationem quæras inuenies fingendum latus 3 N. − tot vnitatibus quæ sint minores quam 13 $\frac{1}{3}$. ita vt earum quadratus excedat 40. Ponantur ergo 7. & sit latus ficititium 3 N. − 7. fiet 1 N. $\frac{3}{11}$. Erunt igitur quatuor cubi $\frac{2744}{1331}$. $\frac{6859}{1331}$. 8. 27. & à singulis si auferas vnitatem, & apponas signum cuborum residuis, erunt quatuor quæsiti numeri $\frac{1413}{1331}$ C. $\frac{5528}{1331}$ C. 7 C. 26 C. Quorum summa in minimis $\frac{4624}{121}$. C. æquatur 1 N. vnde fit 1 N. $\frac{11}{68}$. Ad Positiones, erunt quæsiti numeri $\frac{1880703}{418508992}$. $\frac{7357768}{418508992}$. $\frac{12400927}{418508992}$. $\frac{46060586}{418508992}$. quorum summa vtique est $\frac{11}{68}$. cuius cubus $\frac{1331}{314432}$. adscito quolibet ipsorum, cubos facit $\frac{3652264}{418508992}$. $\frac{9129329}{418508992}$. $\frac{14172488}{418508992}$. $\frac{47832147}{418508992}$. quorum latera $\frac{154}{748}$. $\frac{209}{748}$. $\frac{242}{748}$. $\frac{363}{748}$.

QVÆSTIO XIX.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος λείψας ἕκαστον ποιῇ κύβον. τετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς ς^ο α. καὶ αὐτῶν ὁ μὲν κύβων ζ^η. ὁ δὲ κύβων κς^{κζ}. ὁ δὲ κύβων ξγ^{ξδ}. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ς^ο α. γίνεται κυβικὸν δ͵ωοζ ͵αψκη. ἴσον ς^ο α. πάντα παρὰ ἀριθμὸν, καὶ γίνεται δυναμοστὸν δ͵ωοζ ͵αψκη. ἴσον μ^ο α. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος. δέησει ἄρα καὶ τὰς δυνάμεις εἶναι τετράγωνον. πόθεν ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν δ^ο ἐκ τοῦ ἀπὸ τριάδος ἀφαιρεῖσθαι τρεῖς κύβους, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶ μονάδος μιᾶς. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς κύβους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν, ἐλάσσων ᾖ μ^ο α. τὸ δὲ σύνθεμα αὐτῶν ἀρθὲν ἀπὸ τριάδος ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ζητοῦμεν ἕκαστον αὐτῶν κύβον ἐλάσσονα εἶναι μονάδος μιᾶς, ἐὰν ἄρα κατασκευάσωμεν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ἐλάσσονας μονάδος α. πολλῷ ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων μονάδος α. ὥστε ὀφείλει ὁ καταλειπόμενος τετρά-

INVENIRE tres numeros, vt cubus summæ eorum, quouis ipsorum detracto, faciat cubum. Ponatur rursus trium summa 1 N. & ipsi $\frac{7}{8}$ C. $\frac{26}{27}$ C. $\frac{63}{64}$ C. superest vt tres coniuncti æquentur 1 N. fit ergo $\frac{4877}{1728}$ C. æquale 1 N. & omnia per numerum diuidantur, fit $\frac{4877}{1728}$ Q. æquale 1. est autem 1. quadratus. Oportebat ergo & numerum quadratorum esse quadratum: vnde autem is natus est? Quod à ternario subducti sunt tres cubi, quorum quilibet minor est vnitate. Eò itaque res redit, vt inueniantur tres cubi, quorum quilibet sit minor vnitate, summa autem ipsorum à ternario sublata, faciat quadratum. Et quia volumus cuborum quemque minorem esse vnitate, si statuamus tres numeros simul vnitate minores, multo minores singuli erunt vnitate. Sic autem quadratum qui relinquetur, oportebit maiorem esse binario. Statuatur quadratus

dratus qui relinquitur 2 $\frac{1}{4}$. Oportet igitur $\frac{3}{4}$ diuidere in tres cubos, & horum multiplicia secundum aliquos cubos diuisa. Esto secundum 216. Oportet igitur vt diuidamus 162. in tres cubos. At 162. componitur ex cubo 125. & interuallo duorum cuborum 64. & 27. Habemus autem in porismatis, omnium duorum cuborum interuallum componi ex duobus cubis. Recurramus ad propositum initio, & sumamus vnumquemque cuborum inuentorum, & quolibet ab vnitate subtracto, residua statuamus pro quæsitis numeris, & sit summa 1 N. Ita fiet vt cubus summæ, quouis ipsorum detracto cubum faciat. Restat vt tres simul æquentur 1 N. fit autem trium summa 2 $\frac{1}{4}$ C. Hoc ergo æquatur 1 N. vnde fit 1 N. $\frac{2}{3}$. Ad positiones.

γωνος μείζων ἐστὶ δυάδος. τετάχθω καταλειπόμενος τετράγωνος μο β. α δ^ων. δεῖ οὖν τὰ γ δ^α. διελεῖν εἰς τρεῖς κύβους. καὶ κατὰ τούτων πολλαπλάσια κατά τινων κύβων διαιρεθέντων. ἔστω δὲ κατὰ τὸν σις. ὀφείλομεν οὖν τὸν ρξβ. διελεῖν εἰς τρεῖς κύβους. σύγκειται δὲ ὁ ρξβ. ἔκ τε κύβου τοῦ ρκε. καὶ δύο κύβων ὑπεροχῆς τοῦ τε ξδ. καὶ τοῦ κζ. ἔχομεν δὲ ἐν τοῖς πορίσμασιν, * ὅτι πάντων δύο κύβων ἡ ὑπεροχὴ κύβων * ἀνατρέχομεν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσομεν ἕκαστον κύβων εὑρεθέντων. τοὺς δὲ τρεῖς ἀριθμὸν α. καὶ συμβήσεται τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον λείψαντα ἕκαστον, ποιεῖν κύβον. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ς^οῖς α. γίνονται δὲ οἱ τρεῖς κυ β. α δ^ων. ταῦτα ἴσα ς^ῷ α. ὅθεν γίνεται ὁ ς^ος μο β γ^ων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

OBSERVATIO D. P. F.

Solutionis modum Diophantus non exprimit, aut græca corrupta sunt. Bachetus casu adiutum Diophantum arbitratur, quod tamen non admittimus, cum Diophantæam methodum non difficilem inuentu existimemus, inueniendus quadratus binario maior ternario minor qui à ternario subtractus relinquat numerum in tres cubos diuidendum. Ponatur quæsiti quadrati latus esse quemlibet numerorum numerum − vnitate v. g. 1 N − 1. ipsius quadratus à ternario subtractus relinquit 2 − 1 Q + 2 N. cui inueniendi tres cubi æquales qui sic effingendi vt æqualitas tandem consistat inter duas tantum species proximas, id quidem innumeris modis construi potest. Sit vnius ex cubis latus 1 − $\frac{1}{3}$ N. alterius (vt numerus numerorum in ambobus cubis conficiat 2 N.) sit 1 + 1 N. tertii latus in numeris duntaxat fingendum, qui etiam ne valor 1 N. quæsitos terminos euadat, debent notari signo defectus, nec est operosum eum numerum numerorum sumere cuius valor æquationem ad præstitutos redigat terminos, hoc peracto patet primum ex cubis esse minorem vnitate vt quærebamus, cum igitur secundus sit maior & tertius signo defectus notetur, patet differentiam secundi & tertij æquandam esse duobus cubis quam ob rationem ad secundam operationem & Diophantus & nos deuoluimur.

Habemus autem, inquit, in porismatibus omnium duorum cuborum interuallum componi ex duobus cubis.

Hæret iterum Bachetus & destitutus porismatibus Diophanteis, hanc quæstionem secundam determinatione indigere contendit, duorum quippè cuborum interuallum eâ tantum conditione in duos cubos diuidere docet dummodo maior datorum cuborum excedat duplum minoris. Nam quomodo omnium duorum cuborum interuallum diuidatur in duos cubos ignotum sibi ingenuè profitetur. Nos supra ad quæstionem libri 4. secundam, & hanc & reliquas huius materiæ quæstiones generaliter construendi modum fæliciter deteximus.

IN QVAESTIONEM XIX.

HÆC propositio est de numero earum, quas vt ad nos peruenerunt, fateor me non satis assequi. Quamuis enim de illius solutione satis mihi constet, vt infrà patebit, duo tamen sunt quæ

totam eius tractationem valde imperfectam mihi videri faciunt. Primum enim licet ingeniosè inferat Diophantus inueniendos esse tres cubos, quorum quilibet sit vnitate minor, ita vt summa eorum à ternario sublata relinquat quadratum, vnde concludit curandum esse vt tres cubi simul sint vnitate minores, sic enim quilibet multo magis erit vnitate minor, quare sequitur quadratum qui relinquitur, summam cuborum auferendo à ternario, debere esse maiorem quàm 2. minorem quàm 3. licet inquam hæc subtiliter edisceerat Diophantus, non docet tamen quomodo talis inueniendus sit quadratus, & cur $2\frac{1}{4}$. sumat potiùs quàm alium quemlibet ex infinitis qui cadunt inter 1. & 3. Certè, vt ex processu apparet, talis deligendus est quadratus, quo à ternario sublato, relinquatur numerus ex tribus cubis compositus. Id ergo qui fieri possit arte certa, docere debuit Diophantus, neque enim in promptu est si loco quadrati $2\frac{1}{4}$. sumatur quadratus $2\frac{7}{9}$. quomodo residuum de 3. puta $\frac{2}{9}$. diuidi possit in tres cubos, eademque de alijs ratio. Quamobrem casu factum videtur, vt sumpserit author $2\frac{1}{4}$. quo de 3. sublato relinquitur $\frac{3}{4}$. ex tribus cubis compositus.

Deinde porisma, quod hîc assumitur, quale sit non est facile diuinare, cùm Græca Diophanti hoc loco mutila sint. Si verò libeat amplecti quod nostra versione exhibemus, sanè docuimus ad secundam quarti. Duorum cuborum interuallũ diuidi posse in duos cubos, dummodo maior datorum cuborum excedat duplum minoris. Sed quomodo omnium duorum cuborum interuallum diuidatur in duos cubos, ignotum mihi adhuc. Nam nec operationes loco citato allatæ, nec canon ibidem traditus locum habent, cùm duplum minoris cubi excedit maiorem. Itaque penes eruditos iudicium esto, vtrum ex propositionis huius deprauatione huiusmodi difficultates ortum habeant, an verò ipsi Diophanto imputandæ sint, qui cùm fortè quadratum $2\frac{1}{4}$. inuenisset quo de 3. sublato superest $\frac{3}{4}$. compositus ex tribus cubis, arduum problema vt cumque potuit, explicauit, melioribus destitutus auxiliis. Nos quod superest, illius solutionem afferemus à Diophanto prætermissam. Quoniam diuidere oportet $\frac{3}{4}$. in tres cubos, reducatur ad denominatiom cubicam, puta ad $\frac{162}{216}$. Itaque cùm denominator sit cubus, superest vt numeratorem 162. diuidamus in tres cubos. Porro 162. componitur ex cubo 125. & ex 37. interuallo cuborum 27. & 64. Quare cùm duplum minoris non superet moiorem, poterit 37. diuidi in duos cubos per Canonem primæ earum quas ad secundam quarti attulimus. Quod fiet hoc pacto. Ducito ter vtrumque datorum cuborum in latus alterius, fient 324. & 576. quos diuide per summam cuborum, fiunt $\frac{324}{91}$. $\frac{576}{91}$. Tum aufer priorem à maiore latere 4. & aufer minus latus 3. à posteriore, remanent quæsitorum cuborum latera $\frac{40}{91}$. & $\frac{303}{91}$. sunt ergo cubi $\frac{64000}{753571}$. & $\frac{27818127}{753571}$. quorum summa 37. his ergo adnumerando 125. fit trium cuborum summa 162. vt ergo $\frac{162}{216}$. diuidatur in tres cubos, diuidemus sigillatim tres inuentos cubos per denominatorem 216. & fient quæsiti cubi $\frac{125}{216}$. $\frac{8000}{20346417}$. $\frac{1030301}{6028568}$. à lateribus $\frac{5}{6}$. $\frac{20}{273}$. $\frac{101}{182}$. & vnumquemque cubum auferendo ab vnitate, relinquuntur $\frac{91}{216}$. $\frac{20338417}{20346417}$. & $\frac{4998267}{6028568}$. Statuamus igitur quæsitorum numerorum summam 1 N. ipsos autem $\frac{91}{216}$ C. $\frac{20338417}{20346417}$ C. $\frac{4998267}{6028568}$ C. nam horum vnoquoque ab 1 C. detracto, relinquitur cubus, vnus scilicet ex tribus cubis suprà allatis. Superest vt horum summa sit 1 N. est autem $2\frac{1}{4}$ C. Igitur fit 1 N. $\frac{2}{3}$. cuius cubus $\frac{8}{27}$. suntque quæsiti numeri ad eandem denominationem redacti $\frac{1851523947}{14832537993}$. $\frac{4393098072}{14832537993}$. $\frac{3643736643}{14832537993}$. quorum summa est vtique $\frac{2}{3}$. & auferendo vnumquemque à cubo summæ hoc est à $\frac{8}{27}$. seu à $\frac{4394826072}{14832537993}$. relinquuntur cubi $\frac{2543302125}{14832537993}$. $\frac{1728000}{14832537993}$. $\frac{751089429}{14832537993}$. quorum latera $\frac{1365}{2457}$. $\frac{120}{2457}$. $\frac{909}{2457}$.

QVÆSTIO XX.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος ἀρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῇ κύβον. τετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς ς̄ α. τῶν δὲ τριῶν ὁ μὲν κ^υ β. ὁ δὲ κ^υ θ. ὁ δὲ κ^υ κη. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ς^ων α. ἀλλ' οἱ τρεῖς εἰσὶ κύβοι λθ. ὥστε κ^υ λθ. ἴσοι ς^ων α. πάντα παρὰ ς^ον. ὥστε δυνάμεις λθ. ἴσαι μ^ο α. καὶ εἰ ἦσαν αἱ δυνάμεις λθ. τετράγωνος, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον, ἔστι δὲ ὁ λθ. τριῶν κύβων τὸ σύνθεμα μετὰ μ^ο τριῶν. δέησει ἄρα εὑρεῖν τρεῖς κύβους, ὧν τὸ σύνθεμα μετὰ μ^ο γ. ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω οὖν ἡ μὲν τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ ς^ου α. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου μ^ο γ. λεῖψει ς^ου α. ἡ δὲ τοῦ λοιποῦ μονάδων τινῶν. ἔστω δὴ μ^ο α. καὶ γίνεται τὸ

INVENIRE tres numeros, vt cubus summæ eorum, à quolibet ipsorum detractus, cubum faciat. Ponatur rursus trium summa 1 N. ipsi autem 2 C. 9 C. 28 C. Reliquum est hos tres simul æquari 1 N. sed hi tres simul sunt 39 C. Igitur 39 C. æquantur 1 N. omnia per numerum diuidantur. Igitur 39 Q. æquantur 1. & si quadratorum numerus foret quadratus, soluta esset quæstio. Est autem 39. summa trium cuborum adiecto ternario. Oportet ergo inuenire tres cubos, quorum summa adiecto ternario faciat quadratum. Statuatur primi cubi latus 1 N. secundi 3 — 1 N. tertij quotlibet vnitatum,

ac fit 1. Itaque fit summa trium cuborum 9 Q. + 28 − 27 N. cui addendo 3. fit 9 Q. + 31 − 27 N. æquale quadrato à latere 3 N. − 7. & fit 1 N. $\frac{6}{5}$. Tantum est latus primi cubi, alterius verò latus est $\frac{9}{5}$. reliqui 1. Porrò cuilibet cuborum ab his ortorum addo 1. & venio ad propositum initio, statuo quemlibet totidem cuborum. Restat vt trium summa æquetur 1 N. fit autem summa trium 11 $\frac{14}{25}$ C. Hoc æquatur 1 N. & fit 1 N. $\frac{5}{17}$. Ad positiones.

σύνθημα τῶν τειῶν κύβων. δυ θ. μο κη. λείψει ςς κζ. ταῦτα μετὰ μο γ. γίνεται δυ θ μο λα. λείψει ςς κζ. ἴσοι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς γ. λείψει μο ζ. καὶ γίνεται ὁ ς μο ς ε. [ἡ ἐστὶ πλευρὰ τοῦ πρώτου κύβου] ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου θ ε. ἡ δὲ τοῦ λοιποῦ μονὰς α. καὶ τῷ ἀπὸ ἑκάστου τούτων κύβῳ προστίθημι μο α. καὶ ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς. τάσσω ἕκαστον κύβων τοσούτων. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ς α. γίνονται οἱ τρεῖς κυ ια. ιδ κε. ταῦτα ἴσα ς α. καὶ γίνεται ὁ ς ε ιζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

IN QVAESTIONEM XX.

MALE' assignat Xilander valorem Numeri $\frac{17}{5}$. cùm is sit $\frac{5}{17}$. nam à lateribus $\frac{6}{5}$. $\frac{9}{5}$ & 1. fiunt cubi $\frac{216}{125}$ $\frac{729}{125}$. & 1. quorum cuilibet si addatur vnitas, & præfigatur nota C. statuemus pro quæsitis numeris $\frac{341}{125}$ C. $\frac{854}{125}$ C. & 2 C. quorum summa fit $\frac{289}{25}$ C. æqualis 1 N. ac proinde $\frac{289}{25}$ æquatur vnitati, vnde fit 1 N. $\frac{5}{17}$. summa trium quæsitorum numerorum, suntque ipsi numeri $\frac{341}{4913}$. $\frac{854}{4913}$. $\frac{250}{4913}$. Nam si ab vnoquoque auferatur cubus summæ, puta $\frac{125}{4913}$ remanent cubi $\frac{216}{4913}$. $\frac{729}{4913}$. & $\frac{125}{4913}$. quorum latera $\frac{6}{17}$. $\frac{9}{17}$. $\frac{5}{17}$.

Præterea in soluendo lemmate quo quæruntur tres cubi, quorum summa adsumpto 3 faciat quadratum, non benè docet Xilander cur secundi cubi latus ponatur 3 − 1 N. ait enim suspectum esse binarium, eo quod in sequente propositione, vbi lemma propositum infinitè soluitur, necesse est valorem Numeri poni maiorem binario. Hoc verò ad præsentem quæstionem nil facit, vt ex iis quæ ad sequentem dicturi sumus apparebit. Et hîc non minus suspecti sunt 4. 5. 6. aliique infiniti, quàm 2. Talis enim ponendus est in latere secundi cubi vnitatum numerus, cuius triplum sit quadratus numerus. Patet enim ex iis quæ sæpè diximus de cubi efformatione, numerum quadratorum qui in hoc cubo reperietur gigni ex 1 Q. quadrato ex − 1 N. in triplum vnitatum adiunctarum. Necesse est autem hunc quadratorum numerum esse quadratum, alioquin quomodo fingi posset latus numeri 9 Q. + 31 − 27 N. si 9. quadratorum numerus non esset quadratus? Oportet igitur vnitatum numerum qui statuitur in latere secundi cubi esse trientem alicuius quadrati, puta 3. vel 12. vel 27. & sic poterat hoc latus poni non solùm 3 − 1 N. sed etiam 12 − 1 N. vel 27. − 1 N. & sic aliis modis infinitis. Sed & in fingendo latere quadrati 9 Q. + 31 − 27 N. magna cautio est adhibenda. cum enim secundi cubi latus positum sit 3 − 1 N. euidens est 1 N. minorem esse debere ternario. Fiet autem valor Numeri fingendo latus quadrati 3 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus superet 31. diuidendo scilicet harum vnitatum quadratum multatum numero 31. per sextuplum earundem multatum numero 27. Quare oportet $\frac{1 Q - 31}{6 N - 27}$ minorem esse ternario, vnde fit 1 Q − 31. minor quàm 18 N. − 81. & tandem 1 Q. + 50. minor quàm 18 N. Qua æquatione resoluta fit 1 N. minor quàm 14 $\frac{1}{2}$. Ponentur ergo in latere fictitio tot vnitates, vt minores sint quàm 14 $\frac{1}{2}$ dum earum quadratus excedat 31. sic posuit Diophantus 7. & finxit quadratum à latere 3 N. − 7.

Itaque tripliciter variari possunt positiones. Primò enim in latere secundi cubi poni potest quilibet vnitatum numerus qui sit triens alicuius quadrati, vt docuimus.

Secundò pro latere tertij cubi poni potest quilibet vnitatum numerus.

Denique quadrati qui fit ex summa cuborum ternario aucta, latus diuersimodè fingi potest, vt in hypothesi Diophantæa statui poterit 3 N. − quotlibet vnitatibus quæ non sint minores quàm 6. nec maiores quàm 14.

Cæterùm euidens est eodem prorsus artificio quæstionem ad quotlibet numeros extendi posse. Etenim propositum sit inuenire quatuor numeros, vt cubus summæ, à quotlibet detractus, cubum relinquat. Prius ergo inuenientur quatuor cubi quorum summa quaternario aucta cubum faciat, esto primi latus 1 N. secundi 3 − 1 N. tertij 1. quarti 2. fiet summa cuborum quaternario aucta 9 Q. + 40 − 27 N. æqualis quadrato. Quod si Numeri quæras determinationem, inuenies quadrati latus fingendum 3 N. − tot vnitatibus quæ sint minores quàm 15 $\frac{1}{3}$ dum earum quadratus excedat 40. Fingatur ergo 3 N. − 7. fiet 1 N. $\frac{3}{5}$ primi scilicet cubi latus, secundi verò latus erit $\frac{12}{5}$. $\frac{12}{5}$. tertij 1. quarti 2. Porrò cuilibet cuborum ab his ortorum adiicio 1. & præfigo notam C. & statuo quæsitos numeros $\frac{152}{125}$ C. $\frac{1853}{125}$ C. 2 C. 9 C. Restat vt trium summa æquetur 1 N. Igitur $\frac{676}{25}$ C. æquatur 1 N. & fit 1 N. $\frac{5}{26}$. Ad positiones. Erunt quæsiti numeri $\frac{152}{17576}$. $\frac{1853}{17576}$. $\frac{250}{17576}$. $\frac{1125}{17576}$. quorum

summa $\frac{5}{26}$. cuius cubum $\frac{125}{17576}$. si auferas à quolibet ipsorum numerorum, remanent cubi $\frac{27}{17576}$. $\frac{1728}{7576}$. $\frac{125}{17576}$. $\frac{1000}{17576}$. à lateribus $\frac{3}{26}$. $\frac{12}{26}$. $\frac{5}{26}$. $\frac{10}{26}$.

QVÆSTIO XXI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος προσλαβὼν ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ἵνα ᾖ τετράγωνος. δυ ᾱ. καὶ τῶν ζητουμένων, ὁ μὲν κυ κυ γ̄. ὁ δὲ κυ κυ η̄. ὁ δὲ κυ κυ ιε. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, προσλαβόντα ἕκαστον ποιεῖν τετράγωνον. λοιπὸν δεῖ τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι δυ ᾱ. ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσὶ κυ κυ κϛ̄. ταῦτα ἴσα δυ ᾱ. καὶ πάντα παρὰ δύναμιν ᾱ. γίνονται δυ δυ κϛ̄. ἴσαι μο ᾱ. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος πλευρὰν ἔχων τετράγωνον. ὥστε ἄρα δυ δυ κϛ̄. δεήσει εἶναι τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον. γέγονε δὲ τῶν εἰρημένων πλῆθος τῶν δυναμοδυναμέων, ἐκ τριῶν ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος μετὰ μο ᾱ. ποιεῖ τετράγωνον. ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος μετὰ μονάδος α. ποιῇ τετράγωνον. ἔτι δὲ ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ᾖ τετράγωνος πλευρὰν ἔχων τετράγωνον. τετάχθω εἷς τῶν ζητουμένων δυ δυ ᾱ. λείψει δυ β̄. ὁ δὲ ἕτερος δυ ᾱ. ςς β̄. ὁ δὲ λοιπὸς δυ ᾱ. λείψει ςς β̄. καὶ μένει ἕκαστος αὐτῶν μετὰ μο ᾱ. ποιεῖν τετράγωνον. ἔτι δὲ οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσι τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον καὶ ἐν ἀορίστοις ἀριθμοῖς λέλυται τὸ ζητούμενον. ὑποκείσθω οὖν ὁ ς μο γ̄. ἔσται ἄρα εἷς τῶν ζητουμένων μο ξγ̄. ὁ δὲ δεύτερος μο ιε. ὁ δὲ τρίτος μο γ̄. ἀνατρέχομεν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσομεν πάλιν τοὺς τρεῖς δυ ᾱ. τῶν δὲ ζητουμένων ὁ μὲν ἔσται κυ κυ ξγ. ὁ δὲ κυ κυ ιε. ὁ δὲ κυ κυ γ̄ λοιπὸν δεῖ τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι δυνάμει μιᾷ, καὶ γίνονται κυβόκυβοι πα̅. ἴσοι δυ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς ᾱ γ. τὰ λοιπὰ δῆλα.

INVENIRE tres numeros quadrato æquales, vt cubus summæ eorum adsumens vnumquemque, faciat quadratum. Ponatur summa trium, vt sit quadratus 1 Q. & eorum qui quæruntur primus 3 CC. secundus 8 CC. tertius 15 CC. & contingit cubum summæ trium quolibet ipsorum adsumpto, facere quadratum. Restat vt tres simul æquentur 1 Q. sed tres simul conficiunt 26 CC. Igitur 26 CC. æquantur 1 Q. & omnia per 1 Q. diuidantur, fiunt 26 QQ. æquales 1. Et vnitas quidem quadratus est latus habens quadratum, ergo & 26 QQ. quadratum esse oportet latus habentem quadratum. Atqui multitudo ista quadratoquadratorum è tribus conflata est numeris, quorum quiuis adiecta vnitate facit quadratum. Ergo inueniendi sunt tres numeri, quorum quiuis adiecta vnitate faciat quadratum, porrò summa trium quadratus sit latus habens quadratum. Ponatur vnus quæsitorum 1 QQ. − 2 Q. alter 1 Q. + 2 N. reliquus 1 Q. − 2 N. & quiuis horum adscita vnitate facit quadratum. Ac præterea trium summa est quadratus latus habens quadratum. Ita in numeris indefinitis soluta est quæstio. Ponatur ergo 1 N. 3. Erit igitur vnus quæsitorum 63. secundus 15. tertius 3. Recurramus ad initio propositum, & ponamus rursus trium summam 1 Q. Quæsitorum autem primus erit 63 CC. secundus 15 CC. tertius 3 CC. Restat vt trium summa æquetur 1 Q. & fiunt 81 CC. æquales 1 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$. Reliqua patent.

IN QVAESTIONEM XXI.

INGENIOSISSIME Diophantus soluit infinitè propositum lemma quo quæruntur tres quadrati vnitate deminuti, quorum summa sit numerus quadratoquadratus. Cùm enim finxisset quadratum à latere 1 Q. − 1. puta 1 QQ. − 2 Q. + 1. Inde ablata vnitate sumit 1 QQ. − 2 Q. pro primo quæsitorum. Tum verò ita ponit secundum & tertium, vt elidendo in additione tum quadratos, tum numeros, remaneat trium summa 1 QQ. Ideo formans quadratos à lateribus 1 N. + 1. & 1 N. − 1. & à singulis auferendo 1. ponit secundum 1 Q. + 2 N. tertium 1 Q. − 2 N. quorum summa 2 Q. qua addita primo, hoc est ad 1 QQ. − 2 Q. fit vtique trium summa 1 QQ. Itaque indefinitè soluta est quæstio, & pro valore Numeri sumi potest quilibet numerus maior quàm 2.

quia enim tertius positus est 1 Q. − 2 N. patet 1 Q. maiorem esse debere quàm 2 N. seu quod idem est 1 N. maiorem esse debere quàm 2. Hinc porro liquet quæstionem infinitas recipere solutiones. Possunt etiam ipsæ lemmatis positiones variari vt libet, dum formetur quadratus à quolibet Quadratorum numero quadrato − 1. Verbi gratia, formetur à 4 Q. − 1. erit quadratus 16 QQ. − 8 Q. + 1. vnde ablata vnitate statuetur primus 16 QQ. − 8 Q. ac proinde secundus 4 Q. + 4 N. tertius 4 Q. − 4 N. vt sit trium summa 16 QQ.

Restat vt solutionem quæstionis proferamus quam omisit Diophantus. Inuentis numeris 63. 15. 3. soluentibus lemma propositum. Recurro ad initium & pono trium quæsitorum numerorum summam 1 Q. ipsos verò 63 C C. 15 C C. 3 C C. quorum summa fit 81 C C. æqualis 1 Q. vnde fit 1 N. $\frac{1}{3}$. sunt ergo quæsiti numeri $\frac{63}{729}$. $\frac{15}{729}$. $\frac{3}{729}$. quorum summa $\frac{1}{9}$ quadratus vt postulabatur, cuius cubus $\frac{1}{729}$, quem addendo singulis numeris, fiunt quadrati $\frac{64}{729}$. $\frac{16}{729}$. $\frac{4}{729}$. à lateribus $\frac{8}{27}$. $\frac{4}{27}$. $\frac{2}{27}$.

QVÆSTIO XXII.

INVENIRE tres numeros dato numero æquales, vt cubus summæ eorum, quolibet sigillatim detracto, quadratum faciat. Rursus diuidendus est binarius vt prius. Porrò binarij cubus est 8. Proinde oportet à 8. vnumquemque detrahere, & facere quadratum. Oportet igitur 22. diuidere in tres quadratos, quorum quilibet maior sit quàm 6. Et si abs 8. quemlibet detrahamus, inueniemus tres quæsitos numeros. Est autem iam ostensum quomodo oporteat diuidere 22. in tres quadratos, quorum quilibet sit maior senario.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ τῶν συγκειμένων ἐκ τῶν τριῶν κύβων β λείψει ἕκαστον αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. καὶ γίνεται ἡμῖν πάλιν τὸν β διελεῖν ὡς καὶ πρότερον. καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τοῦ δευτέρου ϛ κ μονάδας η. δεῖ οὖν ἀπὸ μ η. ἀφελεῖν ἕκαστον, καὶ ποιεῖν τετράγωνον. δεήσει οὖν τὸν κβ διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ᾖ μ ϛ. καὶ ἐὰν ἀπὸ μ η. ἀφέλωμεν ἕκαστον τούτων, εὑρήσομεν τοὺς ζητουμένους ἀριθμοὺς τρεῖς. τοῦτο δὲ προδέδεικται πῶς δεῖ τὸν κϛ διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ᾖ μ ϛ.

IN QVAESTIONEM XXII.

QVAM malè affectus sit hoc loco Diophantus, æquo lectori æstimandum relinquo, vbi nec solutio ponitur, nec operatio propositioni respondet, & quæstiones aliquot integras desiderari satis indicant verba illa. *Rursus diuidendus est binarius vt prius.* in qua enim superiorum quæstionum locutus est Diophantus de huiusmodi binarij diuisione? Itaque quantum certissimis coniecturis assequi possum, existimo hic tres omnino quæstiones intercidisse, in quibus binarij diuisione vtendum fuit, & quarum cum ista magna erat affinitas, vt facilè hinc erroris ansam nactus sit imperitus librarius. Age igitur immeritò solum vertere iussas quæstiones, ab exilio reuocemus.

QVÆSTIO PRIMA.

Inueniantur tres numeri quadrato æquales, vt cubus summæ eorum singulis seorsim detractis, quadratum relinquat.

Statuatur summa numerorum 1 Q. vt sit quadratus. Ipsi vero numeri sint $\frac{3}{4}$ C C. $\frac{8}{9}$ C C $\frac{15}{16}$ C C. sic enim quolibet à cubo summæ detracto, relinquitur quadratus. Superest vt trium summa, puta $\frac{371}{144}$ C C. æquetur 1 Q. vnde tandem fit $\frac{371}{144}$ QQ. æqualis vnitati. Oporteret ergo numerum Quadratoquadratorum esse quadratum. At quadratoquadratorum numerus est summa trium numerorum, quorum quilibet ab vnitate detractus relinquit quadratum. Eò itaque redacti sumus vt inueniamus tres numeros, quorum singuli vnitate sint minores, & quorum summa sit numerus quadratoquadratus, quaque à ternario sublata relinquantur tres quadrati minores singuli vnitate. Vt ergo singuli trium numerorum sint minores vnitate, & eorum summa sit numerus Quadratoquadratus, ponatur eorum summa 1. Igitur reliquorum trium quadratorum summa erit 2. Quare superest vt diuidamus 2. in tres quadratos, quorum quilibet sit vnitate minor. Id autem facilè fit per ea quæ ostensa sunt ac decimam quartam huius, suntque huiusmodi quadrati $\frac{16}{25}$ $\frac{71289}{105625}$ $\frac{72361}{105625}$. & quolibet ab vnitate sublato, supersunt quæsiti numeri $\frac{9}{25}$. $\frac{34336}{105625}$. & $\frac{33264}{105625}$. Posita ergo summa numerorum 1 Q. ponantur ipsi numeri $\frac{9}{25}$ C C. $\frac{34336}{105625}$ C C. $\frac{33264}{105625}$ C C. Superest vt horum summa puta 1 C C. æquetur 1 Q. vnde fit 1 N. 1. suntque quæsiti numeri ipsi $\frac{9}{25}$. $\frac{34336}{105625}$. $\frac{33264}{105625}$.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire tres numeros quadrato æquales, vt cubus summæ illorum à quolibet detractus quadratum relinquat.

Esto summa trium numerorum 1 Q. Ipsi verò sint 2 C C. 5 C C. 10 C C. vt auferendo à singulis cubum summæ, remaneant quadrati. Restat vt trium summa sit 1 Q. est autem 17 C C. ergo tandem 17 Q Q. æquantur 1. Oporteret igitur 17. esse quadratoquadratum. Atqui 17. est summa trium quadratorum vnitate auctorum. Eò itaque redacti sumus vt inueniamus tres quadratos, quorum summa ternatio aucta, conficiat quadratoquadratum. Id verò nil aliud est quàm à quouis quadratoquadrato auferre ternarium, & residuum diuidere in tres quadratos. Sumatur ergo quadratoquadratus 16. cùm is ternario detracto relinquat 13. oportet diuidere 13. in tres quadratos. Sunt autem 9. $\frac{36}{25}$. $\frac{64}{25}$. quibus sigillatim addendo 1. statuemus eos in cubocubis, eritque primus quæsitorum 10 C C. secundus $\frac{61}{25}$ C C. tertius $\frac{89}{25}$. C C. Quorum summa 16 C C. æquatur 1 Q. vnde fit 1 N $\frac{1}{2}$. Ad positiones. Erunt quæsiti numeri sub eadem denominatione $\frac{250}{1600}$. $\frac{61}{1600}$. $\frac{89}{1600}$. quorum summa $\frac{1}{4}$. quadratus est, & eius cubus $\frac{1}{64}$. detractus à quolibet numerorum, relinquit quadratos $\frac{9}{64}$. $\frac{9}{400}$. $\frac{1}{25}$.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire tres numeros dato numero æquales, vt cubus summæ eorum, quolibet adiecto, fiat quadratus. Sit datus numerus 2.

Oportet igitur diuidere 2. in tres partes, vt cuilibet addendo 8. fiat quadratus. Quamobrem eo res rediit vt diuidamus 26. qui fit ex triplo ipsius 8. adsumente binarium, in tres quadratos, quorum quilibet sit maior quàm 8. Hoc autem quî fieri possit iam ostensum est. Suntque tres quadrati 9. $\frac{1038361}{121801}$. $\frac{1032256}{121801}$. à quibus sigillatim auferendo 8. restant quæsitæ binarij partes. 1. $\frac{63953}{121801}$. $\frac{57848}{121801}$.

Sanè post hanc quæstionem, rectè subiici vigesimam secundam Diophanti, vt eam versione nostra expressimus, res ipsa clamat, cùm in ea binarius simili ratione diuidendus proponatur, additione in subtractionem mutata. Sed & numerus 22. in textu Græco manifestè habetur, quamuis deinde incuria librarij mutetur in 26. Nam Græca Diophanti verba vt habentur in codice Regio exhibuimus, quò coniectura nostra omnibus euidentior appareat, cùm ex nostra versione mendas omnes tollere facile sit. Cæterùm operatio Diophanti satis est perspicua, quia enim à cubo 8. auferendæ sunt sigillatim tres binarij partes, ita vt semper remaneat quadratus, cùm hoc idem sit atque à triplo ipsius 8. puta à 24. auferre binarium, rectè infertur numerum 22. esse diuidendum in tres quadratos, quorum quilibet sit maior quàm 6. minor autem quàm 8. Hoc vt prestem sumo trientem de 22. puta $7\frac{1}{3}$. & quæro partem quadrati quæ huic addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{576}$. & fit quadratus $\frac{4225}{576}$. à latere $\frac{65}{24}$. Oportet ergo ita diuidere 22. in tres quadratos, vt cuiuslibet latus adæquetur $\frac{65}{24}$. Diuiditur autem suaptè natura in tres quadratos, quorum latera 3. 3. 2. Quare per adæqualitatem fingentur quæsitorum] quadratorum latera 3 − 7 N. 3 − 7 N. 2 + 17 N. estque summa quadratorum 22. + 387 Q − 16 N. æqualis 22. vnde fit 1 N. $\frac{16}{387}$. sunt ergo quadratorum latera $\frac{1049}{387}$. $\frac{1049}{387}$. $\frac{1046}{387}$. ipsi quadrati $\frac{1100401}{149769}$. $\frac{1100401}{149769}$. $\frac{1094116}{149769}$. quos si auferas sigillatim à 8. supersunt quæsitæ binarij partes, nimirum $\frac{97751}{149769}$. $\frac{97751}{149769}$. $\frac{104036}{149769}$.

QVÆSTIO XXIII.

ΤΟ δοθὲν μόριον διελεῖν εἰς τρία μόρια, ὅπως ἕκαστον αὐτῶν λεῖψαν τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω τὸ δοθὲν μόριον μο α δ^x. καὶ δέον ἔστω τὸ α δ^x. διελεῖν εἰς τρία μόρια καθὼς ἐτάχθη. ὥστε δεῖ ἕκαστον αὐτῶν λεῖψει μο α ξδ^x. ποιεῖν τετράγωνον. οἱ ἄρα τρεῖς λείψει μο γ ξδ^x. ποιοῦσι τρεῖς τετραγώνους. καὶ ἐὰν ἑκάστῳ τῶν τετραγώνων προσθῶμεν α ξδ^x. εὑρήσομεν ἕκαστον τῶν ζητουμένων. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον. ἔρχεται δὲ τὰ ιγ ξδ^x. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. ὅπερ ἐστὶ ῥᾴδιον.

DATAM partem diuidere in tres partes, vt quælibet detracto cubo summæ ipsarum, faciat quadratum. Esto data pars $\frac{1}{4}$. & opus sit diuidere $\frac{1}{4}$ in tres partes, vt imperatum est. Oportet igitur quamlibet ipsarum, detracta $\frac{1}{64}$ facere quadratum. Proinde tres simul detractis $\frac{3}{64}$ faciunt tres quadratos. Et si cuiuis trium quadratorum addamus $\frac{1}{64}$. inueniemus singulos quæsitorum. Hoc autem facile est. Eo enim res rediit vt $\frac{13}{64}$ diuidamus in tres quadratos, quod est factu facile.

IN QVAESTIONEM XXIII.

HÆC quæstio non parum confirmat sententiam nostram de præcedente. Nam cùm in illa propositum sit datum numerum diuidere in tres partes, quarum quælibet à cubo summæ detracta quadratum relinquat. Hìc è conuerso postulatur, vt datus numerus sic diuidatur in tres partes, vt à qualibet auferendo cubum summæ remaneat quadratus. Quia verò non potest cubus summæ esse minor qualibet partium, nisi in fractis tales numeri exhibeantur (cùm in integris quilibet cubus suo latere sit maior.) Idcirco proposuit Diophantus datam partem diuidere, non autem datum numerum. Est autem operatio facilis, & quæ ex dictis ad præcedentes nullo negotio intelligatur. Cùm enim tres partes quæsitæ simul faciant $\frac{1}{4}$. Et à singulis auferri debeat $\frac{1}{64}$. patet hoc idem esse atque si ab $\frac{1}{4}$. seu à $\frac{16}{64}$. auferantur $\frac{3}{64}$. vnde restat $\frac{13}{64}$. diuidendus in tres quadratos, quod facilè fit quia componitur ex duobus $\frac{9}{64}$. & $\frac{4}{64}$. quorum altero puta $\frac{4}{64}$. diuiso in duos quadratos $\frac{9}{400}$. & $\frac{16}{400}$. habemus totum $\frac{13}{64}$. diuisum in tres quadratos, qui sub eadem denominatione sunt $\frac{225}{1600}$. $\frac{36}{1600}$. $\frac{64}{1600}$. & si addatur singulis $\frac{1}{64}$. seu $\frac{25}{1600}$. sunt quæsiti numeri $\frac{250}{1600}$. $\frac{61}{1600}$. $\frac{89}{1600}$. quorum summa $\frac{1}{4}$. & si à quolibet auferatur $\frac{1}{64}$. remanent prius inuenti quadrati.

Porrò & hæc & præcedens, aliæque quas ad præcedentem attulimus ad quotlibet numeros extendi possunt, & omnes sub tribus vniuersalissimis propositionibus comprehendentur, nimirum.

QVÆSTIO PRIMA.

Datum numerum diuidere in quotlibet partes quarum quælibet adsumpto dato numero, quadratum faciat.

Explicata est à nobis ad decimam quartam huius.

QVÆSTIO SECVNDA.

Datum numerum diuidere in quotlibet partes, vt auferendo quamlibet à dato numero, supersit quadratus. Oportet autem numerum à quo fit subtractio maiorem esse ea parte diuidendi numeri, quæ denominatur à numero multitudinis partium postulatarum.

Diuidendus esto 12. in quatuor partes, quarum quælibet detracta de 5. relinquat quadratum. Cùm ergo auferendo 12. à quadruplo ipsius 5. puta à 20. supersit 8. patet 8. diuidendum esse in quatuor quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 5. Diuiditur autem 8. in duos quadratos 4. 4. quare diuiso 4. bis in duos quadratos, res expedietur. Erunt ergo quæsiti quadrati $\frac{16}{25}$. $\frac{64}{25}$. $\frac{100}{169}$. $\frac{576}{169}$. quos si auferas sigillatim à quinario, remanent numeri 12. partes quatuor quæsitæ $\frac{109}{25}$. $\frac{61}{25}$. $\frac{745}{169}$. $\frac{269}{169}$.

QVÆSTIO TERTIA.

Datum numerum diuidere in quotlibet partes, vt à qualibet auferendo datum numerum supersit quadratus. Oportet autem ablatitium numerum minorem esse ea parte diuidendi numeri, quam exprimit numerus multitudinis partium postulatarum.

Diuidendus esto 20. in quatuor partes, vt à qualibet auferendo 3. supersit quadratus. Quia quadruplum ipsius 3. puta 12. ablatum de 20. relinquit 8. patet 8. diuidendum esse in quatuor quadratos quoscunque, cuilibet addendo 3. fient quæsitæ partes numeri 20. Sumantur ergo quadrati ad præcedentem allati, & cuilibet addatur 3. fient numeri 20. quæsitæ partes $\frac{91}{25}$. $\frac{139}{25}$ $\frac{607}{169}$. $\frac{1083}{169}$.

QVÆSTIO XXIV.

INVENIRE tres quadratos, vt solidus sub ipsis contentus, quouis ipsorum adscito quadratum faciat. Ponatur solidus ille 1 Q. & quærantur tres quadrati, quorum quilibet adscita vnitate faciat quadratum. Hoc autem peti potest à quouis triangulo rectangulo. Expono tria triangula rectangula, & accipiens quadratum vnius laterum circa rectum, diuido

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους ὅπως ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς προσλαβὼν ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς δυ α. καὶ ζητοῦμεν τρεῖς τετραγώνους ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μετὰ μονάδος α. ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ ἀπὸ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου. ἐκτίθεμαι τὰ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια, καὶ λαβὼν τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τετράγωνον μερίζω εἰς τὸν ἀπὸ τῆς λοιπῆς τῶν περὶ τὴν ὀρθήν. καὶ εὑρήσομεν

τοὺς τετραγώνους. ἕνα μὲν δυ θ ιϛ^{ων}. τὸν δὲ ἕτερον δυ κε ρμδ^{ων}. τὸν δὲ τρίτον δυ ξδ σκε^{ων}. καὶ μένει ἕκαστος αὐτῶν μετὰ δυ α. ποιῶν τετράγωνον. λοιπόν ἐστι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν ἰσῶσαι δυ α. γίνεται δὲ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς κυ κυ α. δυ ͵α. νυ. ταῦτα ἴσα δυ α. καὶ πάντα εἰς τὸ αὐτὸ μόριον, καὶ παρὰ δύναμιν γίνεται δυ δυ α. δυ. ͵α νυ. ἴσα μο α. καὶ ἡ πλευρὰ τῇ πλευρᾷ γίνεται δυ ρκ ψκ. ἴσα μο α. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος, εἰ οὖν τετράγωνος καὶ τὰ δυ ρκ ψκ. λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον, οὐκ ἔστι δέ. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν τρία τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ὁ ἐκ τῶν τριῶν καθέτων αὐτῶν στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν βάσεων αὐτῶν στερεὸν ποιῇ τετράγωνον. * πλευρὰν ἔχοντα τὸν ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων. καὶ ἐὰν πάντα παραβάλωμεν παρὰ τὸν ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ εὑρημένου ὀρθογωνίου γενήσεται ὁ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ α ἐπὶ τὸν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ ἑτέρου τῶν τριγώνων, καὶ ἐὰν τάξωμεν ἓν αὐτῶν γ. δ. ε. ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν δύο τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ὁ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ᾖ ϛς ιβ. ὥστε καὶ ἔμβαδον ἐμβαδοῦ ιβ εἶναι ιβ. καὶ γ. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ οθ. μ. μα. τὸ δὲ ἕτερον ε. ιβ. ιγ. ἔχοντες οὖν τὰ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια ἐρχόμεθα εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς. τάσσομεν τῶν ζητουμένων τριῶν τετραγώνων, ἓν μὲν θ. ὃν δὲ κε. ὃν δὲ πα. καὶ ἐὰν τὸν ἐκ τῶν δ. ε. στερεὸν ἰσώσωμεν δυ α. γενήσεται ὁ ς ῥητὸς ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. *

* Legendum est 8. 15. 17.

cum per quadratum alterius laterum circa rectum, & inuenio quadratos, vnum $\frac{9}{16}$ Q. alterum $\frac{25}{144}$ Q. tertium $\frac{64}{225}$ Q. & quilibet ipsorum cum 1 Q. facit quadratum. Restat vt solidus sub tribus contentus æquetur 1 Q. Est autem solidus ille $\frac{14400}{518400}$ CC. hoc æquatur 1 Q. & omnia ad eundem denominatorem reducendo, & diuidendo per 1 Q. fiunt $\frac{14400}{518400}$ QQ. æqualia 1. & latus lateri æquatur, fitque $\frac{120}{720}$ Q. æquale 1. Est autem vnitas quadratus. Quod si etiam $\frac{120}{720}$ Q. quadratus esset, soluta fuisset quæstio. Non est autem. Eò igitur redactus sum, vt inueniam tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ductus in solidum sub basibus faciat quadratum, * cuius latus sit numerus multiplicatione ortus laterum circa rectum vnius triangulorum. Et si omnia diuiserimus per productum ex lateribus circa rectum inuenti rectanguli, orietur qui fit ex producto laterum circa rectum secundi, in productum laterum circa rectum alterius triangulorum. Et si vnum ipsorum statuamus 3. 4. 5. Eò deuentum est vt inueniantur duo triangula rectangula, vt productus ex lateribus circa rectum producti ex lateribus circa rectum sit 12 N. Proinde & area areæ 12. si autem 12. & 3. Hoc autem facile est, & est simile huic 9. 40. 41. Alterum * 5. 12. 13. Habentes ergo tria triangula rectangula, reuertamur ad initiò propositum. Et statuamus trium quæsitorum quadratorum, alterum 9. alterum 25. tertium 81. & si solidum ex his æquemus 1 Q. fiet 1 N. rationalis. Ad positiones. *

IN QVAESTIONEM XXIV.

VIx scio an elegantiora & subtiliora problemata, tribus quæ sequuntur, excogitari possint, ea tamen tam miserè corrupta sunt, vt hîc omni ex parte restituere Diophantum, humani, vt arbitror, vires superet ingenij, nisi quis emendatiorem proferat codicem. Equidem satis apparet ad huius quæstionis solutionem requiri vt inueniantur tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ad solidum sub basibus habeat rationem quadrati ad quadratum. At in duabus sequentibus inuenienda esse tria triangula rectangula, vt solidus sub hypotenusis ad solidum sub basibus habeat rationem quadrati ad quadratum. Quomodo autem hæc lemmata expediat Diophantus percipere minimè potui. Quoniam verò nos ea perfectè demonstrauimus libro tertio porismatum, & reliqua Diophanti operatio perspicua est, verba illius quæ sanitati restitui poterant, reposuimus, reliqua vt erant relinquere malui, quàm in iis corrigendis diutius animum torquere. Moneo tantùm verba illa, καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ οθ. μ. μα. in Vaticano codice sic haberi, καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ θ. μ. μα. Quam lectionem vt pote probabiliorem, sequutus sum in mea versione, verè enim numeri 9. 40. 41. constituunt triangulum rectangulum, quod non accidit ipsis 79. 40. 41.

Porrò multa sunt hîc obseruatione digna. Primò, vt inueniat quadratum qui adscita vnitate faciat quadratum, sumit Diophantus latera trianguli rectanguli, & quadratum baseos diuidit per quadratum perpendiculi. Vt ex positis 3. 4. 5. diuidendo 9. per 16. fit $\frac{9}{16}$. quadratus quæsitus, nam illi

illi addendo 1. fit $\frac{25}{16}$. item quadratus. Cuius rei causa satis est euidens. Nam quolibet numero per seipsum diuiso, quotiens est vnitas. Quare propositis quadratis 9. & 16. quorum summa quadratum facit, puta 25. si alter per alterum diuidatur vt 16. per 9. fit $\frac{9}{16}$. cui addendo $\frac{16}{16}$. seu vnitatem, quadratum fieri necesse est. Cùm enim fractiones sint eiusdem denominationis, sufficit addere numeratores, denominatore communi retento. At numeratores ex hypothesi faciunt quadratum. Quare cùm & denominator sit quadratus erit tota fractio $\frac{25}{16}$. quadratus, vt patet. Aduerte autem si velis tres diuersos quadratos, quorum singuli adscita vnitate, faciant quadratum; sumenda esse tria triangula rectangula non similia, qualia reposuimus in textu Diophanti; nam si sumantur similia triangula, & quadrati laterum homologorum diuidantur per quadratos homologorum laterum, fiet idem quotiens, vt sumptis triangulis 3. 4. 5. & 6. 8. 10. diuiso 9. per 16. & 36. per 64. æquales fiunt quotientes $\frac{9}{16}$. & $\frac{36}{64}$. Quod accidit ob similitudinem proportionum.

Secundò expositis tribus triangulis 3. 4. 5. 5. 12. 13. & 8. 15. 17. diuiduntur basium quadrati per quadratos perpendiculorum, fiuntque quadrati $\frac{9}{16}$. $\frac{25}{144}$. $\frac{64}{225}$. qui nota Q. insigniti statuuntur pro tribus quæsitis numeris, quia sic quilibet adsumens 1 Q. facit quadratum. Porrò solidus sub iis contentus, fractio est, cuius numerator 14400. fit ex mutua multiplicatione numeratorum 9. 25. 64. At denominator 518400 fit ex denominatorum 16. 144. 225. mutuo ductu. Est ergo huiusmodi solidus $\frac{14400}{518400}$. Quia verò numeri ex mutua quadratorum multiplicatione orti, quadrati sunt, quorum latera fiunt ex mutuo ductu laterum quadratorum eorundem, patet 14400. esse quadratum numeri 120. qui fit ex mutuo ductu basium trium triangulorum expositorum, nempè 3. 5. 8. similiter 518400. est quadratus numeri 720. qui continetur sub perpendiculis 4. 12. 15. vnde cùm tandem $\frac{120}{720}$ Q. æquentur vnitati, & euidens sit vt solutio contingat rationalis oportere ipsum $\frac{120}{720}$. esse quadratum, hoc est 120. ad 720. rationem esse debere quæ quadrati ad quadratum: Rectè infert Diophantus rem eò deductam esse, vt inueniantur tria triangula rectangula, vt solidus sub basibus ad solidum sub perpendiculis sit in ratione quadrati ad quadratum.

Tertiò lemma propositum sic absoluimus propositione vndecima libri tertij porismatum. Exponatur quodlibet triangulum rectangulum 3. 4. 5. & effingantur alia duo triangula ab hypotenusa expositi trianguli, & à quolibet laterum circa rectum modo quem tradidimus quinta tertij porismatum, fiet à 5. & 4. triangulum 9. 40. 41. At verò à 5. & 3. formabitur triangulum 16. 30. 34. Tria ergo hæc triangula satisfacient proposito, nam solidus sub perpendiculis 3. 9. 16. puta 432. ad 4800. solidum sub basibus rationem habet quàm 9. ad 100. Licétque vt monuimus in scholio vndecimæ tertij porismatum, loco cuiuslibet inuentorum triangulorum, sumere aliud simile: vt loco ipsius 16. 30. 34. sumi potest 8. 15. 17. quod sanè cum aliis duobus propositum absoluit.

Denique his inuentis triangulis sic explicatur quæstio Diophanti, diuido quadratos basium per quadratos perpendiculorum, & quotientibus addo notam Q. fiunt quæsiti numeri $\frac{9}{16}$. Q. $\frac{81}{1600}$. Q. & $\frac{64}{225}$. Q. & solidus sub iis contentus, puta $\frac{46656}{5760000}$. C C. æquatur 1 Q. & tandem $\frac{46656}{5760000}$ Q Q. æquatur 1. ac proinde & latus lateri æquale est, hoc est $\frac{216}{2400}$ Q. seu in minimis $\frac{9}{100}$. æquatur vnitati. Quare fit 1 N. $\frac{10}{3}$. sunt ergo quæsiti quadrati $\frac{25}{4}$. $\frac{9}{16}$. $\frac{256}{81}$. quorum mutuo ductu fit solidus $\frac{100}{9}$. cui si addantur sigillatim ipsi quadrati, fiunt rursus quadrati $\frac{625}{36}$. $\frac{1681}{144}$. $\frac{1156}{81}$. quorum latera $\frac{25}{6}$. $\frac{41}{12}$. $\frac{34}{9}$.

OBSERVATIO D. P. F.

Methodum Diophanti quam non percipit Bachetus ita restituo, & explico. Quoniam primum triangulum est 3. 4. 5. & rectangulum sub lateribus 12. eò deuentum est, inquit Diophantus, vt inueniantur duo triangula vt productus ex lateribus circa rectum, producti ex lateribus circa rectum sit duodecuplus (& ratio est quia tunc productum ex lateribus vnius in productum ex lateribus alterius producet numerum qui erit planus similis 12 atque ideo eorum mutuâ multiplicatione fiet quadratus, quod vult propositio) sequitur Diophantus, proinde & area areæ 12. quod per se clarum est. Deinde (si autem 12 & 3) quia diuidendo 12. per quadratum 4 fit 3. & semper in multiplicatione oritur quadratum, nam quadratum diuisum per quadratum facit quadratum. Reliqua Diophanti non præstant propositum, sed ita restituemus. In hoc casu fingatur triangulum abs 7. & 2. alterum vero abs 5. & 2. & primum triangulorum erit triplum ad secundum, & duo proposito satisfacient. Regula autem generalis inueniendi duo triangula rectangula in ratione datâ hæc est. Sit data ratio R. ad S. maioris ad minus, maius triangulum formabitur abs R bis + S & R. — S. Minus vero abs R. + S. bis & R. — S. aliter. Formetur primum triangulum abs R bis — S & R + S. secundum abs S bis — R. & R + S. aliter. Formetur

primum triangulum abs R sexies Et R bis — S, secundum abs R quater + S & R quater — S. bis, aliter formetur primum triangulum abs R + S. quater & R bis — S quater, secundum abs S. sexies & R — S bis, Ex iam dictis deduci potest methodus inueniendi tria triangula rectangula in proportione trium datorum numerorum modo duo dati numeri reliqui sint quadrupli, sint v. g. dati tres numeri R S. T & sint ipsi R. T. simul quadrupli S. formabuntur sic tria triangula.

Primum abs R + S. quater & R bis — S quater, secundum abs S. sexies & R — S bis, tertium abs S quater + T & S quater — T bis, sumpsimus autem R esse maiorem T.

Hinc etiam elicietur modus inueniendi tria triangula rectangula numero quorum areæ constituant triangulum rectangulum, eò enim deducetur quæstio vt inueniatur triangulum cuius basis & hypotenusa sint quadrupla perpendiculi. Hoc autem est facile & erit triangulum simile huic 17. 15. 8 tria verò triangula sic formabuntur, primum abs 49. & 2. secundum abs 47. & 2. tertium abs 48 & 1.

Hinc etiam elicietur modus inueniendi tria triangula quorum areæ sint in ratione trium quadratorum datorum quorum duo sint quadrupli reliqui ac proinde poterunt eâdem viâ inueniri tria triangula eiusdem areæ.

Imò & infinitis modis possumus construere duo triangula rectangula in data ratione ducendo vnum ex terminis aut vtrumque in quadrata data &c.

QVÆSTIO XXV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ἐκ τούτων στερεὸς λείψας ἕκαστον αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς δυνάμεως α. καὶ πάλιν οἱ ζητούμενοι τετράγωνοι ἀπὸ τῶν ὀρθογωνίων. ἑνὸς μὲν ις κε. τοῦ δὲ ἑτέρου κε ρξθ. τοῦ δὲ ξδ σπθ. τάσσω αὐτοὺς ἐν δυνάμει, καὶ μένει ἡ δυνάμεως α λείψει ἑκάστου αὐτῶν ποιοῦσα τετράγωνον. λοιπόν ἐστι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν ἰσῶσαι δυνάμει α. καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς κυβοκύβων β.,εχ. ἐν μορίῳ ρκβ.,ακε. ταῦτα ἴσα δυνάμει α. καὶ πάντα παρὰ δύναμιν μίαν γίνεται δυναμοδυνάμεως β.,εχ. ἐν μορίῳ ρκβ.,ακε. ἴσα μονάσιν α. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος πλευρὰν ἔχουσα τετράγωνον. δέησει ἄρα καὶ δυναμοδυνάμεις β.,εχ. ἐν μορίῳ ρκβ.,ακε. εἶναι τετράγωνον, καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρία τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ὁ ἐκ τῶν καθέτων στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν ὑποτεινουσῶν στερεὸν, ποιῇ τετράγωνον, πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον, * καὶ ἐὰν πάντα παραβάλωμεν παρὰ τὸν τῆς ὑποτεινούσης καὶ καθέτου ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων, δέησει τοῦ ὑποτεινουσῶν καὶ καθέτων τοῦ ὑποτεινούσης, καὶ καθέτου πολλαπλασιασθέντα κατὰ τὸν ὑποτεινούσης καὶ καθέτου ὀρθογωνίου τινὸς, ἔστω τὸ ἓν τῶν ὀρθογωνίων γ. δ. ε. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ὅπως ὁ ὑποτεινούσης καὶ καθέτου τοῦ ὑποτεινούσης, καὶ καθέτου ἦν κ. εἰ δὲ κ. καὶ ε. καὶ ἔστι ῥᾴδιον, καὶ ἔστι τὸ μὲν μεῖζον ε. ιβ. ιγ.

INVENIRE tres quadratos, vt solidus sub ipsis contentus, quolibet ipsorum detracto, faciat quadratum. Ponatur solidus sub ipsis contentus 1 Q. & rursus quadrati qui quæruntur, sumantur ex triangulis rectangulis, vnus à $\frac{16}{25}$. alter à $\frac{25}{169}$. tertius à $\frac{64}{289}$. statuo eos in quadratis, & manet 1 Q. quolibet ipsorum detracto, faciens quadratum. Superest vt solidus sub tribus contentus æquetur 1 Q. est autem solidus ille $\frac{25600}{1221025}$ C C. hoc ergo æquatur 1 Q. & omnia per 1 Q. diuidantur, fiunt $\frac{25600}{1221025}$ QQ. æqualia 1. Est autem vnitas quadratus, latus habens quadratum. Ergo oportebat etiam $\frac{25600}{1221025}$ QQ. esse quadratum latus habentem quadratum. Rursus itaque res eò est reducta vt inueniantur tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ductus in solidum sub hypotenusis faciat quadratum, qui latus habeat quadratum *. Et si omnia diuidamus per productum ex hypotenusa in perpendiculum vnius rectangulorum, oportet oriatur qui fit ex producto hypotenusæ in perpendiculum, alicuius rectanguli, in productum ex hypotenusa in perpendiculum alterius, esto vnum rectangulorum 3. 4. 5. Eò itaque deuentum est, vt inueniantur duo triangula rectangula, vt numerus hypotenusæ & perpendiculi,

numeri hypotenusæ & perpendiculi sit 20. si autem 20. & 5. & est facile, quippe maius est 5. 12. 13. minus 3. 4. 5. Ab his ergo quærenda sunt alia duo, vt numerus hypotenusæ & perpendiculi sit 6. est autem maioris hypotenusa 6 $\frac{1}{2}$. perpendiculum 60. Minoris autem hypotenusa 2 $\frac{1}{2}$. qui verò in vno rectangulorum 12. & accipientes minima similium, recurrimus ad propositum initio, & ponimus solidum sub tribus contentum 1 Q. ipsorum autem quadratorum alterum 16 Q. alterum 576 Q. tertium $\frac{1}{18361}$ Q. superest vt solidus sub tribus, æquetur 1 Q. & omnia in 1 Q. latusque lateri æquetur, & inuenietur 1 N. 65. Ad positiones. *

τὸ δὲ ἐλάττον γ̄. δ̄. ε̄. ζητητέον οὖν ἀπὸ τούτων ἕτερα δύο, ὅπως ὁ ὑποτεινούσης καὶ καθέτου ᾖ μο ς̄. ἔστι δὲ τοῦ μὲν μείζονος ὑποτείνουσα μο ς̄. α^{ς''}. ἡ δὲ κάθετος ξ̄. τοῦ δὲ ἐλάσσονος ὁ μὲν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ μο β̄. α^{ς''} ὁ δὲ ἐν τῇ ᾱ. τῶν ὀρθογωνίων ιβ̄. καὶ λαβόντες τὰ ἐλάχιστα τῶν ὁμοίων ἀνατρέχομεν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσομεν τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν δυ ᾱ. αὐτῶν δὲ τῶν τετραγώνων ὃν μὲν δυ ις̄. ὃν δὲ δυ φος̄. ὃν δὲ δυ ᾱ. ἐν μορίῳ β̄. ηφξᾱ. λοιπόν ἐστι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν ἰσῶσαι δυ ᾱ. καὶ πάντα παρὰ δύναμιν καὶ πλευρὰ τῇ πλευρᾷ. καὶ εὑρίσκεται ὁ ς ξε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. *

IN QVAESTIONEM XXV.

EODEM ferè logismo vtitur hîc Diophantus, ac in præcedente. Nam vt inueniat tres quadratos qui ab vnitate sigillatim detracti quadratum relinquant, sumit tria triangula rectangula vt prius, & diuidit quadratum perpendiculi cuiuslibet trianguli per quadratum hypotenusæ. Verbi gratia sumpto triangulo 3. 4. 5. diuidit 16. per 25. vnde fit $\frac{16}{25}$. quadratus qui ab vnitate hoc est à $\frac{25}{25}$. detractus relinquit quadratum $\frac{9}{25}$. cuius rei ratio ex adnotatis ad præcedentem satis innotescit. Hinc ergo patet solidum sub tribus huiusmodi quadratis contentum, fieri ex solido sub quadratis à tribus perpendiculis, diuiso per solidum sub quadratis à tribus hypotenusis. Quamobrem latus quadratum huiusmodi solidi constat ex solido sub ipsis perpendiculis diuiso per solidum sub hypotenusis; vt ergo latus hoc sit quadratus numerus vt requiritur, necesse est inueniri tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ad solidum sub hypotenusis sit in ratione quadrati ad quadratum.

Quomodo autem inueniantur tria huiusmodi triangula, non satis mihi constat ex corruptissimis Diophanti verbis; sed illorum iacturam æquo animo ferre possumus, quandoquidem problema istud perfectè à nobis demonstratum est propositione decimaquarta libri tertij porismatum, vbi tradidimus illius constructionem hoc pacto. Exposito quolibet triangulo 5. 4. 3. Ita vt 8. duplum baseos sit maius perpendiculo 3. inueniatur per duodecimam tertij porismatum aliud triangulum vt planus sub perpendiculis vtriusque trianguli, superet planum sub basibus quadrato numero, erit illud 13. 5. 12. Iam à duobus triangulis 5. 4. 3. 13. 5. 12. effingatur tertium per decimam tertij porismatum. Cuius hypotenusa 65. fiet ex mutuo ductu hypotenusarum 13. & 5. Basis autem 63. erit summa productorum ex basi cuiuslibet trianguli in perpendiculum alterius. Denique perpendiculum 16. erit differentia productorum ex basi in basim, & ex perpendiculo in perpendiculum. Sic habebimus tria triangula, quæsita puta 5. 4. 3. 13. 5. 12. 65. 63. 16. Nam planus sub perpendiculis est 576. planus sub hypotenusis 4225. quorum vterque quadratus cùm sit, eorum vtique ratio est quæ quadrati ad quadratum.

Hoc expedito lemmate facilè soluitur quæstio Diophanti. Sit enim solidus sub quæsitis quadratis contentus 1 Q. Ipsi verò quadrati statuantur ij qui fiunt diuidendo quadratum perpendiculi cuiuslibet inuentorum triangulorum per quadratum hypotenusæ, puta $\frac{9}{25}$ Q. $\frac{144}{169}$ Q. $\frac{256}{4225}$ Q. fitque solidus sub ipsis contentus $\frac{331776}{17850625}$ C C. æqualis 1 Q. seu $\frac{331776}{17850625}$ Q Q. æquatur 1. Quare & latus lateri, hoc est $\frac{576}{4225}$ Q. æquatur 1. & fit 1 N. $\frac{65}{24}$. Ad positiones. Erunt quæsiti quadrati $\frac{169}{64}$. $\frac{25}{4}$. $\frac{4}{9}$. solidus sub iis contentus est $\frac{4225}{576}$. à quo si quilibet eorum auferatur, remanent quadrati $\frac{169}{36}$. $\frac{625}{576}$. $\frac{441}{64}$. quorum latera $\frac{13}{6}$. $\frac{25}{24}$. $\frac{21}{8}$.

OBSERVATIO D. P. F.

AD elucidationem & explicationem quæstionis 25. iuxta methodum Diophanti quam Bachetus similiter prætermisit quærenda sunt duo triangula rectangula vt productum sub hypotenusa & perpendiculo vnius ad productum sub hypotenusa & perpendiculo alterius habeat rationem datam.

Quæ sanè quæstio diù nos torsit & verò difficillimam quilibet tentando experietur, sed tandem patuit generalis ad ipsius solutionem methodus.

Quarantur duo triangula vt rectangulum sub hypotenusa vnius & perpendiculo, rectanguli sub hypotenusa alterius & perpendiculo sit duplum.

Fingatur vnum ex triangulis ab A & B. alterum ab A & D. Rectangulum sub hypotenusa prioris & perpendiculo erit B in A cubum bis + B cub. in A. bis, rectangulũ verò sub hypotenusa posterioris & perpendiculo erit D. in A.C. bis + D.C. in A bis, cum igitur B in A.C. bis + B.C. in A. bis sit duplũ rectanguli D in A.C. bis + D.C. in A. bis, ergo B in A.C. + B.C. in A. æquabitur D. in A.C. bis + D.C. in A. bis & omnibus abs A diuisis fiet B in A. quadratum + B.C. æquale D. in A. Q. bis + D.C. bis & per antithesin D.C. bis − B.C. æquabitur B. in A Q. − D. in A. Q. bis, si igitur D.C. − B. bis C. diuisum per B − D bis æquetur quadrato soluta erit quæstio.

Quærendi igitur duo numeri loco ipsorum B & D eâ conditione vt duplum cubi vnius − alio diuisum vel multiplicatum (eodem enim res recidit) per duplum posterioris primo faciat quadratum, ponatur vnus esse 1 N + 1. Alter 1 cubus duplus prioris − cubo à posteriore facit 1 + 6 N + 6 q + 2 C duplus autem posterioris − priore facit 1 − 1 N. ergo si ducas 1 − 1 N in 1 + 6 N + 6 q − 2 C fiet quadratus, productũ illud æquatur 1 + 5 N − 4 C − 2 qq. Quod æquandũ quadrato ab $\frac{5}{2}$ N − 1 − $\frac{25}{8}$ q. & omnia statim constabũt, propositio autem ad omnes rationes extendetur si loco vnius ex quærendis numeris ponatur A + excessus maioris rationis termini supra minorem, & loco alterius ille ipse excessus vt iam à nobis in ratione dupla est factum. Hac quippe ratione semper vnitatum numerus euadet quadratus & æquatio erit procliuis. Hoc peracto inuenientur duo numeri qui ipsos B & D repræsentabunt & ad primam quæstionem fiet reditus. Retractanti quæ hucusque ad 25 quæstionem scripsimus visum erat statim omnia delere quia abductio ad problema quod perfecimus non conuenit quæstioni nostræ. quia tamen quæstionem aliam ad quam malè præsens problema adduxeramus rectè construximus, non tam operam perdidimus, quam malè collocauimus, & ideo maneat scriptura marginalis intacta.

Quæstionem ipsam Diophantæam nouo iterum examini subiicientes & methodum nostram sedulò consulentes tandem generaliter soluimus. Exemplum tantum subiiciemus confisi numeros. ipsos satis indicaturos non sorti, sed arti solutionem deberi. in propositione Diophanti quærenda duo triangula rectangula ea conditione vt productum sub hypotenusa vnius & perpendiculo ad productum sub hypotenusa & perpendiculo alterius habeat rationem quam 5 ad 1. En duo illa triangula, primum cuius hypotenusa 48543669109. basis 36083779309. perpendiculum 32472275580. secundum cuius hypotenusa 42636752938. basis 41990695480. perpendiculum 7394200038.

QVÆSTIO XXVI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς λειφθεὶς ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν, ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω πάλιν ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς δῡ ᾱ. αὐτοὶ δὲ ἀφ᾽ ὧν δήποτε τριῶν ὀρθογωνίων. καὶ πάλιν ἀπάγεται καὶ ἐνταῦθα εἰς τὰ ζητούμενα ἐν τῇ πρὸ ταύτης προτάσει. εἰ χρώμεθα οὖν καὶ ἐν ταύτῃ τοῖς αὐτοῖς ὀρθογωνίοις, καὶ τάσσωμεν τῶν ζητουμένων τετραγώνων. ὃν μὲν * δῡ κε̄. ὃν δὲ δῡ χκε̄. ὃν δὲ δυνάμεις α. ͵δψπδ. καὶ πάλιν μένει ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς ἀρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῶν τετράγωνον. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπ᾽ αὐτῶν στερεὸν ἰσῶσαι δυνάμει μιᾷ. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς̄ μείζων η̄. καὶ μένει. *

INVENIRE tres quadratos, vt solidus sub ipsis contentus, detractus ab vnoquoque ipsorum, faciat quadratum. Rursus solidus sub ipsis contentus statuatur 1 Q. ipsi autem à quibusuis rectangulis petantur. Et rursus hîc res deuoluitur ad ea quæ in præcedente fuerunt quæsita. Si igitur in hac iisdem vtamur rectangulis, & ponamus eorum qui quæruntur quadratorum * vnum 25 Q. alterum 625 Q. tertium 14784 Q. Et rursus solidus sub tribus contentus detractus à quolibet, facit quadratum. Superest vt solidus ille æquetur 1 Q. vnde inuenitur 1 N. maior quàm 8. & constat. *

IN QVAESTIONEM XXVI.

SATIS apparet ex lemmate ad præcedentem explicato pendere quæstionis huius solutionem, nam vt prius inuenienda sunt tria triangula rectangula; vt solidus sub hypotenusis ad solidum sub perpendiculis habeat rationem quadrati ad quadratum. Et sicut ibi ponebantur quæsiti quadrati $\frac{9}{25}$ Q. $\frac{144}{169}$ Q. $\frac{3136}{4225}$ Q. ita vt auferendo quemlibet ab 1 Q. remanerent quadrati, puta $\frac{16}{25}$ Q. $\frac{25}{169}$ Q. $\frac{1089}{4225}$ Q. Ita hîc numeratoribus in denominatores mutatis, & è conuerso, statuuntur quæsiti quadrati $\frac{25}{9}$ Q. $\frac{169}{144}$. $\frac{4225}{3136}$ Q. vt à quotlibet auferendo 1 Q. remaneant quadrati $\frac{16}{9}$ Q. $\frac{25}{144}$ Q. $\frac{1089}{3136}$ Q. fitque solidus sub tribus quæsitis contentus $\frac{17850625}{4064256}$ C C. æquales 1 Q. & tandem $\frac{4225}{576}$ Q. æquatur vnitati. Vnde fit 1 N. $\frac{24}{65}$. Sunt ergo quæsiti numeri. $\frac{64}{169}$. $\frac{4}{25}$. $\frac{9}{4}$. Nam solidus sub iis contentus est $\frac{576}{4225}$. quem auferendo sigillatim à quolibet ipsorum, remanent quadrati $\frac{1024}{4225}$. $\frac{4}{169}$. $\frac{35721}{16900}$. quorum latera $\frac{32}{65}$. $\frac{2}{13}$. $\frac{189}{130}$.

QVÆSTIO XXVII.

INVENIRE tres quadratos, vt productus ex binorum multiplicatione adscita vnitate faciat quadratum. Et quoniam quæro productum ex primo in secundum addita vnitate facere quadratum, omnia ducantur in tertium qui est quadratus. Itaque oportebit productum ex primo in secundum, ductum in tertium, hoc est solidum sub tribus contentum, cum tertio facere quadratum, sicut etiam cum primo & secundo. Id autem ante demonstrauimus. Igitur illi numeri hanc quoque soluunt quæstionem.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν μο α. ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ζητῶ τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου μο μονάδος α. ποιεῖν τετράγωνον. πάντα ἐπὶ τὸν τρίτον ὄντα τετράγωνον. ὥστε δεήσει τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον, τουτέστι τὸν ἐκ τῶν τελείων στερεὸν μο τοῦ τρίτου ποιεῖν τετράγωνον. ὡς καὶ μο τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου, τοῦτο γὰρ προεδείξαμεν. ὥστε ἐκεῖνοι οἱ ἀριθμοὶ ποιοῦσι καὶ τοῦτο τὸ ζήτημα.

IN QVAESTIONEM XXVII.

REFERTVR hæc propositio ad vigesimam quartam, & iidem prorsus numeri vtramque quæstionem soluunt, vt rectè infert Diophantus, quod tamen vt euidentius fiat, sic demonstro.

A $\frac{25}{4}$. B $\frac{9}{16}$. C $\frac{256}{81}$.
D $\frac{225}{64}$. G $\frac{289}{64}$.

Sint tres quadrati A B C. soluentes vigesimam quartam, ita vt solidus sub ipsis contentus quolibet adiecto quadratum faciat; dico eum qui fit à duobus quibusuis addita vnitate fore quadratum. Ducto enim A in B fiat D. cui addita vnitate fiat G. probandum est G esse quadratum. Itaque quia ex hypothesi ducto D in C. & producto addendo ipsum C. fit quadratus. At ducere D in C & producto addere C. idem est atque ducere C in numerum vnitate maiorem ipso D, hoc est in ipsum G, sequitur ex C in G. fieri quadratum. [1] Ergo C & G sunt plani similes. [2] Quare cùm C. sit quadratus ex hypothesi, oportet & ipsum G quadratum esse. Quod demonstrandum erat.

[1] 4. noni.
[2] 24. octaui.

Sunt ergo quæsiti quadrati $\frac{25}{4}$. $\frac{9}{16}$. $\frac{256}{81}$. Nam ex binorum mutuo ductu fiunt numeri $\frac{225}{64}$. $\frac{16}{9}$. $\frac{1600}{81}$. quibus addendo sigillatim vnitatem, fiunt quadrati $\frac{289}{64}$. $\frac{25}{9}$. $\frac{1681}{81}$. quorum latera sunt $\frac{17}{8}$. $\frac{5}{3}$. $\frac{41}{9}$.

QVÆSTIO XXVIII.

INVENIRE tres quadratos vt productus ex binorum multiplicatione detracta vnitate, faciat quadratum. Omnia in tertium. Itaque productus ex primo in secundum ductus in tertium, hoc est solidus sub tribus contentus, detracto tertio quadratum facit; sicut & idem solidus sub tribus contentus, facit quadratum detracto secundo & tertio. Hoc autem supra demonstratum est. Igitur illi numeri hoc quoque præstant.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας μο α. ποιῇ τετράγωνον. πάντα ἐπὶ τὸν τρίτον. ὥστε ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον τουτέστι ὁ ἐκ τῶν τελείων στερεὸς λείψας τὸν τρίτον ποιεῖ τετράγωνον. ὥστε καὶ ἑκάτερον τὸν τε πρῶτον καὶ τὸν δεύτερον λείψας ὁ ἐκ τῶν τελείων στερεὸς ποιεῖ τετράγωνον. τοῦτο δὲ προδέδεικται. ἐκεῖνοι οὖν οἱ ἀριθμοὶ ποιοῦσι καὶ τοῦτο.

IN QVAESTIONEM XXVIII.

HÆC etiam refertur ad vigesimam quintam & iidem numeri vtramque soluunt quæstionem. Nam à solido sub tribus quadratis contento auferre, verbi gratia, tertium idem est atque ducere planum sub primo & secundo vnitate multatum, in ipsum tertium. Quare cùm solidus sub tribus contentus, detracto tertio sit quadratus, necesse est & planum sub primo & secundo detracta vnitate esse quadratum, alioquin eo ducto in tertium qui quadratus est, non posset fieri quadratus. Soluitur ergo hæc quæstio per quadratos inuentos per vigesimam quintam, nempe per quadratos $\frac{169}{64}$. $\frac{25}{4}$. $\frac{4}{9}$. Etenim plani sub binis contenti sunt $\frac{4225}{256}$. $\frac{25}{9}$. $\frac{169}{144}$. A quibus auferendo sigillatim vnitatem, remanent quadrati $\frac{3969}{256}$. $\frac{16}{9}$. $\frac{25}{144}$. quorum latera $\frac{63}{16}$. $\frac{4}{3}$. $\frac{5}{12}$.

QVÆSTIO XXIX.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ μονάδος μιᾶς ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ζητοῦντες τὸν ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἀρθέντα ἀπὸ μονάδος μιᾶς ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν πάντα ποιήσωμεν ἐπὶ τὸν τρίτον. πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς ἀρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ προδεδείχαμεν.

INVENIRE tres quadratos, vt productus ex binorum multiplicatione detractus ab vnitate, faciat quadratum. Rursus quærentes eum qui à duobus quibusuis fit sublatum ab vnitate, facere quadratum, si omnia ducamus in tertium; rursum eò deducimur vt inueniamus tres numeros, è quibus confectus solidus si tollatur à quouis, relinquat quadratum. Hoc autem suprà est demonstratum.

IN QVAESTIONEM XXIX.

PENDET rursus hæc propositio à vegesima sexta, & iidem quadrati vtrique quæstioni satisfaciunt. Ratio est, quia solidus sub tribus contentus detractus, verbi gratia, à tertio relinquit quadratum per vegesimam sextam. At idem quadratus fit si planus sub primo & secundo detrahatur ab vnitate, & residuum ducatur in tertium. Ergo necesse est planum ex primo in secundum detractum ab vnitate relinquere quadratum, vt scilicet eo in tertium qui quadratus est, ducto, fiat quadratus. Quod autem si planus ex primo in secundum detrahatur ab vnitate, & residuum ducatur in tertium, idem fiat numerus, atque si solidus sub tribus auferatur à tertio, ne quis scrupulus maneat, sic demonstro. Sint tres quicunque numeri A B C. & solidus sub ipsis D. quem auferendo à tertio C. remaneat K. Tum ducto A in B fiat G quo detracto ab vnitate relinquatur H. Dico si H. ducatur in C fieri K. Quia enim D. est solidus sub tribus contentus, & G planus, sub duobus A B. patet ducto C in G. fieri solidum D. At duo G H æquantur vnitati ex constructione. Quare cùm ducendo C in vnitatem, fiat ipse C. producti ex C in ipsos G H. puta D K simul æquantur ipsi C. At ex C in G fit D vt ostensum est. Ergo ex C in H fiet K. Quod erat ostendendum.

D $\frac{1}{24}$.
A $\frac{1}{2}$. B $\frac{1}{3}$. C $\frac{1}{4}$.
G $\frac{1}{6}$. H $\frac{5}{6}$. K $\frac{5}{24}$.

Itaque sumptis quadratis $\frac{64}{169}$. $\frac{4}{25}$. $\frac{9}{4}$ per vigesimam sextam inuentis, ex binorum mutuo ductu fient $\frac{256}{4225}$. $\frac{9}{25}$. $\frac{144}{169}$. quos auferendo sigillatim ab vnitate, remanent quadrati $\frac{3969}{4225}$. $\frac{16}{25}$. $\frac{25}{169}$. quorum latera $\frac{63}{65}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{5}{13}$.

Cæterùm hæ tres quæstiones paulò vniuersalius proponi possunt, quod exemplo vigesimæ septimæ docuisse sufficiat.

Inuenire tres quadratos, vt qui fit ex binorum mutuo ductu, addito quouis quadratoquadrato, faciat quadratum.

Datus quadratoquadratus esto 16.

Sumo quadratos soluentes vigesimam septimam, puta $\frac{25}{4}$. $\frac{9}{16}$. $\frac{256}{81}$. quos sigillatim multiplico per latus quadratum ipsius 16. puta per 4. & fiunt quæsiti quadrati 25. $\frac{9}{4}$. $\frac{1024}{81}$. quos satisfacere proposito perspicuum est. Nam primo quadratos eos esse constat, quia fiunt ex quadrato 4. in tres quadratos sigillatim ducto, idemque semper eueniet, quia latus quadratum cuiuslibet quadratoquadrati, quadratus est. Deinde cùm sint quadrupli priorum quadratorum at ex quadruplo numeri in quadruplum alterius, fiat sedecuplum producti ex numero in numerum, patet productos ex binorum multiplicatione esse sedecuplos priorum productorum. Quare si his addatur 16. puta sedecuplum vnitatis, fient numeri sedecupli ad quadratos qui fiunt si numeri per vigesimam septimam inuenti bini inter se multiplicentur, & productis addatur vnitas. Ac proinde cùm ex eo quadrato in quadratum fiat quadratus, patet propositum.

QVÆSTIO XXX.

DATO numero tres adinuenire quadratos, quorum bini sumpti, adscitoque dato numero, faciant quadratum. Esto datus 15. & sit vnus quæsitorum 9. Quærendi sunt ergo alij duo, vt quilibet illorum cum 24. faciat quadratum, & ambo simul cum 15. faciant quadratum. Oportet ergo quærere duos quadratos, quorum vterque cum 24. faciat quadratum. Sumamus numeros qui metiantur 24. & sint latera circa rectum trianguli rectanguli. Esto secundum $\frac{4}{1N}$. oppositus, erit 6 N. vtriusque horum semissis est $\frac{2}{1N}$. & 3 N. Rursus esto secundum $\frac{3}{1N}$. oppositus erit 8 N. vtriusque semissis est $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$ & 4 N. Sit ergo vnius quadratorum latus ab interuallo $\frac{2}{1N}$. & 3 N. alterius verò latus ab interuallo $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$ & 4 N. sic enim vterque quadratorum cum 24. faciet quadratum. Restat vt & ambo iuncti cum 15. faciant quadratum. Fit autem $\frac{6\frac{1}{4}}{1Q}$ + 25 Q. − 9. Igitur 25 Q. + $\frac{6\frac{1}{4}}{1Q}$ − 9. æquantur quadrato. Esto quadrato 25 Q. & fit 1 N. $\frac{5}{6}$. Ad positiones.

ΔΟΘΕΝΤΙ ἀριθμῷ προσευρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως συνδύο λαμβανόμενοι οἱ τετράγωνοι, καὶ προσλαβόντες τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, ποιῶσι τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μονάδες ιε. καὶ ἔστω εἷς ζητουμένων μονάδες θ. ζητητέον οὖν ἑτέρους δύο, ὅπως ἑκάτερος μὲν αὐτῶν μετὰ μονάδων κδ ποιῇ τετράγωνον. συναμφότερος δὲ μετὰ μονάδων ιε. ποιῇ τετράγωνον. δεῖ οὖν ζητεῖν δύο τετραγώνους, ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μετὰ μονάδων κδ. ποιῇ τετράγωνον. λαμβάνομεν τοὺς μετροῦντας μονάδας κδ. καὶ τριγώνου ὀρθογωνίου πλευρὰς τὰς περὶ τὴν ὀρθήν. [ἔστω κατὰ ἀριθμοστὸν δ. ὁ ἀντικείμενος ἀριθμῶν ϛ. συναμφοτέρου τὸ ἥμισυ γίνεται ἀριθμοστὸν β. καὶ ἀριθμοὶ γ. πάλιν] ἔστω κατὰ ἀριθμοστὸν γ. ὁ ἀντικείμενος ἀριθμῶν η. συναμφοτέρου τὸ ἥμισυ γίνεται ἀριθμοστὸν α. α ∠. καὶ ἀριθμοὶ δ. ἔστω ἡ τοῦ ἑνὸς πλευρὰ ἀπὸ διαφορᾶς ἀριθμοστοῦ β. καὶ ἀριθμῶν γ. [ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου πλευρὰ ἀπὸ διαφορᾶς ἀριθμοστοῦ α. α ∠. καὶ ἀριθμῶν δ.] καὶ μένει ἑκάτερος αὐτῶν μετὰ μονάδων κδ. ποιῶν τετράγωνον. λοιπὸν ἐστὶ καὶ συναμφοτέρους μετὰ μονάδων ιε ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ δυναμοστὸν ϛ. α δ. καὶ δυνάμεις κε. λείψει μονάδων θ. δυνάμεις ἄρα κε [καὶ δυναμοστὸν ϛ. α δ.] λείψει μονάδων θ. ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω δυνάμεων κε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε ϛ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

OBSERVATIO D. P. F.

HVius quæstionis beneficio, sequentis quæstionis solutionem dabimus quæ alioquin difficillima sane videretur.

Dato numero, quatuor inuenire numeros quorum bini sumpti adscitoque dato numero faciant quadratum. Sit datus numerus 15 *& primum per hanc quæstionem reperiantur tres quadrati quorum bini sumpti adscitoque dato numero faciant quadratum. Et sint illi tres quadrati* 25. $\frac{1}{100}$. $\frac{529}{225}$.

Ponatur primus quatuor numerorum quæsitorum 1 Q. + 15.

Secundus 10 *N* + 25. *(quia* 25. *est vnus ex quadratis,* 10 *N autem est duplum lateris in N.)*

Tertius eâdem ratione ponatur $\frac{1}{5}$ *N* + $\frac{1}{100}$, *quartus denique* $\frac{46}{15}$ *N* + $\frac{529}{225}$. *Ita quippe institutis positionibus tribus propositis partibus satisfit, quilibet enim numerum vnâ cum primo adscito* 15 *facit quadratum. Superest vt secundus & tertius addito* 15, *item tertius & quartus addito* 15, *denique secundus & quartus, eodem addito* 15 *faciant quadratum & oritur triplicata æqualitas cuius solutio in promptu cum ex constructione cuius artificium ab hac quæstione desumpsimus in quolibet termino æquando reperiantur vnitates tantum quadratæ & numeri. Recurrendum igitur ad ea quæ diximus ad quæstionem vigesimamquartam libri sexti.*

IN QVAESTIONEM XXX.

SVBTILITER Diophantus posito vno quadratorum ad placitum, puta 9. inuestigat reliquos. Cùm enim 9. additus dato numero 15. faciat 24. certum est reliquorum quemlibet adsumpto 24. debere conficere quadratum, quia quilibet ipsorum addito 9. & 15. debet esse quadratus. Sed & vterque simul adscito 15. debet facere quadratum. Reliquum ergo est vt duo quadrati reperiantur, quorum quilibet cum 24. faciat quadratum, & eorum summa adsumens 15. sit quadratus. Hic sanè mirabili artificio ponit latera quadratorum 3 N. $-\frac{2}{1N}$ & 4 N. $-\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$. vnde fiant quadrati 9 Q. $-$ 12 $+ \frac{4}{1Q}$ & 16 Q. $-$ 12 $+ \frac{2\frac{1}{4}}{1Q}$ quorum vterque adsumens 24. quadratum facit, puta 9 Q. $+$ 12 $+ \frac{4}{1Q}$ & 16 Q. $+$ 12 $+ \frac{2\frac{1}{4}}{1Q}$ à lateribus 3 N. $+ \frac{2}{1N}$. & 4 N. $+ \frac{1\frac{1}{2}}{1N}$. Equidem certum est si quadrati duo fingatur ab aliquo binomio, & à residuo quod ei respondet, interuallum quadratorum fore quadruplum plani sub partibus comprehensi, vt quadratorum à lateribus 1 N. $+$ 3. & 1 N. $-$ 3. interuallum est 12 N. quadruplum producti ex 1 N. in 3. Quare Diophantus quærens quadratum cui addendo 24. fiat quadratus, ponit pro latere residuum tale, vt planus sub partibus sit quadrans de 24. puta 6. Id vt consequatur sumit duos numeros quorum mutuo ductu fiat 24. puta 6. & 4. & vtriusque semissem capit, puta 3. & 2. nam ex semissi in semissem fit quadrans producti ex toto numero in totum numerum. Formandum ergo est residuum à 3. & 2. ponendo scilicet alterum cum signo N. puta 3 N. ex altero verò formando fractionem numericam, puta $\frac{2}{1N}$. & fit residuum 3 N. $-\frac{2}{1N}$. in quo patet planum sub partibus esse $-$ 6. atque adeo duplum illius esse $-$ 12. cui addendo 24. fit $+$ 12. sola signorum mutatione facta. Eadem arte fingit latus tertij quadrati, sumendo 8. & 3. quorum mutuo ductu fit 24. & capiendo semisses eorum, puta 4. & $1\frac{1}{2}$. vnde formatur residuum 4 N. $-\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$. vbi etiam contingit planum sub partibus esse $-$ 6. eadem de causa.

Porrò non temerè sumendi sunt duo cuicunque numeri mutuo ductu producentes 24. quales sumpsit author 6. & 4. & rursus 8. & 3. sed tales esse debent, vt duo 6. & 8. Itemque 4. & 3. constituant latera circa rectum trianguli rectanguli, vt infrà docebimus. Ideò sumit Diophantus duos quoscunque numeros 3. & 4. qui sint latera circa rectum trianguli rectanguli, & per eos diuidendo
1.3. poris. 24. nascitur alios duos 8. & 6. qui sunt etiam latera circa rectum trianguli rectanguli, quia eorum eadem est proportio, quæ ipsorum 3. & 4. vt constat per decimam nonam septimi. Vnde etiam sequitur & horum semisses, puta $1\frac{1}{2}$. & 2. Itemque 4. & 3. constituere latera circa rectum trianguli rectanguli ob identitatem rursus proportionis.

Necesse est autem huiusmodi numeros constituere latera circa rectum trianguli rectanguli, vt summa quadratorum ab ipsis ortorum sit quadratus numerus, quia oportet summam quadratorum fictitiorum adscito 15. puta 25 Q. $-$ 9 $+ \frac{25/4}{1Q}$. esse trinomium cuius quælibet pars constet quadrato numero. At 25 Q. est summa quadratorum à lateribus 3 N. & 4 N. & rursus $\frac{25/4}{1Q}$. est summa quadratorum à lateribus $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$. & $\frac{2}{1N}$. vnde patet oportere vt 3 N. & 4 N. Itemque $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$ & $\frac{2}{1N}$. sint latera circa rectum trianguli rectanguli. Vnitates verò $-$ 9. æquantur quadrato qui positus est pro primo quæsitorum, vt patet.

Ingeniosa itaque laterum fictione assequutus est Diophantus, vt quælibet pars trinomij quadrato æquandi, constet quadrato numero, quod ni foret, qua quæso ratione æquaretur quadrato 25 Q. $-$ 9 $+ \frac{25/4}{1Q}$? Sanè si velis fingere illius latus 5 N. $+$ vel $-$ certo vnitatum numero, nil efficies, neque si ponas latus illud $\frac{2\frac{1}{2}}{1N}$. plus vel minus certo Numerorum numero, nam vtroque modo vel incides in absurdum, vel in complexam æquationem, talemve ex qua non prodeat solutio rationalis. Itaque huiusmodi æquatio ritè nequit explicari, nisi æquando propositum numerum, vel cum 25 Q. vel cum $\frac{25/4}{1Q}$. sic enim ablatis vtrimque æqualibus remanebunt 9. æquales vel $\frac{25/4}{1Q}$. vel 25 Q. & res optimè succedet, quia vtrumque extremum æquationis reperitur quadratus. Posuit Diophantus 25 Q. æquales 25 Q. $-$ 9 $+ \frac{25/4}{1Q}$. Quare tandem 9. æquantur $\frac{25/4}{1Q}$ & omnia per 1 Q. fiunt 9 Q. æquales $\frac{25}{4}$. Quare 1 N. est $\frac{5}{6}$. Ad positiones sunt latera quadratorum $\frac{1}{10}$. & $\frac{23}{15}$. Sunt ergo tres quæsiti quadrati 9. $\frac{1}{100}$. $\frac{529}{225}$. nam bini adsumpto 15. faciunt quadratos $\frac{2401}{100}$. $\frac{5929}{225}$. $\frac{625}{36}$. quorum latera $\frac{49}{10}$. $\frac{77}{15}$. $\frac{25}{6}$.

Quod si ponas 25 Q. $-$ 9 $+ \frac{25/4}{1Q}$ æquari $\frac{25/4}{1Q}$. fient 9. æqualis 25 Q. & erit 1 N. $\frac{3}{5}$. eadem tamen quæ prius continget solutio, quia tunc concipiendum erit latera quadratorum fuisse $\frac{2}{1N}$ $-$ 3 N. & $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$ $-$ 4. N. quæ per valorem Numeri resoluta, erunt vt suprà $\frac{23}{15}$ & $\frac{1}{10}$.

QVÆSTIO XXXI.

DATO numero tres adinuenire quadratos, quorum bini sumpti detracto dato numero, faciant quadratum. Esto datus 13. Ponatur rursus quæsitorum quadratorum vnus 25. Quærendi ergo alij duo, vt vterque sigillatim cum 12. faciant quadratum, ambo verò simul detractis 13. faciant quadratum. Rursum sumimus dimensionem secundum numeros 3. & 4. fitque prioris quadrati latus ab interuallo inter $1\frac{1}{2}$ N. & $\frac{2}{1N}$. alterius verò ab interuallo inter 2 N. & $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$. Sic enim vtriusque quadratus adscito 12. facit quadratum. Superest vt ambo simul detracto 13. faciant quadratum. Fit autem $\frac{6\frac{1}{4}}{1Q}$ + $6\frac{1}{4}$ Q. — 25. Hoc ergo æquatur quadrato. Esto ipsis $\frac{6\frac{1}{4}}{1Q}$ & fit 1 N. 2. Ad positiones.

ΔΟΘΕΝΤΙ ἀριθμῷ προσευρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως συνδύο λαμβανόμενοι καὶ λείψαντες τόν δοθέντα ποιῶσι τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ιγ. τετάχθω πάλιν εἷς τῶν ζητουμένων τετραγώνων μο κε. ζητητέον οὖν ἑτέρους δύο, ὅπως ἑκάτερος μὲν αὐτῶν μετὰ μο ιβ. ποιῇ τετράγωνον. συναμφότερος δὲ λείψας μο ιγ. ποιῇ τετράγωνον. πάλιν λαμβάνομεν τὴν μέτρησιν κατὰ ἀριθμοὺς τρεῖς καὶ δ. γίνεται ἡ μὲν τοῦ προτέρου πλευρὰ ἀπὸ διαφορᾶς ςων α. α ς^x. καὶ ἀριθμοστοῦ β. ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ἀπὸ διαφορᾶς ςς β. καὶ ἀριθμοστοῦ α. α ς^x. καὶ μένει ὁ ἀπὸ τοῦ ἑκατέρου τετράγωνος μετὰ μο ιβ. ποιῶν τετράγωνον. λοιπόν ἐστι συναμφοτέρους λείψει μο ιγ. ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ δυναμοστὸν ς. α δ^x. δυ ς α δ^x. λείψει μο κε. ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω δυναμοστῷ ς. α δ^x, καὶ γίνεται ὁ ς μο β. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

OBSERVATIO D. P. F.

QVo artificio in superiore quæstione vsi sumus vt quatuor numeros inueniremus quorũ bini sumpti adscito dato numero conficerent quadratũ, simili in hac quæstione vti possumus, vt inueniãtur quatuor numeri quorum bini sumpti detracto dato numero conficiant quadratum. Ponendus enim primus 1 Q. + numero dato. Secundus quadratus primus ex inuentis in hac quæstione vna cum duplo ab ipsius latere in N. & reliqua patent.

IN QVAESTIONEM XXXI.

EX dictis ad præcedentem satis intelligitur hæc quæstio. Ponit primum quadratum 25. vnde cùm auferendo 13. à 25. supersit 12. patet quærendos duos quadratos, quorum vterque adscito 12. faciat quadratum, ita vt amborum summa detracto 13. faciat etiam quadratum. Inuenit autem duos quadratos, quorum vterque adscito 12. faciat quadratum eodem artificio quo vsus est in præcedente, & fingit eorum latera à lateribus circa rectum trianguli rectanguli, quorum mutuo ductu fiat 3. quadrans ipsius 12. Et ponit vnum latus 2 N. — $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$ alterum $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$ — 2 N. vnde quadratorum summa detractis 13. fit $\frac{25}{4}$ Q. — 25 + $\frac{\frac{25}{4}}{1Q}$ æquanda quadrato, puta $\frac{\frac{25}{4}}{1Q}$. Quare tandem $\frac{25}{4}$ Q. æquantur 25. & fit 1 N. 2. sunt ergo latera quadratorum quæsitorum 2. & $\frac{13}{4}$. & fiunt tres quadrati quæsiti 25. 4. $\frac{169}{16}$. quorum bini detracto 13. relinquunt quadratos 16. $\frac{25}{16}$. $\frac{361}{16}$.

Cæterùm moneo & hanc & præcedentem infinitas recipere solutiones ex duplici capite. Primò enim primus quadratus poni potest quilibet vnitatum numerus quadratus. Deinde latera secundi & tertij variè fingi possunt, à diuersis scilicet numeris qui sint latera circa rectum diuersorum triangulorum rectangulorum non similium. Verbi gratia loco ipsorum 3. & 4 sumi poterant 8. & 15. vel 5. & 12. & alij infiniti, vt in hac quæstione si libeat vti numeris 5. & 12. sumo numeros oppositos qui scilicet in hos ducti producunt 12 hi sunt $\frac{12}{5}$ & 1. & omnium capio semisses, puta $\frac{5}{2}$. 6. $\frac{6}{5}$. $\frac{1}{2}$. fingo ergo latera quadratorum $\frac{5}{2}$ N. — $\frac{\frac{6}{5}}{1N}$. & 6 N. — $\frac{\frac{1}{2}}{1N}$. & patet quemlibet quadratorum adscito 12. facere quadratum. Restat vt eorum summa detractis 13. faciat quadratum, facit autem $\frac{169}{4}$ Q. — 25 + $\frac{\frac{169}{100}}{1Q}$ hoc ergo æquetur $\frac{\frac{169}{100}}{1Q}$. fiet $\frac{169}{4}$ Q. æqualis 25. vnde fit 1 N. $\frac{10}{13}$ suntque quadratorum latera $\frac{118}{325}$. & $\frac{1031}{260}$. Itaque tres quæsiti quadrati sunt

25. $\frac{13924}{105625}$. $\frac{1062961}{67600}$. quorum bini detracto 13. faciunt quadratos $\frac{1281424}{105625}$. $\frac{1874161}{67600}$. $\frac{4826809}{1690000}$. quorum latera $\frac{1132}{325}$. $\frac{1369}{260}$. $\frac{2197}{1300}$. videtur autem hîc omissa huiusmodi quæstio.

Inuenire tres quadratos, quorum bini detracti à dato numero relinquant quadratum.

Sed hanc vt nimis facilem prætermisit Diophantus. Sit enim datus 21. patet nil aliud postulari quàm vt 21. diuidatur in tres quadratos, quales sunt 16. 4. 1. euidens quippe est si bini auferantur à 21. relinqui tertium.

QVÆSTIO XXXII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω δὴ τῶν ζητουμένων ὁ μὲν δυ ᾱ. ὁ δὲ μο δ̄. ὁ δὲ μο θ̄. καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων. δυναμοδυνάμεως μιᾶς μο ϟζ. ἴσος τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς δυ ᾱ. λείψει μο ῑ. καὶ γίνονται λοιπαὶ δυ κ̄. ἴσαι μο γ̄. καὶ εἰ ἦν ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν τετράγωνος λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον, καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν δύο τετραγώνους, καὶ ἀριθμόν τινα ὅπως ὁ ἀπ᾽ αὐτοῦ τετράγωνος λείψας τοὺς ἀπὸ τῶν ζητουμένων τετραγώνους ποιῇ ἀριθμόν τινα, ὃς πρὸς τὸν διπλάσιον τοῦ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοῦ λόγον ἔχῃ ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τετάχθωσαν οἱ ζητούμενοι τετράγωνοι, ὃς μὲν δυ ᾱ. ὃς δὲ μο δ̄. καὶ ὁ τυχὼν ἀριθμὸς δυ ᾱ μο δ̄. καὶ ἀπὸ τούτου τετράγωνος, ἐὰν λείψῃ τοὺς ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνους, καταλείπει δυ η̄. θέλομεν ταῦτα πρὸς τὸν δὶς δυ ᾱ μο δ̄. τουτέστι πρὸς δυ β̄ μο η̄. λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον. καὶ πάντων τὸ ἥμισυ. ὥστε καὶ δυνάμεις δ̄ πρὸς δυ ᾱ μο δ̄. λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον. καὶ εἰσὶν αἱ δυνάμεις δ̄ τετράγωνος, ὥστε καὶ δυ ᾱ μο δ̄. ἴσαι τετραγώνῳ, τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ϛο ᾱ μο ᾱ. ὅθεν ὁ ϛο μο. ᾱ. 𐅵. ἔσται τῶν ζητουμένων τετραγώνων. ὁ μὲν μο β̄. ᾱ δ'. ὁ δὲ μο δ̄. ὁ δὲ τυχὼν μο κε δ'. καὶ πάντα τετράκις. γίνεται ὁ μὲν μο θ̄. ὁ δὲ μο ιϛ̄. ὁ δὲ τυχὼν μο κε̄. ἀνατρέχομεν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσομεν τῶν τριῶν τετραγώνων. ἕνα μὲν δυ ᾱ. ὃν δὲ μο θ̄. ὃν δὲ μο ιϛ̄. καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων δυ δυ ᾱ μο τλζ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς δυ ᾱ. λείψει μο κε̄. ὅθεν ὁ ἀριθμὸς μο ιβ̄ ε'. τὰ λοιπὰ δῆλα.

INVENIRE tres quadratos, vt compositus ex ipsorum quadratis, faciat quadratum. Statuatur quæsitorum vnus 1 Q. alter 4. alter 9. & fit compositus ex eorum quadratis 1 QQ. + 97. æqualis quadrato à latere 1 Q. — 10. & fiunt reliqui 20 Q. æquales 3. & si horum multiplicatione quadratus fieret, soluta esset quæstio. Eò itaque res rediit, vt inueniantur duo quadrati, & numerus quidam, vt qui ab eo fit quadratus, detractis quadratis duorum quæsitorum quadratorum, numerum faciat, qui ad duplum numeri ab initio sumpti rationem habeat quæ est quadrati ad quadratum. Ponantur quæsiti quadrati vnus 1 Q. alter 4. & arbitrarius numerus sit 1 Q. + 4. & huius quadratus detractis illorum quadratis, relinquit 8 Q. Hoc volumus ad duplum 1 Q. + 4. hoc est ad 2 Q. + 8. rationem habere quadrati ad quadratum. Omnium semissis sumatur. Igitur & 4 Q. ad 1 Q. + 4. rationem habebit quadrati ad quadratum. Sunt autem 4 Q. quadratus. Proinde & 1 Q. + 4. æquantur quadrato à latere 1 N. + 1. Vnde fit 1 N. 1 $\frac{1}{2}$. erit ergo quæsitorum quadratorum, alter 2 $\frac{1}{4}$. alter 4. oblatus numerus $\frac{5}{4}$. & omnia quater. Erit alter 9. alter 16. arbitrarius 25. Recurramus ad propositum initiò, & statuamus trium quadratorum vnum 1 Q. alterum 9. tertium 16. & fit compositus ex ipsorum quadratis 1 QQ. + 337. Hæc æquantur quadrato à latere 1 Q. — 25. vnde fit 1 N. $\frac{12}{5}$. Reliqua sunt manifesta.

OBSERVATIO D. P. F.

CVr autem non quærat duo quadratoquadrata quorum summa sit quadratus? Sanè hæc quæstio est impossibilis, vt nostra demonstrandi methodus potest haud dubie expedire.

IN QVAESTIONEM XXXII.

SVBTILITER Diophantus soluit propositum lemma quo quærit duos quadratos, & præterea numerum à cuius quadrato auferendo quadratos duorum quæsitorum quadratorum, residuum ad duplum eiusdem numeri sit in ratione quadrati ad quadratum. Etenim ponit quæsitum numerum 1 Q. + 4. At quæsitos quadratos 1 Q. & 4. sic enim auferendo horum quadratos, a quadrato illius numeri superest 8 Q. qui ad 2 Q. + 8. debet esse in ratione quadrati ad quadratum; quare & horum semisses, puta 4 Q. & 1 Q. + 4. erunt rursus in ratione quadrati ad quadratum, cum non mutetur proportio. Ac proinde cùm 4 Q. sit quadratus, oportet & 1 Q. + 4. esse quadratum, cuius latus esto 1 N. + 1. fit 1 N. $\frac{3}{2}$. Sunt ergo quæsiti quadrati $\frac{9}{4}$ & 4. at quæsitus numerus $\frac{25}{4}$. & ad vitandas fractiones, omnia per 4. multiplicantur, fiuntque quæsiti quadrati 9. & 16. quæsitus numerus 25. Statuentes ergo alterum quadratorum 1 Q. alterum 9. tertium 16. fit summa compositi ex eorum quadratis 1 QQ. + 337. æqualis quadrato à latere 1 Q. − 25. & fit 1 N. $\frac{12}{5}$. Sunt itaque quæsiti quadrati $\frac{144}{25}$. 9. 16. summa quadratorum ab ipsis ortorum est $\frac{231361}{625}$. quadratus vtique à latere $\frac{481}{25}$.

Porrò animaduersione dignum est quadratos, qui per assumptum lemma quæruntur esse semper quadratos laterum circa rectum trianguli rectanguli, & numerum quæsitum esse semper quadratum hypotenusæ, seu summam eorundem quadratorum, vt vides in hypothesi Diophantæa quadratos reperiri 9. & 16. At quæsitum numerum esse 25. Et tres huiusmodi quadratos semper soluere lemma propositum sic demonstrabitur. Sint quadrati A B. quorum summa C. sit etiam quadratus. Et à quadrato ipsius C. auferantur quadrati ipsorum A B. & supersit G. sumatúrque H. duplus ipsius C. dico G. ad H. habere rationem quadrati ad quadratum. Sit enim D. productus ex A. in B. eritque D. quadratus cùm fiat ex quadrato in quadratum. Itaque quia C. æquatur ipsis A B. simul, erit quadratus ipsius C. æqualis quadratis ipsorum A B. & duplo ipsius D. Quare cùm auferendo quadratos ipsorum A B. à quadrato ipsius C. supersit G. erit G. duplus ipsius D. Ergo cùm & H. sit duplus ad C. erit G. ad H. sicut D. ad C. sed D. & C. sunt quadrati. Igitur ratio G. ad H. est ratio quadrati ad quadratum. Quod ostendendum erat. 4. secundi

	G. 288.	H. 50.
A 9.	B 16.	C 25.
	D 144.	

Hinc elicitur Canon facillimus ad soluendum propositam quæstionem.

Sume pro duobus quæsitorum quadratorum, quadratos laterum circa rectum trianguli rectanguli.
Tum diuide productum mutuo ductu eorundem, per quadratum hypotenusæ; orietur tertius.

Verbi gratia, exposito triangulo rectangulo 5. 12. 13. Erunt duo ex quæsitis quadratis 25. & 144. & quia ducto 25 in 144. fit 3600. diuiso eo per quadratum hypotenusæ, puta per 169. fit tertius quæsitorum $\frac{3600}{169}$. & soluta est quæstio. Nam trium quadratorum quadrati simul faciunt $\frac{623051521}{28561}$. quadratum à latere $\frac{24961}{169}$.

QVÆSTIO XXXIII.

ΟΚΤΑΔΡΑΧΜΟΥΣ καὶ πεντάδράχμους χόας τὶς ἔμιξε;
Τοῖς θεραπολοῖσι πιεῖν χρῆς ἐπιταξάμενος.
Καὶ τιμὴν ἀπέδωκεν ὑπὲρ πάντων τετράγωνον,
Τὰς ἐπιταχθείσας δεξάμενον μονάδας,
Καὶ ποιοῦντα πάλιν ἕτερόν σε φέρειν τετράγωνον,
Κτησάμενον πλευρὰν σύνθεμα τῶν χοῶν.
Ὥστε διάστειλον, τοὺς ὀκταδράχμους πόσοι ἦσαν,
Καὶ πάλι τοὺς ἑτέρους παῖ λέγε πενταδράχμους.

DRACHMARVM quinque, & drachmarum miscuit octo
Quis choeas, famulis vina bibenda suis.
Pro cunctis pretium, numerum præbens tetragonum,
Qui præfinitas suscipiens monadas
Diuersum dat quadratum. Sed summa choarum
Illius exæquat constituitque latus.
Dic age quot choeas drachmarum comparat octo,
Drachmarum choeas, dic age, quinque, puer.

ΤΟ σημαῖνον διὰ τοῦ ἐπιγράμματος ἐστὶ τοιοῦτον. ἠγόρασέ τις δύο ἐνῆ οἴνου. ἐκ μὲν τοῦ ἑνὸς τὸν χόα δραχμῶν η. ἐκ δὲ τοῦ ἑ.δος τὸν χόα δραχμῶν ε. καὶ ἀπέδωκεν ὑπὲρ πάντων τιμὴν τετράγωνον ἀριθμὸν, ὃς πρὸς μ° ξ. ἐποίει τετράγωνον, πλευρὰν ἔχοντα τὸ πλῆθος τῶν χοῶν. διάστειλον τοὺς ὀκταδράχμους καὶ πενταδράχμους. ἔστω τὸ πλῆθος τῶν χοῶν ς^ο α. ὥστε ἡ τιμὴ γίνεται δ^υ α. λείψει μ° ξ. λοιπὸν δεῖ δ^υ α ⋔ μ° ξ. ποιεῖν ἴσον τετραγώνῳ. καὶ δεῖ πλάσσειν τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ ς^ο α. λείψει μ° ὅσων δήποτε. ἀλλὰ ἐπεὶ ἡ δ^υ α. λείψασα μ° ξ. σύγκειται ἐκ δύο τινῶν ἀριθμῶν τῆς τιμῆς τῶν ὀκταδράχμων, καὶ τὸ πέμπτον τῆς τιμῆς τῶν πενταδράχμων, ποιεῖ τὸ πλῆθος τῶν πενταδράχμων, τὸ δὲ ὄγδοον τῆς τιμῆς τῶν ὀκταδράχμων, ποιεῖ τὸ πλῆθος τῶν ὀκταδράχμων. καὶ ἐπεὶ τὸ πλῆθος τῶν χοῶν συντεθέντων ποιεῖ ς^ὸν α. γέγονεν οὖν τὸν δ^υ α. λείψει μ° ξ. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ὅπως τὸ τοῦ ἑνὸς πέμπτον, καὶ τὸ τοῦ ἑτέρου ὄγδοον ποιῇ ς^ὸν α. καὶ τοῦτο δὲ οὐ πάντοτε δύναμαι, εἰ μὴ κατασκευάσῃ ὁ ς^ο μείζων μὲν τοῦ ὀγδόου δ^υ α. λείψει μ° ξ. ἐλάσσων δὲ τοῦ πέμπτου δ^υ α. λείψει μ° ξ. ἔσται ἄρα δ^υ λείψει μ° ξ. μείζων ςς ε. ἐλάσσων δὲ ςς η. ἐπεὶ οὖν δ^υ α. λείψει μ° ξ. μείζων ἐστὶ ςς ε. κοιναὶ προσκείσθωσαν μ° ξ. ὥστε καὶ δ^υ α. μείζων ἐστὶν ςς ε. μ° ξ. ὥστε καὶ δύναμις α. ἴση ἐστὶν ςς ε. καὶ ἀριθμῷ τινι μείζονι μ° ξ. ὥστε δεήσει τὸν ἀριθμὸν μείζονα εἶναι, ἢ μὴ ἐλάσσονα μ° ια. πάλιν ἐπεὶ ἡ δύναμις α. λείψει μ° ξ. ἐλάσσων ἐστὶν ςς η. κοιναὶ προσκείσθωσαν μ° ξ. ὥστε δ^υ α. ἴση ἐστὶν ςς^οῖς η. καὶ ἀριθμῷ τινι ἐλάττονι μ° ξ. ὅθεν δεῖ τὸν ς^ὸν εὑρίσκεσθαι μὴ μείζονα μ° ιβ. ἐδείχθη δὲ καὶ μὴ ἐλάττων μ° ια. ὥστε δεήσει τὸν ς^ὸν εὑρεῖν μείζονα μὲν μ° ια. ἐλάσσονα δὲ μ° ιβ. ἐὰν δὲ ζητῶμεν δ^υ α λείψει μ° ξ. ἴσα τετραγώνῳ πλάσσομεν τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ ς^ο α. λείψαντος μονάδας τινὰς, καὶ γίνεται ὁ ς^ο ἔκ τινος ἀριθμοῦ ἐφ' ἑαυτὸν γινομένου, καὶ προσλαβόντος μ° ξ. καὶ παραβληθέντος παρὰ τὸν διπλασίονα αὐτοῦ, καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τινα ἀριθμὸν ὅπως ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος προσλαβὼν μ° ξ. καὶ παραβληθεὶς παρὰ τὸν διπλασίονα αὐτοῦ, τὴν παραβολὴν ποιῇ μείζονα μὲν μ° ια. ἐλάσσονα δὲ μ° ιβ. καὶ ἐὰν τάξωμεν

QVOD significatur hoc epigrammate tale est. Quidam emit duos cados vini: vnius quidem choam drachmis 8. alterius verò choam drachmis quinque, & pro omnibus pretium persoluit numerū quadratum, cui addēdo 60. fit quadratus latus habens multitudinem choarum. Distingue nunc choas octo drachmarū, à chois quinque drachmarū. Esto choarum multitudo 1 N. Ergo pretium erit 1. Q − 60. Restat vt 1 Q − 60. æquetur quadrato, & oportet huius quadrati latus ponere 1 N. cum defectu aliquot vnitatum. Sed quoniam 1 Q − 60. componitur ex duobus numeris, pretij scilicet choarum quæ cōstant octo drachmis, & pretij choarum quæ constant quinque drachmis, & huius pretij quinta pars, facit multitudinem choarum constantium quinque drachmis; sicut illius pretij octaua pars facit multitudinem choarum constantium octo drachmis; at multitudo omnium choarum est 1 N. Oportet 1 Q − 60. diuidere in duos numeros, ita vt vnius quintans cum alterius octante faciat 1 N. Atqui hoc fieri non potest nisi 1 N. inueniatur maior octante de 1 Q − 60. minor autem quintante eiusdem 1 Q − 60. Erit ergo 1 Q − 60. maior quàm 5 N. minor quam 8 N. Quia igitur 1 Q − 60. maior est quàm 5 N. adiiciantur vtrimque 60. Igitur 1 Q. maior est quam 5 N + 60. Proinde 1 Q. æquatur 5 N. & numero alicui maiori quàm 60. Quare oportet 1 N. maiorem esse, vel saltem non minorem quàm 11. Rursum quoniam 1 Q − 60. minor est quàm 8 N. addantur vtrimque 60. Ergo 1 Q. æqualis est 8 N. & numero alicui minori quàm 60. Vnde oportet 1 N. reperiri non maiorem quàm 12. At demonstratum est non minorem esse debere quàm 11. Oportet igitur 1 N. inueniri maiorem quàm 11. minorem quàm 12. si autem velimus 1 Q − 60. æquare quadrato, fingemus quadrati latus 1 N. cum defectu aliquot vnitatum, & fiet 1 N. ex aliquo numero in se ducto, & adsumente 60. & per sui duplum diuiso. Eò itaque res deducta est, vt inueniendus sit numerus, cuius quadratus si adsciscat 60. & summa per duplum ipsius numeri diuidatur, fiat

quotiens maior quàm 11. minor quàm 12. & si quæsitum statuamus 1 N. oportebit 1 Q + 60. diuidentes per 2 N. facere quotientem maiorẽ quàm 11. minorem quàm 12. Oportet ergo 1 Q. + 60. diuiso per 2 N. quotientem fieri maiorem quàm 11. Quare 1 Q + 60. maior sit oportet quàm 22 N. Proinde 22 N. æquales sunt 1 Q. & numero alicui minori quàm 60. Quare non debet 1 N. minor esse quàm 19. Rursus oportet 1 Q + 60. diuidentes per 2. N. quotientem fieri maiorem quàm 12. Quare 1 Q + 60. minor est quàm 24 N. Proinde 24 N. æquantur 1 Q. & numero alicui maiori quam 60. Vnde oportet 1 N. minorem esse quàm 21. Sed & ostensum est maiorem esse debere quàm 19. Oportet ergo quadratum æqualem 1 Q – 60. parantes, latus statuere 1 N – 20. Vnde inuenitur 1 N. 11 $\frac{1}{2}$. Quadratus eius 132 $\frac{1}{4}$. Tollo 60. relinquuntur 72 $\frac{1}{4}$. Oportet ergo diuidere 72 $\frac{1}{4}$. in duos numeros, vt prioris quintans, cum octante posterioris faciat 11 $\frac{1}{2}$. Esto quintans prioris 1 N. Erit ergo posterioris octans 11 $\frac{1}{2}$ – 1 N. Ipsi ergo erunt, alter 5 N. alter 92 – 8 N. Hæc simul æquantur 72 $\frac{1}{4}$. & fit 1 N. $\frac{79}{12}$. Multitudo ergo choarum constantium quinque drachmis erit $\frac{79}{12}$. At multitudo choarum constantium octo drachmis erit $\frac{59}{12}$. Et reliqua sunt manifesta.

τὸν ζητούμενον ςº α̅. δεῖ δυ̅ α̅. μº ξ̅. μερίζοντας παρὰ ςς̅ β̅ τὴν παραβολὴν ποιεῖν μείζονα μὲν μº ια̅. ἐλάσσονα δὲ μº ιβ̅. δεῖ οὖν δυ̅ α̅. μº ξ̅. μερίζοντας παρὰ ςςοὺς β̅ παραβολὴν ποιεῖν μείζονα μº ια̅. ὥστε δυ̅ α̅. μº ξ̅. μείζων ὀφείλουσιν εἶναι ςς̅ κβ̅. ὥστε ςςοὶ κβ̅ ἴσοι εἰσὶν δυ̅ α̅. καὶ ἀριθμῷ τινι ἐλάσσονι μº ξ̅. ὥστε ὁ ςº οὐκ ὀφείλει εἶναι ἐλάσσων μº ιθ̅. πάλιν δεῖ δυ̅ α̅. μº ξ̅. μερίζοντας παρὰ ἀριθμοὺς β̅. τὸν ςº εὑρεῖν ἐλάσσονα μº ιβ̅. ὥστε δύναμις α̅ μº ξ̅. ἐλάσσους εἰσὶν ἀριθμῶν κδ̅. ἀριθμοὶ ἄρα κδ̅. ἴσοι εἰσὶν δυ̅ α̅. καὶ ἀριθμῷ τινι μείζονι μº ξ̅. ὅθεν ὁ ἀριθμὸς ὀφείλει ἐλάσσων εἶναι μº κα̅. ἀλλὰ καὶ μείζων μº ιθ̅. ὥστε δεῖ δυνάμει α̅. λεῖψει μº ξ̅. ἴσον τετράγωνον ποιοῦντα τάσσειν τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ ςº α̅. λεῖψει μº κ̅. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ςº μº ια̅. α̅ ∠˜. ὁ τετράγωνος ρλβ̅. α̅ δ˜ αἴρω μº ξ̅. λοιπαὶ μº οβ̅. α̅ δ˜. δεῖ οὖν τὰς μονάδας οβ̅. α̅ δ˜. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ τοῦ πρώτου πέμπτον, μετὰ τοῦ τοῦ δευτέρου ὀγδόου ποιῇ μº ια. α̅ ∠˜. ἔστω τὸ τοῦ πρώτου πέμπτον μέρος ςº α̅. τὸ ἄρα τοῦ δευτέρου ὄγδοον ἔσται μº ια. α̅ ∠˜. λεῖψει ςº α̅. αὐτοὶ ἄρα ἔσονται, ὁ μὲν ςς̅ ε. ὁ δὲ μº ϟβ̅. λεῖψει ςς̅ η. ταῦτα ἴσα οβ̅. α̅ δ˜. ἔσται ὁ ςº μº οθ̅ ιβ˜. τὸ ἄρα πλῆθος τῶν πενταδράχμων χοῶν ἔσται οθ̅ ιβ˜. τὸ δὲ τῶν ὀκταδράχμων χοῶν νθ̅ ιβ˜. καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα.

IN QVAESTIONEM XXXIII.

QVOT mendas hinc sustulerimus æquo lectori æstimandum relinquo, qui nostram cum versione Xilandri contulerit. Sanè vt omittam reliqua, vbi legebatur in codice manu exarato, τοῖς ὀβολοῖς πιεῖν χρῆσθαι ἐπιτεταγμένος, reposuimus flagitante sententia & lege metri, τοῖς περ πολλοῖσι πιεῖν χρῆς' ἀποταξάμενος, & vbi legebatur τοὺς ὀκταδράχμους ποίησον, emendauimus τοὺς ὀκταδράχμους πόσοι ἦσαν. Vtrumque ex sententia Salmasij nostri. Porrò emendato textu, non magna hîc est difficultas, quæ tamen animaduersione digna censeo, hæc sunt.

Primò, quod ait Diophantus 1 Q – 60. non posse diuidi in duas partes, ita vt alterius quintans cum alterius octante faciat 1 N. nisi 1 N. statuatur maior octante, minor autem quintante ipsius 1 Q – 60. perspicuum est ex adnotatis ad quintam primi, cuius hîc auxilium implorare cogimur, & cui huiusmodi conditionem præscripsit author.

* Secundò ritè infert. Si quintans de 1 Q – 60. est maior quàm 1 N. ipse 1 Q. – 60. maior est quàm 5 N. & rursus si octans de 1 Q – 60. est minor quàm 1 N. ipse 1 Q. – 60. minor est quàm 8 N. Vt ergo inueniantur termini intra quos consistere debet valor numeri, vtendum artificio quo ad quadragesimã quintam quarti, & alibi sæpè vsi sumus. Etenim quia 1 Q – 60 maior est quàm 5 N. addendo vtrinque 60. fit 1 Q maior quàm 5 N. + 60. & tandem fit 1 N. maior quàm R 66 $\frac{1}{4}$ + 2 $\frac{1}{2}$. seu per approximationem maior quàm 11. Similiter si 1 Q. – 60 statuatur minor quàm 8 N. fiet 1 N. minor quàm R 76 + 4. seu per approximationem minor quàm 12. Concludit ergo Diophantus 1 N. cadere debere inter 11. & 12. Quod non ita accipiendum est, vt 11. & 12, exactissimi termini censeantur, cùm enim non possint in rationalibus præscribi exactè huiusmodi termini, satis habuit Diophantus tales præscribere intra quos ritè sumi possit valor numeri. Cæterùm si exactiores requirantur, assignari poterunt 10 $\frac{3}{4}$. & 12 $\frac{2}{3}$. Malè autem assignaueris 10. & 13. cùm inter eos cadant infiniti numeri, qui nequaquam sumi possunt pro valore numeri.

Denique cum fingendo latus quadrati 1 Q − 60. fiat valor numeri, cuidam quadrato addendo 60. & summam diuidendo per duplum lateris illius, patet quærendum esse numerum per cuius duplum diuidendo quadratum ipsius, auctum numero 60. fiat quotiens maior quàm 11. minor quàm 12. Posito ergo tali numero 1 N. fit vtique $\frac{1 Q + 60}{2 N}$ maior quàm 11. minor quàm 12. & omnia ducendo in 2 N. fit 1 Q + 60. maior quàm 22 N. minor quàm 24. N. Et vtraque æquatione per approximationem resoluta, constat quæsitum numerum maiorem esse debere quàm 19. minorem quàm 21. Quare sumit Diophantus 20. & ponit quadrati 1 Q. − 60. latus 1 N − 20. vnde fit 1 N. 11 $\frac{1}{2}$. summa scilicet choarum. Ergo totum pretium est quadratus 72 $\frac{1}{4}$. Quare superest vt diuidamus 72 $\frac{1}{4}$ in duas partes, ita vt quintans vnius cum octante alterius faciat 11 $\frac{1}{2}$. Hoc exequitur Diophantus per operationem quintæ primi, & reliqua sunt manifesta.

Porrò quod terminos statuit 19. & 21. intra quos sumi debet vnitatum numerus in latere fictitio ponendus, non sic etiam accipiendum est, quod putet exactissimos eos esse, nam si libet exactiores præscribentur 18 $\frac{1}{4}$ & 22 $\frac{1}{3}$. Quare huiusmodi numerus poni poterat 19. atque etiam 21. vel 22. vel quilibet alius intra præscriptos limites. Nequaquam autem 18. vel 23. vt & ratio & experientia dictat.

Quoniam verò argutum epigramma, incertum an ab ipso confictum, vel ab alio quopiam mutuatum, nobis exhibuit Diophantus, placet hoc loco elegantissima aliquot epigrammata proferre, non iniucundas quæstiones de rebus arithmeticis continentia, quæ nondum edita fuerunt, quæque pridem è codice probatissimo Palatino excerpta tradidit nobis vir eruditissimus Claudius Salmasius, clarissimum Burgundiæ nostræ lumen. His subiiciemus versionem nostram totidem versibus exaratam, feliciter, an secus iudicent Musarum alumni. Tum breuiter quæstiones ipsas explicabimus. Cætera quæ vel ad Græci sermonis ornatum spectant, vel reconditæ quid sapiunt eruditionis Salmasio nostro relinquemus, qui breui, vt studiosos sperare iubeo, Anthologiam innumeris auctam Epigrammatis, magno reipublicæ literariæ incremento, in lucem proferet. Vnum est quod moneam, maximam horum epigrammatum partem Metrodoro tribui, quibusdam verò, alia nomina esse præfixa, quædam denique incertos habere authores.

I.

Ολβιε Πυθαγόρη Μουσέων Ἑλικώνιον ἔρνος
Εἰπέ μοι εἰρομένῳ ὁπόσοι σοφίης κατ᾽ ἀγῶνα,
Σοῖσι δόμοισιν ἔασιν, ἀεθλεύοντες ἄεισα.
Τοὶ γὰρ ἐγὼν εἴποιμι Πολύκρατες. ἡμίσεες μὲν
Αμφὶ καλὰ σπεύδουσι μαθήματα. τέτρατοι αὖτε
Αθανάτου φύσεως πεπονήαται. ἑβδομάτοις δὲ
Σιγὴ πᾶσα μέμηλε, καὶ ἄφθιτοι ἔνδοθι μῦθοι.
Τρεῖς δὲ γυναῖκες ἔασι, Θεανὼ δ᾽ ἔξοχος ἄλλων.
Τόσσους Πιερίδων ὑποφήτορας αὐτὸς ἀγινῶ.

Dic Heliconiadum decus ô sublime sororum
Pythagora, tua quot tyrones tecta frequentent
Qui sub te Sophiæ sudant in agone magistro.
Dicam, tuque animo mea dicta Polycrates hauri.
Dimidia horum pars præclara mathemata discit
Quarta immortalem naturam nosse laborat.
Septima sed tacitè sedet, atque audita reuoluit.
Tres sunt fœminei sexus; At prima Theano.
Pieridum arcanis tot vates imbuo sacris.

Hic perspicuum est numerum quæri, cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{7}$. simul adsumpto ternario ipsum quæsitum numerum constituant. Ponatur is 1 N. ergo $\frac{1}{2}$ N. $\frac{1}{4}$ N. $\frac{1}{7}$ N. & præterea 3. hoc est $\frac{25}{28}$ + 3. æquantur 1 N. vnde fit 1 N. 28. quæsitus numerus discipulorum. Nam eius $\frac{1}{2}$ est 14. At $\frac{1}{4}$ est 7. Demum $\frac{1}{7}$. est 4. quorum summa 25. adsciscens 3. conficit ipsum 28. vt requirebatur. Quoniam verò multæ quæstiones eiusdem naturæ deinceps proponentur, ad eas soluendas esto vniuersalis Canon.

Sume minimum numerum qui habeat datas partes, tum illius datas partes simul aufer ab eodem numero, per residuum diuide datum numerum in ipsa expressum quæstione, quotientem ducito in sumptum ab initio numerum, fiet quæsitus numerus.

Vt in proposita quæstione, minimus numerus qui habeat $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{7}$. est 28. à quo aufer $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{7}$. illius, puta 25. relinquitur 3. per quem diuide 3. numerum in quæstione expressum, fit quotiens 1. quem ducito in ipsum 28. fit quæsitus numerus 28.

II.

Α Κύπρις τὸν Ἔρωτα κατηφιόωντα προσηύδα.
Τίπτε τοι, ὦ τέκος, ἄλγος ἐπέχραεν; ὃς δ᾽ ἀπάμειπτο.
Πιερίδες μοι μῆλα διήρπασαν ἄλλυδις ἄλλη
Αἰνύμεναι κόλποιο, τὰ δὴ φέρον ἐξ Ἑλικῶνος.
Κλειὼ μὲν μήλων πέμπτον λάβε; δωδέκατον δὲ
Εὐτέρπη; ἀτὰρ ὀγδοάτην λάχε δῖα Θάλεια.
Μελπομένη δ᾽ εἰκοστὸν ἀπαίνυτο. Τερψιχόρη δὲ
Τέτρατον. ἑβδομάτην δ᾽ Ἐρατὼ μετεκίαθε μοίρην.
Η δὲ τριηκόντων με Πολύμνια νόσφισε μήλων.
Οὐρανίη δ᾽ ἑκατόν τε καὶ εἴκοσι. Καλλιόπη δὲ
Βεβριθυῖα μήλοισι τριηκοσίοισι βέβηκε.
Σοὶ δ᾽ ἄρα κουφοτέρῃσιν ἐγὼ σὺν χερσὶν ἱκάνω
Πεντήκοντα φέρων τάδε λείψανα μῆλα θεάων.

Talibus aggreditur mœrentem Cypris Amorem.
Ecquis, nate, animo dolor insidet? Ille ita contrà.
Diripuere sinu Libethrides vndique adortæ
Decerpta ex Helicone sacro quæ mala ferebam.
Clio malorum quintante, duodecimaque
Euterpe, octaua sed gaudet parte Thalia.
Melpomenæ cessit vicesima; Nomen habenti
A me, septima. Terpsichore quadrante potitur.
Triginta me multauit Polyhymnia malis.
Vranie centum viginti. Calliopeque
Improbior, raptis discessit onusta tricenis.
Ecce tibi manibus vacuis occurro, dearum
Relliquias, quinquaginta vix mala reportans.

Quæritur numerus, cuius $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{20}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{4}$. simul, adsumptis numeris 30. 120. 300. 50. conficiant ipsum quæsitum numerum. Quare per Canonem supra traditum sumo minimum qui habeat datas partes, puta 840. suntque illius partes datæ 168. 70. 105. 42. 120. 210. quarum summa 715. qua detracta de 840. manet 125. per quem diuido summam datorum numerorum 30. 120. 300. 50. puta 500. fit quotiens 4. quo ducto in sumptum numerum 840. fit quæsitus numerus 3360. malorum scilicet multitudo.

III.

Αἱ Χάριτες μήλων καλάθους φέρον, ἐν δ᾽ ἑκάστῃ
Ἶσον ἔην πλῆθος. Μοῦσαι σφίσιν ἀντεβόλησαν
Ἐννέα, καὶ μήλων σφέας ᾔτεον. αἱ δ᾽ ἄρ᾽ ἔδωκαν
Ἶσον ἑκάστῃ πλῆθος, ἔχον δ᾽ ἴσα ἐννέα καὶ τρεῖς.
Εἰπὲ πόσον δῶκαν, ὅπως δ᾽ ἴσα πᾶσαι ἔχεσκον.

Mala ferunt calathis Charites, æqualia cuique
Mala insunt calatho. Musarum his obuia turba
Mala petunt: Charites cunctis æqualia donant.
Tunc æqualia tres contingit habere, nouemque.
Dic quantum dederint, numerus sit vt omnibus idem.

Sensus est. Singulæ Charites habent eundem seu æqualem malorum numerum, & quælibet tradit singulis musarum æqualem numerum, hacque demum contributione facta, quælibet Charis & quælibet Musa, eundem reperitur habere numerum. Soluitur autem quæstio si iungas numerum

Charitum atque Musarum, puta 3. & 9. vnde fit 12. Quare dicendum quamlibet Charitum ab initio habuisse mala 12. vel numerum quemlibet malorum qui sit multiplex ad 12. hac tamen lege vt si sumas 12. quælibet Charis cuilibet Musæ tribuat malum vnum; si sumas 24. quælibet Charis tribuat cuilibet Musæ mala duo, & sic deinceps. Verbi gratia Ponamus. Charitum quamlibet habuisse ab initio mala 24. & dare singulis Musis mala 2. Ergo quælibet Charis tribuet Mala 18. quia sunt nouem musæ, ac proinde cuilibet Chariti relinquentur mala 6. At quælibet musa accipiens Mala 2. à qualibet Charite, habebit etiam mala 6. vt euidens est. Quare patet propositum.

IV.

Τεῦξόν μοι στέφανον, χρυσὸν, χαλκόν τε κεράσας,
Κασσίτερόν δ' ἅμα τοῖσι, πολύκμητόν τε σίδηρον
Μνᾶς ἑξήκοντα. χρυσὸς δ' ἐχέτω μετὰ χαλκοῦ
Δοιὰ μέρη τρισσῶν. χρυσὸς θ' ἅμα, κασσίτερός τε
Τρισσὰ μέρη τετόρων. χρυσὸς δ' ἅμα ἠδὲ σίδηρος
Τόσσα μέρη τῶν πέντε. πόσον δ' ἄρα δεῖ σε κεράσσαι
Λέξον τοῦ χρυσοῦ, χαλκοῦ πόσον, ἀλλ' ἔτι λέξον
Κασσιτέροιο πόσον, λοιποῦ πόσον εἰπὲ σιδήρου
Ὥστε σε τὸν στέφανον τεῦξαι μνᾶν ἑξήκοντα.

Æs, ferrum, stannum miscens, aurique metallum
Sexaginta minas pensantem finge coronam.
Æs aurumque duos simul efficiunto trientes.
Ternos quadrantes stanno mixtum impleat aurum.
At totidem quintas auri vis addita ferro.
Ergo age dic fului quantum tibi coniicis auri
Miscendum, dic quantum æris stannique requiras,
Dic quoque sufficiant duri quot pondera ferri
Præscriptam vt valeas rite efformare coronam.

Esto quantitas auri 1 N. Quia ergo aurum & æs simul sunt $\frac{2}{3}$ de 60. puta 40. erit æris quantitas 40 − 1 N. eadem de causa, erit stanni quantitas 45 − 1 N. & ferri quantitas 36 − 1 N. Quantitas ergo quatuor metallorum simul, erit 121 − 2 N. æqualis 60. vnde fit 1 N. 30 $\frac{1}{2}$. quantitas scilicet auri, at quantitas æris est 9 $\frac{1}{2}$. stanni 14 $\frac{1}{2}$. ferri 5 $\frac{1}{2}$.

V.

Τὸ τρίτον ἀργυρόποις προσέμβαλε καὶ τὸ τέταρτον
Τῆς φιάλης εἰς ἕν, καὶ τὸ δυωδέκατον.
Εἰς δὲ κάμινον ἔλαυνε βαλὼν, καὶ πάντα κυκήσας
Ἕξελε μοι βῶλον, μνᾶν δέ μοι ἑλκυσάτω.

Sume tibi Phialæ faber ingeniose trientem
Quartamque, & partem sume duodecimam,
Iniice fornaci simul omnia mixta; sed inde
Prodeat vnam æquans pondere massa minam.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{12}$. simul conficiant 1. Esto is 1 N. ergo $\frac{1}{3}$ N. $\frac{1}{4}$ N. $\frac{1}{12}$ N. simul, hoc est $\frac{2}{3}$ N. æquantur vnitati, vnde fit 1 N. 1 $\frac{1}{2}$. quot minas pendebat Phiala.

VI.

Ἔχω τὸν ἑξῆς, καὶ τὸ τοῦ τρίτου τρίτον.
Κἀγὼ τὸν ἑξῆς, καὶ τὸ τοῦ προτέρου τρίτον.
Κἀγὼ δέκα μνᾶς, καὶ τὸ τοῦ πρώτου τρίτον.

Æquo sequentem cum triente tertij.
Æquat sequens me, iunctus & primi triens.
Supero trientem primi ego decem minis,

Tres

Tres postulantur numeri, vt primus, contineat secundum & $\frac{1}{3}$ tertij. Secundus contineat tertium & $\frac{1}{3}$ primi. Tertius contineat 10. & $\frac{1}{3}$ primi. Statuatur tertius 1 N. + 10. ergo triens primi erit 1 N. ac proinde primus ipse 3 N. Quia verò secundus continet tertium & $\frac{1}{3}$ primi, si tertio puta 1 N. + 10. addas $\frac{1}{3}$ primi, puta 1 N. fiet secundus 2 N. + 10. Restat vt primus æquetur secundo cum triente tertij. Quare 3 N. æquantur 2 $\frac{1}{3}$ N. + 10. addas $\frac{1}{3}$ primi, puta 1 N. fiet secundus 2 N. + 10. Restat vt primus æquetur secundo cum triente tertij. Quare 3 N. æquantur 2 $\frac{1}{3}$ N. + 13 $\frac{1}{3}$. & fit 1 N. 20. Sunt igitur quæsiti numeri 60. 50. 30.

VII.

Τοὺς χιλίους στατῆρας οὓς ἐκτησάμην
Λαβεῖν κελεύω τοὺς ἐμοὺς παῖδας δύο.
Πλὴν γνησίου τὸ πέμπτον ηὐξήσθω δέκα
Μέζου τετάρτου τῶν λαχόντων τοῦ νόθῳ.

Quos possidere mille stateras datum est
Sic partiantur præcipio nati duo.
Ex coniuge orti quinta pars, addat super
Quadranti eorum quos nothus sumet, decem.

Sensus est Volo legitimum filium de mille nummis tot accipere, vt eorum quinta pars superet numero 10. quadrantem eorum quos sumet Nothus. Ergo numerus 1000. diuidendus est in duas partes, ita vt quinta pars vnius superet denario quadrantem alterius. Esto pars vna 1 N. altera 1000 − 1 N. ergo $\frac{1}{4}$ N. + 10. æquari debet quintæ parti de 1000 − 1 N. hoc est 200 − $\frac{1}{5}$ N. æquatur $\frac{1}{4}$ N. + 10. & fit 1 N. 422 $\frac{2}{9}$. pars quæ notho cedit. Quare pars quæ legitimo competit, est 577 $\frac{7}{9}$.

VIII.

Ἐξ μνᾶν, ἓξ φιάλας Κροῖσος βασιλεὺς ἀνέθηκεν
Δραχμῇ τὴν ἑτέραν μείζονα τῆς ἑτέρας.

Mnarum sex, Phialas sex Crœsus dedicat, atque
Est maior drachma quæque priore sequens.

Cùm quælibet minea contineat drachmas 100. minæ sex sunt 600. drachmæ. Quare numerus 600. diuidendus est in sex partes per continuam vnitatis additionem progredientes. Esto prima 1 N. erit secunda 1 N. + 1. tertia 1 N. + 2. quarta 1 N. + 3. quinta 1 N. + 4. sexta 1 N. + 5. fit omnium summa 6 N. + 15. æqualis 600. vnde fit 1 N. 97 $\frac{1}{2}$. prima pars, sunt ergo aliæ 98 $\frac{1}{2}$ 99 $\frac{1}{2}$ 100. $\frac{1}{2}$. 101 $\frac{1}{2}$. 102 $\frac{1}{2}$.

IX.

Ὡρονόμων ὄχ' ἄριστε, πόσον παρελήλυθεν ἠοῦς;
Ὅσσον ἀποιχομένοιο δύο τρίτα, δὶς τόσα λείπει.

Dic quota nunc hora est? superat tantum ecce diei,
Quantum bis gemini exacta de luce trientes.

Antiquorum more diem diuidentes in duodecim partes æquales, seu in horas 12. quas Gnomonici Planetarias vocant; Ponamus numerum transactarum horarum esse 1 N. ergo reliquus horarum numerus vsque ad noctem erit ex quæstionis lege $\frac{4}{3}$ N. & fiet omnium horarum summa $\frac{7}{3}$ N. æqualis 12. Est ergo 1 N. 5 $\frac{1}{7}$ numerus scilicet horarum transactarum, & supersunt vsque ad finem diei horæ 6 $\frac{6}{7}$.

X.

Τίπτε με τῶν καρύων ἕνεκεν πληγῇσι πιέζεις
Ὦ μῆτερ, τὰ δὲ πάντα καλαὶ διεμοιρήσαντο
Παρθένοι. ἡ γὰρ ἐμεῖο Μελίσσιον ἕβδομα δοιά.
Ἡ δὲ δυωδέκατον Τιτανὴ λάβεν. ἕκτον ἔχουσι
Καὶ τρίτον Ἀστυόχη φιλοπαίγμονες, ἡ δὲ Φίλιννα.
Εἴκοσι δ' ἁρπάξασα Θέτις λάβε. δώδεκα Θίσβη.

Ην ὅγε καὶ δὲ γελᾶ Γλαύκη παλάμησιν ἔχουσα,
Ενδεκα· τοῦτο δὲ μοι κάρυον λέλειπται οἶον.

Quid mihi pro nucibus minitaris verbera mater?
Has pulchræ inter se dispertiuere puellæ.
Septima pars flauæ cessit geminata Melissæ.
Ipsa duodecimam Titane sibi sumpsit, habentque
Sextantem Astyoche, festiua Philinna trientem,
Viginti Thetis, at rapuit Thisbe improba bix sex.
Abstulit & ridens Glauce totidem minus vnâ.
Sed numero ex omni nux hæc mihi denique restat.

Quæritur numerus cuius $\frac{2}{7}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{3}$. simul adsumentes 20. 12. 11. 1. faciant ipsum quæsitũ numerum. Sumo minimum qui habeat datas partes, puta 84. cuius partes datæ simul additæ, faciunt 73. quo ablato de 84. superest 11. per quem diuido summam ipsorum 20. 12. 11. 1. puta 44. fit quotiens 4. quo ducto in sumptum numerum 84. fit quæsitus numerus 336. Nam eius datæ partes sunt 96. 28. 56. 112. quorum summa 292. cui si addas summam datorum numerorum, puta, 44. fit rursus 336. vt postulabatur.

XI.

Πῦ σοι μῆλα βέβηκεν ἐμὸν τέκος; ἕκτα μὲν Ἰνὼ
Δοιὰ, καὶ ὀγδοάτην μοῖραν ἔχει Σεμέλη.
Αὐτονόη δὲ τέταρτον ἀφήρπασεν. αὐτὰρ Ἀγαύη
Πέμπτον ἐμῶν κόλπων οἴχετ' ἀπαιρομένη.
Σοὶ δ' αὐτῇ δέκα μῆλα φυλάσσεται. αὐτὰρ ἔγωγε,
Ναὶ μὰ φίλην Κύπριν, ἓν τόδε μοῦνον ἔχω.

Dic vbi, Nate, reposta tibi sunt mala? Trientem
Ino habet, octantem possidet at Semele.
Quadrantem Autonoë sumpsit, properauit Agaue
Quintantem è nostro diripuisse sinu.
Mala decem seruantur adhuc tibi. Testis amica.
Sed Venus, hoc vnum iam superesse mihi.

Inueniendus est numerus, cuius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. simul adsumpto 11. conficiant ipsum quæsitum numerum. Sumo minimum qui habeat datas partes, puta 120. cuius partes datæ simul faciunt 109. quo sublato de 120. superest 11. per quem diuido datum numerum 11. fit quæsitus numerus 120. & manifesta est solutio.

XII.

Δρεψαμένη ποτὲ μῆλα φίλαις διεδάσσατο Μυρτώ.
Χρυσίδι μὲν μήλων πέμπτον πόρε, τέτρατον Ἡροῖ.
Ἐννεακαιδέκατον Ψαμάθῃ δέκατον Κλεοπάτρῃ.
Αὐτὰρ ἐεικοστὸν δωρήσατο Παρθενόπῃ.
Δώδεκα δ' Εὐάδνῃ μοῦνον πόρεν. αὐτὰρ ἐς αὐτὴν
Ἤλυθον ἐκ πάντων ἑκατὸν καὶ εἴκοσι μῆλα.

Dilectis Myrto diuisit mala puellis.
Heronem quarta, sed donat Chrysida quintâ.
Dat decimam nonam Psamathæ, decimam Cleopatræ.
Pars munus cedit vicesima Parthenopææ.
Bis sex Euadne capit. Ipsi denique tanto
De numero, centum viginti mala supersunt.

Quærendus est numerus cuius $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{19}$. $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{20}$. simul adsciscentes 12. & 120. seu 132. faciant ipsum quæsitum numerum. Sumo minimum qui habeat datas partes, puta 380. cuius datæ partes simul faciunt 248. quo detracto ab ipso 380. remanet 132. vnde liquet ipsum 380. esse quæsitum numerum.

XIII.

Αἰτομένοις ποτὲ μῆλα φίλαις διεμοιρήσαντο
   Ἰνὼ καὶ Σεμέλη δώδεκα παρθενικαῖς.
Καὶ ταῖς μὲν Σεμέλη πόρεν ἄρτια, ταῖς δὲ περισσὰ
   Δῶκε κασιγνήτη, μῆλα δ' ἔχεν πλέονα.
Ἡ μὲν γὰρ τρισσῇσι τρί' ἑβδομα δῶκεν ἑταίραις,
   Ταῖς δὲ δύω πάντων πέμπτον ἔδωκε λάχος.
Ἕνδεκα δ' Ἀστυνόμη μιν ἀφείλατο, καὶ δύ' ἔλειπεν
   Μοῦνα κασιγνήταις μῆλα δύω φερέμεν.
Ἡ δ' ἑτέρη πισύρεσσι πόρεν δύο τέτρατα μήλων.
   Πέμπτη δ' ἑκτοίην μοῖραν ἔδωκεν ἔχειν.
Τέσσαρα δ' Εὐρυχόρη δῶρον πόρε. τέσσαρσι δ' ἄλλοις
   Μήλοισιν Σεμέλη μίμνεν ἀγαλλομένη.

Bis senis Ino quondam Semeleque puellis
   Pignus amicitiæ mala dedere suæ.
Parcior & Semele paria istis tradidit. Illis
   Imparia exhibuit pluraque mala soror.
Quintam malorum partem dedit ista duabus.
   Est data virginibus septima trina tribus.
Astynomeque decem, sed & vnum sumit. At Ino
   Germanis retinet bina ferenda suis.
Altera bis geminas gemino quadrante puellas
   Donat, sextantem quinta puella capit,
Quatuor Eurychore. Solido Semele quoque gaudet
   Quatuor è numero mala relicta sibi.

Hîc duo quæruntur numeri. Nam primum Ino mala sua sex puellis ita distribuit, vt duabus simul det $\frac{1}{5}$. malorum, tribus verò $\frac{1}{7}$. sextæ autem 11. mala, quo facto remanent ei mala 2. Quare cùm minimus qui habeat datas partes sit 35. à quo si auferas $\frac{1}{5}$. & $\frac{1}{7}$. puta 22. remanet 13. qui æquatur reliquis malis, patet ipsum 35. esse numerum malorum quæ habuit Ino. Deinde Semele quatuor puellis simul dat duos quadrantes seu $\frac{2}{4}$ suorum malorum, quintæ dat $\frac{1}{6}$. sextæ mala 4. quo facto remaneat ei mala 4. Quare sumpto 12. minimo qui habet datas partes, aufero ab eo datas partes, puta 8. remanet 4. per quem diuido reliqua mala in quæstione expressa, puta 8. fit quotiens 2. quo ducto in sumptum numerum 12. fit 24. numerus malorum Semeles. Accidit etiam primum numerum 35. esse imparem, secundum verò 24. esse parem & minorem primo, vt requirebat quæstio.

XIV.

Ἡ καρύη πολλοῖσιν ἐβεβρίθει καρύοισιν
Νῦν δέ τις ἐξαπίνης μιν ἀπέθρισεν. ἀλλά τι φησίν.
Ἐκ μὲν ἐμεῦ καρύων πέμπτον λάβε Παρθενόπεια.
Ὀγδοάτον δὲ Φίλιννα φέρει λάχος· ἡ δ' Ἀγανίππη
Τέτρατον, ἑβδομάτῳ δ' ἐπιτέρπεται Ὠκιθόη
Ἕκτην δ' Εὐρυνόμη καρύων ἐδρέψατο μοῖραν.
Τρισσαὶ δ' ἐξ ἑκατὸν Χάριτες διεμοιρήσαντο.
Ἐννάκι δὲ ἐννέα Μοῦσαι ἐμεῦ λάβον. ἑπτὰ δὲ λοιπὰ
Δήεις ἀκρεμόνεσσιν ἐφημένα τηλοτέροισιν.

Quæ ſucciſa iacet, multo nux ardua quondam
Pollebat fœtu, numerumque hac arte recenſet.
Noſtris ex nucibus quintam ſibi Parthenopæa.
Octauamque Philinna capit, quartamque Aganippe.
Septima formoſæ conceditur Orithyiæ.
Eurynome ſextam è numero ſibi vendicat omni.
Centenas ternæ Charites ſenaſque tulere.
Demum Pierides nouies ſumpſere nouenas.
Summis in ramis ſeptem tamen ecce ſuperſunt.

Oportet inuenire numerum cuius $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{6}$. ſimul vnà cum ſumma numerorum 106. 81. 7. puta cum 194. faciant ipſum numerum qui quæritur. Minimus habens partes datas eſt 840. à quo ſi auferas compoſitum ex datis partibus, puta 743. remanet 97 per quem ſi diuidas datum numerum 194. fit quotiens 2. quo ducto in ſumptum numerum 840. fit quæſitus numerus 1680.

XV.

Επτάλοφον ποτὶ ἄςυ Γαδειρόθεν, ἕκτον ὁδοῖο
Βαίτιος ἀιμύκοις ἄχρις ἐς ἠιόνας.
Κεῖθεν δ' αὖ πέμπτον Πυλάδου μέτα φώκιον οὖδας
Ταύρη χθὼν βοέης οὔνομ' ἀπ' εὐετίης.
Πυρήνην δέ τι ἔνθεν ἐπ' ὀρθόκραιραν ἰόντι
Ογδοον, ἡ δὲ μιῆς δωδέκατον δεκάδος.
Πυρήνης δὲ μεσηγὺ καὶ Αλπιος ὑψικαρήνου
Τέτρατον. Αὐσονίης αἶψα δυωδέκατον
Αρχομένης, ἤλεκτρα φαείνεται Ηριδανοῖο
Ω μάκαρ ὃς δισσὰς ἤνυσα χιλιάδας
Πρὸς δ' ἔτι πέντ' ἐπὶ ταῖς ἑκατοντάδας ἔνθεν ἐλαύνων
Η γὰρ Ταρπαίη μέμβλετ' ἀνακτορίη.

Quiſquis adire cupis Romanam Gadibus vrbem,
Sextans ad ripam Bætidis vſque viæ eſt.
Quintantem hinc numera Phocenſis ad arua coloni
A multa regio quæ boue nomen habet.
Inde Pyrenæi præcelſa ad culmina montis
Octans eſt, decimæ parſque duodecima.
Quarta Pyrenæos, gelidas iacet inter & Alpes.
Parte duodecima hinc incipit Auſonia.
Quá Phaëtontiades ſudant electra ſorores.
Sed tamen vlterius millia perge duo.
Reſtabunt quingenta tibi tum denique, donec
Tarpeio poſſis ſiſtere colle gradum.

Quæritur numerus, cuius $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{120}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{12}$. ſimul vnà cum 2500. conficiant ipſum quæſitum numerum. Minimus habens datas partes eſt 120.& illius datæ partes ſimul faciunt 100. quo ablato de 120. remanet 20. per quem diuidendo 2500. fit quotiens 125. quo ducto in ſumptum numerum 120. fit quæſitus 15000. numerus ſcilicet ſtadiorum quæ inter Gades & vrbem Romanam numerat Epigrammatarius.

XVI.

Εὐβλεφάροιο δίκης ἱερὰ χρήδεμνα μίηνας
Οφρα σε πανδαμάτορ χρυσὶ βλέποιμι τόσον.
Οὐδὲν ἔχω, πίσυρας γὰρ ἐπ' οὐκ ἀγαθοῖσι ταλάντων

Οἰανοῖσι, μάτlω δῶκα φίλοις δεκάδας.
Ημίσυ δ᾽ αὖ, τρίτατον ἦ δ᾽ ὄγδοον (ὦ πολύμορφοι
Ανθρώπων κῆρες) ἐχθρὸν ἔχοντα βλέπω.

Iuſtitiæ ſacras auſus conuellere leges
Vt turgens auro cuncta domante forem,
Nil iam poſſideo, infidis quia nuper amicis,
Læua mente quater dena talenta dedi.
Nunc quoque ſemiſſem, ſimul octantem, atque trientem
(O duram ſortem) barbarus hoſtis habet.

Quærendus eſt numerus cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{3}$. ſimul cum 40. efficiant ipſum quæſitum numerum. Minimus habens datas partes eſt 24. cuius datæ partes ſimul faciunt 23. quo detracto de 24. ſupereſt 1. per quem diuidendo 40. fit 40. quo ducto in 24. fit *960.* quæſitus numerus.

XVII.

Πέμπτον μοι κλήρου παῖ λάμβανε. δωδέκατον δὴ
Δέξο δάμαρ. πίσυρες δ᾽ υἷες οἰχομένου
Παιδὸς, ἀδελφειοί τε δύω, ἦ ἀγάστονε μῆτερ
Ενδεκάτlω κλήρου μοῖραν ἕκαστος ἔχε.
Αὐτὰρ ἀνεψιοὶ δύο ϗ δέκα δέχθε τάλαντα.
Εὔβουλος δ᾽ ἐχέτω πέντε τάλαντα φίλος.
Πιστοτάτοις δμώεσσιν ἐλευθερίlω ϗ ἄποινα
Μισθὸν ὑπηρεσίης, τοῖς ἦ δίδωμι τάδε.
Ωδὶ λαμβανέτωσαν, Ονήσιμος εἴκοσι πέντε
Μνᾶς ἐχέτω. Δᾶος δ᾽ εἴκοσι μνᾶς ἐχέτω.
Πεντήκοντα Σύρος, Συνετὴ δέκα, Τίβιος ὀκτὼ.
Επτὰ ἦ μνᾶς Συνέτῳ παιδὶ δίδωμι Σύρου.
Εκ ἦ τριηκόντων κοσμήσατε σῆμα ταλάντων
Ρέζετε δ᾽ οὐδαίῳ ζανὶ θυηπολίlω.
Διασῶν ἐς δὴ πύρlω, ἦ ἄλφιτα, ϗ τελαμῶνας,
Εἰκαίlω δοιοὶ σῶμα χάειν λαβέτω.

Aſſis habe quintam, fili; chariſſima coniux
Sume duodecimam. Quatuor alterius
Natorum nati, fratres bini, optima mater
Vndecimam partem quilibet accipiat.
Ferte talenta decem patrueles aucta duobus
Noſter & Eubulus quinque talenta ferat.
Fidis libertas famulis conceditor, hæcque
Sint longi merces munera ſeruitij.
Vicenas quinas ſibi ſumat Oneſimus; atqui
Vicenas ſinitor Dauus habere minas.
Quinquaginta Syrus, capiat quoque Tibius octo:
At Syneto ſeptem ſint, Syneteque decem.
Triginta totis tumulum exornate talentis,
Debitaque inferno ſacra parate Ioui.
Bina pyræ, cum faſciolis, dapibuſque ſupremis
Artubus vngendis bina talenta dico.

Hic exprimuntur partes $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{7}{11}$. & talenta 12. 5. 30. 2. 2. ac præterea minæ 25. 20. 50. 8. 7. 10. ſeu

minæ 120. quæ valent talenta duo, quare talentorum expressorum numerus est 53. Porrò minimus qui habeat datas partes est 660. atque idem est numerus qui quæritur, quia si ab eo abstuleris datas illius partes, puta 607. remanet 53.

XVIII.

Τύμβος ἐγὼ, κεύθω δὲ πολύστονα τέκνα Φιλίννης,
  Τοῖον μαψιτόκων καρπὸν ἔχων λαγόνων.
Πέμπτον ἐν ἠιθέοις, τρίτατον δ᾽ ἐνὶ παρθενικῇσι.
  Τρεῖς δέ μοι ἀρτιγάμους δῶκε Φίλιννα κόρας.
Λοιποὶ δ᾽ ἠελίοιο πανάμμοροι ἠδὲ καὶ αὐδῆς
  Τέσσαρες ἐκ λαγόνων εἰς Ἀχέροντα πέσον.

Marmore clauditur hoc proles numerosa Philinnæ,
  Frustrà maternis edita visceribus.
Quintantem iuuenes complent; geminumque puellæ
  Sextantem; nuptas tres tegit iste lapis.
Quatuor haud viso ceciderunt sole sub orcum
  Translati ex vtero, proh dolor! in tumulum.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{5}$. & $\frac{1}{6}$. simul cum 7. faciant ipsum quæsitum numerum, & statim per Canonem traditum inuenitur numerus 15.

XIX.

Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος, ἆ μέγα θαῦμα·
  Καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
Εκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην.
  Δωδεκάτῃ δ᾽ ἐπιθεὶς μῆλα πόρεν χλοάειν.
Τῇ δ᾽ ἄρ᾽ ἐπ᾽ ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
  Ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ᾽ ἐπένευσεν ἔτει.
Αἲ αἲ τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρὸς
  Τοῦ δὲ καὶ ὁ κρυερὸς μέτρον ἑλὼν βιότου.
Πένθος δ᾽ αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς
  Τῇ δὲ πόσου σοφίῃ τέρμ᾽ ἐπέρησε βίου.

Hunc Diophantus habet tumulum, qui tempora vitæ
  Illius, mira denotat arte tibi.
Egit sextantem iuuenis; lanugine malas
  Vestire hinc cœpit parte duodecima.
Septante vxori post hæc sociatur, & anno
  Formosus quinto nascitur inde puer.
Semissem ætatis postquàm attigit ille paternæ
  Infelix subita morte peremptus obit.
Quatuor æstates genitor lugere superstes
  Cogitur, hinc annos illius assequere.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{2}$. simul adsumentes 5. & 4. seu 9. faciant ipsum quæsitum numerum. Is ex tradito Canone inuenietur esse 84.

XX.

Παντὸς ὅσον βεβίωκε χρόνου, παῖς μὲν τὸ τέταρτον
Δημοχάρης βεβίωκε; νεανίσκος δὲ τὸ πέμπτον.

Τὸ τρίτον εἰς ἄνδρας. πολιὸν δ' ὅτ' ἀφίκετο γῆρας
Ἔζησεν λοιπὰ ξεῖς καὶ δέκα γήραος οὐδῷ.

Quadrantem ætatis puerilibus egit in annis
Quintantem iuuenis decurrit, virque trientem
Demochares, cana demum accedente senecta
Bis quinos reliquum vixit tresque insuper annos.

Quæritur numerus, cuius $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{3}$. adsumentes 13. faciant ipsum quæsitum numerum. Is inuenietur per vsitatum Canonem 60.

XXI.

Οἷον ἀδελφειός με βιήσατο, πέντε τάλαντα
Οὐχ ὁσίῃ μοίρῃ πατρικὰ δασσάμενος.
Ἑπτὰ κασιγνήτοιο τῶν ἑνδεκάτων πολύδακρυς
Πέμπτον ἔχω μοίρης. Ζεῦ βαθὺν ὕπνον ἔχεις.

Vim frater facit, in partes nec diuidit æquas
Quæ nobis liquit quinque talenta pater.
Nam multum lachrymans septem illius vndecimarum
Quintam habeo partem. Iupiter ista vides?

Numerus 5. diuidendus est in duas partes, vt prioris quinta pars de $\frac{7}{11}$. seu $\frac{7}{55}$. æquentur posteriori. Esto prior 1 N. posterior 5 − 1 N. ergo $\frac{7}{55}$ N. æquantur 5 − 1 N. & fit 1 N. 4 $\frac{27}{62}$. prior pars. Igitur posterior est $\frac{35}{62}$.

XXII.

Εἶπε κυβερνητῆρα, πλατὺν πόρον Ἀδριακοῖο
Τέμνων νηΐ, ἁλὸς πόσα λείπεται εἰσέτι μέτρα;
Τὸν δ' ἀπαμείβετο. ταῦτα μέσον κριοῖο μετώπου
Κρηταίου, Σικελῆς τε Πελωρίδος, ἑξάκι μέτρα
Χίλια, δοιὰ δ' αὖτε παρεξ χθονίοιο δρόμοιο
Πέμπτων διπλάσιοι Σικελὴν ἐπὶ πορθμίδα λείπει.

Adriacas dum findit aquas, è puppe magistrum
Nauta rogat, quantum pelagi iam restet arandum.
Ille refert. Creten inter Siculumque Pelorum
Millia sex numerant, exhausti iamque profundi
Bis gemini nobis quintantes ecce supersunt
Sicania donec remos lentemus in vnda.

Numerus 6000. secandus est in duas partes, vt prioris $\frac{4}{5}$. æquentur posteriori. Esto prior 1 N. ergo posterior 6000 − 1 N. Quare $\frac{4}{5}$. N. æquantur 6000 − 1 N. & fit 1 N. 3333 $\frac{1}{3}$. prior pars. Igitur posterior relinquitur 2666. $\frac{2}{3}$. Quot stadia restabant vsque ad Pelorum.

XXIII.

Τῶν πισύρων κρουνῶν ὁ μὲν ἤματι πλῆσεν ἅπασαν
Δεξαμενὴν, δύο δ' ἄλλος, ὁ δ' ἐν τρισὶν ἤμασιν ἄλλος,
Τέτρατος ἐν πιτόρισι. πόσῳ πλήσουσιν ἅπαντες;

Totum implere lacum tubulis è quatuor, vno
Est potis iste die, binis hic & tribus ille,
Quatuor at quartus. Dic quo spatio simul omnes.

Pone quatuor tubos ſimul implere totum lacum in 1 N. dierum. Et dic per regulam trium ſi primus tubus vna die implet totum lacum, ſeu vnum lacum, quantum implebit in 1 N. diei, inuenies 1 N. eadem ratione reperies ſecundum tubum implere $\frac{1}{2}$ N. tertium $\frac{1}{3}$ N. quartum $\frac{1}{4}$ N. Quare omnes ſimul implebunt $\frac{25}{12}$ N. Quare $\frac{25}{12}$ N. æquantur vnitati, & fit 1 N. $\frac{12}{25}$. Quare omnes tubi ſimul implebunt lacum in $\frac{12}{25}$. diei.

Hinc porro ad ſoluendas huiuſmodi quæſtiones formabimus huiuſmodi Canonem.

Diuide vnitatem ſigillatim per denominatores rationum datarum, rurſus per ſummam quotientum diuide vnitatem, orietur quæſitus numerus.

Vt in propoſita quæſtione, quia denominatores rationum datarum ſunt 1. 2. 3. 4. diuide vnitatem, ſigillatim per 1. 2. 3. 4. fient 1 $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. quorum ſumma $\frac{25}{12}$ per quam rurſus diuide vnitatem, fit $\frac{12}{25}$ numerus quæſitus.

XXIV.

Οἶγέ με, καὶ πισύρεσσιν ἐνιπλήσω προχεῦσαν
 Δεξαμενὴν ὥραις, κρουνὸς ἅλις προρέων.
Δεξιτερὸς δ' ἄρ' ἐμεῖο τόσαις ἀπολείπεται ὥραις
 Ὄφρα μιν ἐμπλήσῃ. δὶς δὲ τόσαις ὁ τρίτος.
Εἰ δ' ἄμφω σὺν ἐμοὶ προχέειν ῥόον ἐς μίαν οἴγοις
 Ἐν ὀλίγῃ μοίρῃ πλήσομεν ἠματίῃ.

Me reſera, & lymphas profundens quatuor horis
 Subiectum implebo protinus ipſe lacum.
Æquali dexter ſpatio, duploque ſiniſter
 Quando fluit, vitreis hunc tubus implet aquis.
Parte ſed implemus longè breuiore diei
 Vno ſi mecum tempore vterque fluat.

Per Canonem ſuprà traditum diuide ſigillatim vnitatem per numeros 4. 4. 8. fient quotientes $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. quorum ſumma $\frac{5}{8}$. per quam ſi diuidas rurſus vnitatem fit $\frac{8}{5}$ quæſitus horarum numerus, quibus tres tubi ſimul lacum implebunt.

XXV.

Κύκλωψ ὁ Πολύφημος ὁ χάλκεος, οἷα δ' ἐπ' αὐτῷ
 Τεῦξε τὶς ὀφθαλμὸν, καὶ στόμα, καὶ παλάμην.
Κρουνοῖς συζεύξας, στάζοντι δὲ πάμπαν ἔοικεν
 Ἡ δ' ἔτι καὶ βλύζων φαίνετ' ἀπὸ στόματος.
Κρουνῶν δ' οὔτις ἄτακτος. ὁ μὲν παλάμης τρισὶ μούνοις
 Ἤμασιν ἐμπλήσει δεξαμενὴν προρέων.
Ἠμάτιος γλήνης, στόματος δ' ἤματος ἐν δύο πέμπτοις.
 Τίς κ' ἐνέποι τρισσοῖς ἰσαθέοντα χρόνον.

Æreus hic Cyclops Polyphemus. Reſpice quali
 Arte, quis os, oculum finxerit, atque manum.
Occultos parti ſalientes cuilibet aptans
 Effecit gelidas vt iaculentur aquas.
Ordine ſed tali. Plenus tribus ecce diebus
 Eſt lacus, è dextræ ſi fluat vnda tubo.
Vna dies oculo; geminatus ſufficit ori
 Quintans. Quod ſpatium ſufficit ergo tribus?

Ex lege traditi Canonis diuide ſigillatim vnitatem per 3. 1. $\frac{2}{5}$. fient quotientes $\frac{1}{3}$. 1. $\frac{5}{2}$. quorum ſumma $\frac{23}{6}$. per quam ſi diuidas rurſus vnitatem, fit quæſitus numerus $\frac{6}{23}$. pars diei qua tres tubi ſimul lacum impleturi ſunt.

XXVI.

Ὡς ἀγαθὸν κρητῆρα θεοὶ κερόωσι ῥέεθρον
  Οἱ δὲ δύω ποταμοὶ, καὶ Βρομίοιο χάρις.
Ἶσος δ' οὐ πάντεσσι ῥόου δρόμος, ἀλλά μιν οἶος
  Νεῖλος μὲν προρέων ἤματος ἐμπλήσει,
Τόσσον ὕδωρ μαζῶν ἀπερεύγεται. ἐκ δ' ἄρα Βάκχου
  Θυρσὸς ἐνὶ τρισσοῖς ἤμασιν οἶνον ἱείς.
Σὸν δὲ κέρας Ἀχελῷε δύ' ἤμασι. νῦν δ' ἅμα πάντες
  Ῥεῖτε, καὶ ἐν ὥραις πλήσετε μιν ὀλίγαις.

Vt miſcent pariter dulcem in Cratere liquorem
  Hinc gemini fluuij, Liber & inde pater.
At non æquali ſpatio tamen influit humor
  Vno namque potes nile replere die.
Tantum fundis aquæ è mammis. Tribus ecce diebus
  Quod Thyrſo præbes implet Iacche merum.
Binos cornu Acheloë dies fluis. At ſimul omnes
  Ite, breui Crater tempore plenus erit.

Diuide ſigillatim vnitatem per 1. 3. 2. fient quotientes 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. quorum ſumma $\frac{11}{6}$. per quam diuide rurſus vnitatem, fit quæſitus numerus $\frac{6}{11}$. pars ſcilicet diei qua tres tubi ſimul craterem implebunt.

XXVII.

Ὦ γύναι ὡς πενίης ἐπελήσαο. ἡδ' ἐπίκειται
  Αἰὲν ἀναγκαίη κεῖτερα φέρουσα πόνων.
Μνᾶν ἐρίων νήθεσκες ἐν ἤματι. πρεσβυτέρη δὲ
  Θυγατέρων, καὶ μνᾶν καὶ τρίτον εἷλκε κρόκης.
Ὁπλοτέρη δὲ μνῆς φέρεν ἥμισυ. νῦν δ' ἅμα πάσαις
  Δόρπον ἐφοπλίζει μναῖ ἐρύσας ὁ κανών.

Te tua paupertas mulier latet? Attamen vrget
  Et duri ſtimulos ipſa laboris habet.
Quotidie vnam tu: ſed maior nata ſolebat
  Lanæ cum toto nere triente minam.
Nebat nata minor ſemiſſem. Nunc tribus autem
  Ex vna vobis cœna parata mina eſt.

Senſus eſt. Mater quotidie nebat minam vnam lanæ. Maior natarum $\frac{4}{3}$. vnius minæ. Minor nata $\frac{1}{2}$ vnius minæ. Nunc tres ſimul nent minam vnam tantum quotidie, quæritur quantum quælibet neat eadem ſeruata proportione. Hoc ergo nil aliud eſt quàm diuidere vnitatem in tres partes ſeruantes eaſdem rationes quas habent inter ſe 1. $\frac{4}{3}$. $\frac{1}{2}$. Quare per Canonem ſecundæ primi adde ſimul 1. $\frac{4}{3}$. $\frac{1}{2}$. fit ſumma $\frac{17}{6}$. per quam diuide vnitatem, fit quotiens $\frac{6}{17}$ quem ducito ſigillatim in ipſos 1. $\frac{4}{3}$. $\frac{1}{2}$. fient quæſiti numeri $\frac{6}{17}$. $\frac{8}{17}$. $\frac{3}{17}$.

XXVIII.

Οἱ δὲ λοετροχόοι τρεῖς ἕσταμεν ἐνθάδ' ἔρωτες
Καλλιρόου πέμποντες ἐπ' Εὐρίποιο λοετρά·
Δεξιτερὸς μὲν ἐγώγε, τανυπτερύγων ἀπὸ ταρσῶν
Ἤματος ἑκταίῃ μοίρῃ ἐνὶ τὸν δὲ κορέσσω.
Λαιὸς δ' αὖ πισύρεσσιν ἀπ' ἀμφιφορῆος ἐν ὥραις·
Ἐκ δ' ὁ μέσος τόξοιο καθ' ἤματος αὐτὸ τὸ μέσσον.

Φράζεο δ' ὡς ὀλίγῃ κεν ἐνιπλήσαιμεν ἐν ὥρῃ
Ἐκ πτερύγων, τόξου τε, καὶ ἀμφιφορῆος ἰόντες.

Qui iaculamur aquas tres hîc adſtamus Amores.
Sed variè liquidas Euripo immittimus vndas.
Dexter ego, ſummis & quæ mihi manat ab alis
Ipſum Lympha replet ſolo ſextante diei.
Quatuor aſt horis læuus verſa influit vrna
Dimidiatque diem medius dum fundit ab arcu.
Dic age quàm paucis Euripum implebimus horis
Ex arcu ſimul, atque alis, vrnaque fluentes?

Diem conſtituentes ex 12. horis, erunt quatuor horæ $\frac{1}{3}$. diei. Quare per Canonem ſuprà traditum diuidemus vnitatem ſigillatim per $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. fient quotientes 6. 3. 2. quorum ſumma 11. per quam diuidendo vnitatem fit $\frac{1}{11}$ quæſita pars diei, qua tres Amores ſimul fluentes Euripum implebunt.

XXIX.

Πλινθουργοὶ μάλα τοῦτον ἐπείγομαι οἶκον ἐγεῖραι
Ημαρ δ' ἀννέφελον τόδε σήμερον. ἠδ' ἔτι πολλὰς
Χρῄζω, πᾶσαν δὲ τριηκοσίῃσι δέουσαν
Πλίνθον ἔχω. σὺ δὲ μοῦνος ἐν ἤματι τόσσον ἔτευχες.
Παῖς δέ τοι ἐκ καμάτοιο διηκοσίαις ἀπέληγεν.
Γαμβρὸς δ' αὖ τόσσῃσι καὶ εἰσέτι πεντήκοντα.
Τρισσαῖς συζυγίαις πόσσαις τόδε τεύχεται ὥραις.

Fictores laterum ceſſerunt nubila cœlo
Indulgete operi; domus vt mea perficiatur
Non multi deſunt lateres, finxiſſe tricenos
Sufficiet. Tantum ſolus formare ſolebas
Qualibet ipſe die: ſed centum, filius. Atqui
Illo quinquaginta minus gener edere ſuetus.
Quos peto tres pariter quot conſummabitis horis?

Cùm pater vna die conficiat 300. lateres, filius 100. gener 50. tres ſimul vna die conficiunt 450 Dic ergo per regulam trium. Si 450. lateres conficiuntur vna die quo tempore fient 300. Inuenies $\frac{2}{3}$. diei, ſeu horis octo, ſi diem 12. horarum conſtituas.

XXX.

Δακρὺ παρασάξαντες ἀμείβετε. οἱ γὰρ ἡμεῖς
Οὓς τόδε δῶμα πεσὸν ὤλεσεν Ἀντιόχου
Δαιτυμόνας, οἷσιν γε θεὸς δαιτός τε τάφου τε
Τὸν δ' ἔπορεν χῶρον. τέσσαρες ἐκ Τεγέης
Κείμεθα. Μεσσήνης δὲ δυώδεκα. ἐκ δ' ἔτι πέντε
Ἄργεος. ἐκ Σπάρτης δ' ἥμισυ δαιτυμόνων.
Αὐτὸς δ' Ἀντίοχος. πέμπτου δὲ τε πέμπτον ὄλοιτο
Κεκροπίδαι. σὺ δ' Ὕλαν κλαῖε Κόρινθε μόνον.

Carpe viator iter lacrymans. Hîc namque iacemus
Quos domus vna cadens obruit Antiochi
Queis epulas inter crudeli occumbere letho
Fata tulere. Iacent quatuor ex Tegea
Bis ſex Meſſene; clarum quinque edidit Argos.
Dimidium Sparte Martis amica tulit.

Occidit Antiochus. Quintam quintantis Athenæ
Lugent; extinctum fletque Corinthus Hylam.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{25}$. simul adsumentes 23. (nam tot conuiuæ numerantur) efficiant ipsum quæsitum numerum. Reperietur ergo per Canonem sæpè vsitatum, numerus 50.

XXXI.

Νικαρέτη παίζουσα σὺν ἡλικιώτισι πέντε
Ὧν εἶχε καρύων Κλειτ' ἔπορεν τὸ τρίτον.
Καὶ Σαπφοῖ τὸ τέταρτον. Ἀριστοδίκῃ δὲ τὸ πέμπτον.
Εἰκοστὸν Θεανοῖ, καὶ πάλι δωδέκατον.
Εἰκοστὸν τέτρατον δὲ Φιλιννίδι, καὶ περίλοιπα δὲ
Πεντήκοντ' αὐτῇ Νικαρέτῃ κάρυα.

Mittens Nicarete sociabus dona, suarum
Impertit Cliten læta triente nucum.
Sappho quarta datur. Vigesima facta Theanûs
Atque duodecima est; Quintaque Aristodices.
Pars tibi cùm cessit vigesima quarta Philinni
Quinquaginta sibi Nicarete retinet.

Quæritur numerus, talis, vt illius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{20}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{24}$. simul additæ, & adsumentes 50. conficiant ipsum qui quæritur numerum. Minimus qui habeat datas partes est 120. cuius datæ partes simul conficiunt 115. quo ablato de 120. superest per quem diuidendo 50. fit quotiens 10. quo ducto in 120. fit quæsitus numerus 1200.

XXXII.

Γνωμονικῶν Διόδωρε μέγα κλέος, εἰπέ μοι ὥρην,
Ἧνικ' ἀπ' ἀντολίης πόλον ἥλατο χρύσεα κύκλα
Ἠελίου; τοῦ δ' ἤτοι ὅσον τρία πέμπτα δρόμοιο
Τετράκι τόσσον. ἔπειτα μεθ' ἑσπερίην ἅλα λείπει.

Dic quota iam effluxit pars ô Diodore diei.
Auratis ex quo radiis sol gnomona tangit
Quantum decursi tres quintæ temporis, inde
Est tantum quater, hesperiis dum se occulat vndis.

Hic numerus 12. diuidendus est in duas partes, ita vt posterior contineat quater $\frac{3}{5}$. seu $\frac{12}{5}$ prioris; vel quod idem est 12. secandus est in duas partes seruantes rationem quam habet 5. ad 12. Quare per Canonem secundæ primi addo simul 5. & 12. fit 17. per quem diuido 12. fit $\frac{12}{17}$. quem duco sigillatim in 5. & in 12. fiunt quæsitæ partes $\frac{60}{17}$. & $\frac{144}{17}$. Itaque transactum tempus est horarum 3 $\frac{9}{17}$. reliquum verò est horarum 8 $\frac{8}{17}$.

XXXIII.

Ζεῦ μάκαρ, ἦρά τοι ἦρα τά δ' ἔαδεν, οἷα γυναῖκες
Θεσσαλικαὶ παίζουσι; μαραίνεται ὄμμα Σελήνης
Ἐκ μερόπων. ἴδον αὐτὸς, ἔην δ' ἔτι νυκτὸς ἐπ' ἠῶ
Δὶς τόσσον ὅσσα δύ' ἕκτα καὶ ἕβδομον οἰχομένοιο.

Proh superûm pater, ista placet quæ Thessala cantu
Molitur maga? Cùm Phœbe pudibunda lateret
Vidi ego. Bis tantum solis restabat ad ortum
Tertia transactæ quantum & pars septima noctis.

Numerus 12. rurſus diuidendus eſt in duas partes, ita vt poſterior contineat $\frac{2}{3}$. & $\frac{2}{7}$. ſeu $\frac{20}{21}$. prioris. Quare 12. ſecandus eſt in duas partes ſeruantes rationem quam habet 21. ad 20. Ergo per Canonem ſecundæ primi addo ſimul 21. & 20. fit 41. per quem diuido 12. fit $\frac{12}{41}$. quem duco ſigillatim in 21. & in 20. fiunt quæſitæ partes $\frac{252}{41}$. & $\frac{240}{41}$. Itaque quando Eclipſis lunæ facta eſt, tranſierant horæ noctis 6 $\frac{6}{41}$. Reſtabant autem vſque ad ſolis ortum, horæ 5 $\frac{35}{41}$.

XXXIV.

Ἀπλανέων ἄστρων παρόδοις δ' ἐπὶ τοῖσιν ἀλήταις
  Εἰπέ μοι ἥνικ' ἐμοὶ χθιζὸν ἔτικτε δάμαρ.
Ἦμαρ ἔην ὅσσόν τε δὶς ἕβδομον ἀντολίηθεν
  Ἑξάκι τόσσον ἔην ἑσπερίην ἐς ἅλα.

Fixorum coitus Aſtrorum, vnaque vagantum
  Dic age cùm pareret vxor amata mihi.
Lux erat, & quantum ſeptans geminatus ab ortu
  Tantum bis ter erat ſolis ad occubitum.

Numerus 12. denuò diuidendus eſt in duas partes, ita vt poſterior contineat ſexies $\frac{2}{7}$. id eſt $\frac{12}{7}$ prioris. Quare 12. ſecandus eſt in duas partes ſeruantes rationem quam habet 7. ad 12. Addo ſimul 7. & 12. fit 19. per quem diuido 12. fit quotiens $\frac{12}{19}$. quem duco ſigillatim in 7. & in 12. fiunt quæſitæ partes $\frac{84}{19}$. & $\frac{144}{19}$. Itaque tempore partus tranſierant horæ diei 4 $\frac{8}{19}$. Reſtabant autem vſque ad noctem horæ 7 $\frac{11}{19}$.

XXXV.

Ἔγρεσθ' ἠριγένεια παρέδραμε πέμπτον ἔσεσθαι
  Λειπομένης τρισσῶν οἴχεται ὀγδοάτων.

Surgite lanificæ, lux eſt, reliquæque diei
  Octantum effluxit portio quinta trium.

Numerus 12. diuidendus eſt quoque in duas partes, ita vt prior contineat quintam partem de $\frac{3}{8}$ ſeu $\frac{3}{40}$. poſterioris. Quare 12. ſecandus eſt in duas partes ſeruantes rationem quam habet 3. ad 40. addo 3. ad 40. fit 43. per quem diuido 12. fit quotiens $\frac{12}{43}$. quo ducto ſigillatim in 3. & in 40. fiunt quæſitæ partes $\frac{36}{43}$ & $\frac{480}{43}$. Itaque iam effluxerant horæ vnius $\frac{36}{43}$. reſtabant autem horæ 11 $\frac{7}{43}$.

XXXVI.

Σύρτιος ἐν πελάγεσσι πατὴρ θάνεν, ἐκ δ' ἄρ' ἐκείνης
  Πέντε τάλαντα φέρων ἤλυθε ναυτιλίης
Οὗτος ἀδελφειῶν προφερέστατος, ἢ γὰρ ἔμοιγε
  Δῶκεν ἑῆς μοίρης διπλάσιον τριτάτων
Δοιῶν, ἡμετέρης δ' ἐὺ ὄγδοα μητέρι μοίρης
  Ὤπασεν, οὐδὲ δίκης ἤμβροτεν ἀθανάτων.

Syrtibus in medijs pater occidit; Attamen inde
  Incolumis rediit quinque talenta ferens
Optimus hic fratrum: Gemini mihi namque trientis
  Duplum conceſſit ſortis habere ſuæ.
At charam noſtræ partis quadrante parentem
  Donauit, certus non violaſſe deos.

Numerus 5. diuidendus eſt in tres partes, ita vt ſecunda contineat $\frac{4}{3}$ primæ. At tertia contineat $\frac{1}{4}$ ſecundæ. Hoc eſt 5. diuidendus eſt in tres partes ſeruantes eaſdem rationes, quas ſeruant 3. 4. 1. Horum ergo ſumma eſt 8. per quam diuido 5. fit $\frac{5}{8}$ quo ducto ſigillatim in ipſos 3. 4. 1. fiunt quæſitæ partes $\frac{15}{8}$. $\frac{20}{8}$. $\frac{5}{8}$. Habuit igitur primus frater talentum 1. & $\frac{7}{8}$. ſecundi talenta 2 $\frac{4}{8}$. Mater verò $\frac{5}{8}$ vnius talenti, vel ſi placet talentum vnum, minas reſoluere in minas 60. & minam in drachmas 100.

habuit primus frater talentum 52. drachmas 50. secundus frater habuit talenta 2. minas 30. mater denique minas 37. drachmas 50.

XXXVII.

Α βάσις ἂν πατέω σὺν ἐμοὶ βάρος ἀλίκον ἕλκει
Χ' ἁ κρηπὶς σὺν ἐμοὶ τόσσα τάλαντα φέρει.
Ἀλλ' ἐγὼ οἶος ἅπαξ τὰν σὰν βάσιν ἐς δὶς ἀνέλκω.
Κἠγὼ μοῦνος ἐὼν σὰν βάσιν ἐς τρὶς ἄγω.

Quam calco basis, hæc mecum pondus trahit ingens.
Mecum æquale trahit pondus & ista basis.
Solus at ipse tuæ baseos sum pondere duplus.
Sum triplus baseos solus & ipse tuæ.

Hæc quæstio non vnam recipit solutionem, sed infinitas. Nam quæritur Numerus qui bis ita diuidatur in duas partes, vt maior priori diuisionis sit dupla ad maiorem posterioris diuisionis. At maior posterioris diuisionis sit tripla ad minorem prioris. Omnem autem numerum ita diuidi posse bis in duas partes, docuit abundè Diophantus quæstione duodecima libri primi. Statuamus verbi gratia quamlibet statuam cum sua base pendere talenta 100. Diuidetur ergo 100. in partes quæsitas per operationem Diophanti loco citato, vel per Canonem à nobis ibidem traditum, & erunt partes prioris diuisionis 80. & 20. At partes posterioris 40. & 60. quæ propositum implent.

XXXVIII.

Δός μοι δέκα μνᾶς, ἐ τρίπλους σοι γίνομαι.
Κἀγὼ λαβὼν σοῦ τὰς ἴσας, σοῦ πεντάπλους.

Minas decem da, triplus vt fiam tui.
At tu decem da, quintuplus fiam vt tui.

Quæruntur duo numeri, vt primus accipiens 10. à secundo, sit triplus eius quod relinquitur secundo. At secundus accipiens 10. à primo, sit quintuplus ad residuum primi. Similem quæstionem tractauit Diophantus lib. 1. quæstione 15. sic autem soluitur. Esto primus 1 N. + 10. hic ergo cùm dederit 10. secundo remanebit 1 N. & erit tunc secundus 5 N. à quo si auferas 10. quæ accepit à primo, erit secundus ab initio 5 N. − 10. Restat vt primus accipiens 10. à secundo, sit triplus ad residuum secundi. Quare 1 N. + 20. triplus erit ad 5 N. − 20. ac proinde 1 N. + 20. triplus erit ad 5 N. − 20. ac proinde 1 N. + 20. æquatur 15 N. − 60. & fit 1 N. 5 $\frac{5}{7}$. sunt ergo quæsiti numeri 15 $\frac{5}{7}$. & 18. $\frac{4}{7}$.

XXXIX.

Δός μοι δύο μνᾶς, καὶ διπλοῦς σοι γίνομαι.
Κἀγὼ λαβὼν σοῦ τὰς ἴσας, σοῦ τετράπλους.

Minas duas da, duplus vt fiam tui.
At tu duas da, quadruplus fiam vt tui.

Hæc quæstio eiusdem est naturæ atque præcedens. Esto primus 1 N. + 2. hic ergo cùm dederit 2. secundo, remanebit 1 N. eritque tunc secundus 4 N. & ab eo si auferas 2. quæ accepit à primo, erit secundus ab initio 4 N. − 2. qui si dederit 2. primo fiet primus 1 N. + 4. duplus ad residuum secundi, puta ad 4 N. − 4. Quare 1 N. + 4. æquatur 8 N. − 8. vnde fit 1 N. 1 $\frac{5}{7}$. sunt igitur quæsiti numeri 5 $\frac{5}{7}$. & 4 $\frac{6}{7}$.

XL.

Ομηρος Ησιόδῳ ἐρωτήσαντι πόσον τὸ τῶν Ελλήνων
πλῆθος κατὰ τῆς Ιλίου στρατεῦσαν.

Επτ' ἔσσαν μαλεροῦ πυρὸς ἐσχάραι· ἐν δὲ ἑκάστῃ
Πεντήκοντ' ὀβελοί, περὶ δὲ κρέα πεντήκοντα.

Τρίς τε τριηκόσιοι περὶ ἓν κρέας ἦσαν Ἀχαιοί.

Homerus Hesiodo interroganti quanta fuisset Græcorum
multitudo aduersus Troiam militantium.

Septeni luxere foci, sed quemlibet antè
Quinquaginta caro verubus confixa tremebat,
Nougentisque veru Danaïs data fercula ab vno.

Per solam multiplicationem bis repetitam soluitur quæstio, ducito 7. in 50. fit 350. quem rursus ducito in 900. fit numerus Græcorum militum 315000. extat hoc epigramma in agone Homeri & Hesiodi Græcè edito, sed corruptum, nam initium primi versus sic legitur.

Πεντήκοντ᾽ ἦσαν πυρὸς ἐσχάραι.

Vnde non immeritò Agonis illius author incredibilem quæ inde colligitur militum multitudinem miratur, sic enim fieret eorum numerus 2250000.

His quæ nondum edita erant Epigrammatis, subiicere libet quinque sequentia cum nostra interpretatione, ne quid ad hanc materiam pertinens hîc deesse sinamus, quamuis olim hæc edita circumferantur in Anthologia.

XLI.

Παλλὰς ἐγὼ χρυσῆ σφυρήλατος. αὐτὰρ ὁ χρυσὸς
Αἰζηῶν πέλεται δῶρον ἀοιδοπόλων.
Ἥμισυ μὲν χρυσοῖο Χαρίσιος; ὀγδοάτην δὲ
Θέσπις. καὶ δεκάτην μοῖραν ἔδωκε Σόλων.
Αὐτὰρ ἐεικοστὴν Θεμίσων. τὰ δὲ λοιπὰ τάλαντα
Ἐννέα, καὶ τέχνη δῶρον Ἀριστοδίκου.

Aurea Pallas ego. Musis sed amica iuuentus
Materiam docto præbuit artifici
Octauam Thespis, partemque Charisius auri
Dimidiam, decimam contulit ipse Solon.
A Themisone data est vigesima. Terna talenta
Et sena, ipse opifex præstat Aristodicus.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{20}$. simul, adsumentes 9. conficiant ipsum quæsitorum numerum. Minimus habens datas partes est 40. idemque quæsitus numerus, vt constat ex Canone iam sæpè à nobis vsurpato.

XLII.

Αὐγείην ἐρέεινε μέγα σθένος Ἀλκείδαο
Πληθὺν βουκολίων διζήμενος. ὃς δ᾽ ἀπάμειπτο.
Ἀμφὶ μὲν Ἀλφειοῖο ῥοὰς φίλος ἥμισυ τῶν δε.
Μοίρη δ᾽ ὀγδοάτη ὄχθον Κρόνου ἀμφινέμονται.
Δωδεκάτη δ᾽ ἀπάνευθε Ταραξίπποιο παρ᾽ ἱρόν.
Ἀμφὶ δ᾽ ἄρ᾽ Ἤλιδα δῖαν ἐεικοστὴ νεμέθονται.
Αὐτὰρ ἐν Ἀρκαδίῃ τριηκοστὴν προλέλοιπα.
Λοιπὰς δ᾽ αὖ λεύσσεις ἀγέλας τόδε πεντήκοντα.

Augæam rogat Alcides, quot pascua circûm
Errarent armenta sibi. Cui retulit ille.
Pascitur Alphæi rapidas semissis ad vndas.
Pars octaua sacro Saturni in colle vagatur.
Pone Taraxippi tumulum sextantis oberrat

Dimidium; decimæ ſemiſſem detinet Elis.
Denique in Arcadicis trigeſima ſubſtitit oris.
Quadraginta vides tamen hîc armenta relinqui.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{20}$. $\frac{1}{30}$. ſimul cum numero 50. efficiant ipſum quæſitum numerum. Minimus habens datas partes eſt 120. cuius datæ partes ſimul efficiunt 95. quo ablato de 120. ſupereſt 25. per quem diuide 50. fit 2. quo ducto in 120. fit 240. quæſitus armentorum numerus.

XLIII.

Χάλκεός εἰμι λέων, κρουνοὶ δέ μοι ὄμματα δοιά,
Καὶ στόμα, σὺν δὲ θέναρ δεξιτεροῖο ποδός.
Πλήθει δὲ κρατῆρα δυ' ἤμασι δεξιὸν ὄμμα,
Καὶ λαιὸν τρισσοῖς, καὶ πισύρεσσι θέναρ.
Ἄρκιον ἓξ ὥραις πλῆσαι στόμα. σὺν δ' ἅμα πάντα
Καὶ στόμα, καὶ γλῆναι, καὶ θέναρ, εἰπὲ πόσον;

Æreus adſto leo, tubuli mihi lumina bina
Oſque etiam, dextri ſic quoque planta pedis.
Binis dextro oculo, ternis lacus iſte diebus,
Impletur læuo ſed pede bis geminis.
Ori ſufficiunt ſex horæ. Dic ſimul ergo
Quo ſpatio os, oculi, peſque replere valent.

Sumendo diem artificialem 12. horarum, cuius 6. horæ ſunt $\frac{1}{2}$. erunt numeri exprimentes rationes datas 2. 3. 4. $\frac{1}{2}$. per quos ſigillatim diuiſa vnitate fiunt quotientes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. 2. quorum ſumma $\frac{37}{12}$ per quam rurſus diuidendo vnitatem fit quæſita pars diei $\frac{12}{37}$. ſeu horæ $3\frac{33}{37}$.

XLIV.

Ἄμφω μὲν ἡμεῖς εἴκοσι μνᾶς ἕλκομεν
Ζῆθός τε χ' ὡ ξύναιμος, ἢν δὲ μου λάβῃς
Τρίτον, τὸ τέτρατόν τε τοῦ δ' Ἀμφίονος,
Ἓξ πάντ' ἀνδρῶν, μητρὸς εὑρήσεις σταθμόν.

Viginti vterque pendimus ſimul minas
Zethus ego, fraterque. Attamen ſi ceperis
Mei trientem, cum quadrante Amphionis
Senæ, parentis pondus, exibunt minæ.

Soluit ſimilem quæſtionem Diophantus lib. 1. quæſt. 5. Nam numerus 20. diuidendus eſt in duas partes, vt $\frac{1}{3}$. prioris, & $\frac{1}{4}$. poſterioris ſimul efficiant 6. Eſto poſterioris $\frac{1}{4}$. 1 N. ipſa ergo pars poſterior eſt 4 N. At triens prioris eſt 6 − 1 N. ipſa prior pars 18 − 3 N. At duarum partium ſumma fit 18 + 1 N. æqualis 20. Ergo 1 N. eſt 2. Igitur quæſitæ partes de 20. ſunt 12. & 8. & ſatisfaciunt propoſito.

XLV.

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέουσαι οἶνον ἔβαινον.
Αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄχθει φόρτου ἑοῖο.
Τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἐκείνη.
Μῆτερ τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι ἠΰτε κούρη;
Εἰ μέτρον ἕν μοι δοίης, διπλάσιον σέθεν ἦρα.
Εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις.
Εἰπὲ τὸ μέτρον ἄριστε γεωμετρίης ἐπίιστορ.

Vnà cum mulo vinum portabat asella,
Atque suo grauiter ceu pondere pressa gemebat
Talibus at dictis mox increpat ille gementem.
Mater quid luges teneræ de more puellæ?
Dupla tuis, si des mensuram, pondera gesto,
At si mensuram capias, æqualia porto.
Optime mensuras distingue Geometer istas.

Hæc etiam quæstio soluitur per decimam quintam primi. Nam quæruntur duo numeri, vt primus accipiens 1. à secundo sit duplus ad residuum secundi; at secundus accipiens 1. à primo sit æqualis residuo primi. Esto primus 1 N. + 1. Ergo dando 1. secundo, remanebit primus 1 N. & tunc secundus erit 1 N. Quare auferendo ab eo vnitatem quam accepit à primo, fit secundus, vt erat ab initio 1 N. − 1. Iam si ab eo primus accipiat 1. fiet primus 1 N. + 2. & residuum secundi erit 1 N. − 2. Itaque 1 N. + 2. duplus est ad 1 N. − 2. & tandem 1 N. + 2 æquatur 2 N. − 4. Vnde fit 1 N. 6. Sunt ergo quæsiti numeri 7. & 5.



DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM

LIBER SEXTVS.

QVÆSTIO I.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt hypotenusa subtracto alterutro laterum circa rectum, faciat cubum. Esto quæsitum triangulum effictum à duobus numeris, & sit alter 1 N. alter 3. fit igitur hypotenusa 1. Q. + 9. perpendiculum 6 N. Basis 1 Q. − 9. Et hypotenusa dempto vno laterum circa rectum, hoc est 1 Q. − 9. facit 18. qui non est cubus. Vnde autem prouenit 18? Quadratus est de 3. bis sumptus. Oportet igitur inuenire numerum aliquem, vt illius quadratus bis sumptus faciat cubum. Esto quæsitus numerus 1 N. & fiunt 2 Q. æquales cubo. Esto 1 C. & fit 1 N. 2. Rursus formo triangulum ab 1 N. & non à 3. sed à 2. & fit hypotenusa 1 Q. + 4. Perpendiculum 4 N. Basis 1 Q. − 4. & manet hypotenusa detracta basi faciens cubum. Superest vt & perpendiculum quod est 4 N. detractum ab hypotenusa faciat cubum. Fit autem 1 Q. + 4 − 4 N. æquale cubo. Est autem quadratus à latere 1 N. − 2. si ergo æquemus cubo 1 N. − 2. soluemus quæstionem. Esto æquale 8. fit 1 N. 10. Itaque formabitur triangulum à 10. & 2. & fit hypotenusa 104. Perpendiculum 40. Basis 96. & constat.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ λείψας τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ κύβον. ἔστω τὸ ζητούμενον τρίγωνον πεπλασμένον ἀπὸ δύο ςς. καὶ ἔστω ὁ μὲν ςο α. ὁ δὲ μο γ. γίνεται οὖν ἡ μὲν ὑποτείνουσα δυ α. μο θ. ἡ δὲ κάθετος ςς ς. ἡ δὲ βάσις δυ α. λείψει μο θ. καὶ ἡ ὑποτείνουσα ἐὰν λείψῃ μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τουτέστι δυ α. λείψει μο θ. γίνεται μο ιη. καὶ οὐκ ἔστι κύβος. πόθεν ὁ ιη. ὁ ἀπὸ τοῦ γ ἐστὶ τετράγωνος, δὶς γενόμενος. δεῖ οὖν εὑρεῖν ἀριθμόν τινα, ὅπως ὁ ἀπὸ τούτου τετράγωνος δὶς γενόμενος ποιῇ κύβον. ἔστω ὁ ζητούμενος ςο α. καὶ γίνονται δυ β. ἴσαι κύβῳ. ἔστω κυ α. καὶ γίνεται ὁ ςο μο β. πάλιν πλάσσω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ἀριθμοῦ α. καὶ οὐκ ἔτι μο γ. ἀλλὰ μο β. καὶ γίνεται ἡ ὑποτείνουσα δυνάμεως α. μο δ. ἡ δὲ κάθετος ἀριθμῶν δ. ἡ δὲ βάσις δυ α. λείψει μο δ. καὶ μένει ἡ ὑποτείνουσα λείψασα τὴν ἐν τῇ βάσει τουτέστι δυ α. λείψει μο δ. ποιοῦσα κύβον. λοιπόν ἐστι καὶ τὴν κάθετον οὖσαν ςς δ. λειφθεῖσαν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ποιεῖν κύβον. γίνεται δὲ δυ α. μο δ. λείψει ςς δ. ἴσον κύβῳ. καὶ ἔστι τετράγωνος ἀπὸ πλευρᾶς ςο α. λείψει μο β. ἐὰν οὖν ἀριθμὸν α λείψει μο β. ἰσώσωμεν κύβῳ, λύσομεν τὸ ζητούμενον. ἔστω ἴσον μο η. καὶ γίνεται ὁ ςο μο ι. ὥστε πλασθήσεται τὸ τρίγωνον ἀπὸ μο ι. καὶ μο β. καὶ γίνεται ἡ μὲν ὑποτείνουσα ρδ. ἡ δὲ κάθετος μο μ. ἡ δὲ βάσις μο ϟς. καὶ μένει.

In VI. Librum Diophanti Commentarij.

IN QVAESTIONEM I.

OPERATIO Diophanti facilis est, in qua tamen nonnulla occurrunt animaduersione digna. Quare primò aduerte à duobus numeris formari triangulum rectangulum, modo quem demonstrauimus propositione quinta tertij porismatum. Et fit hypotenusa summa quadratorum, basis interuallum eorundem, perpendiculum verò duplum multiplicationis laterum. Hinc apparet cur ab hypotenusa detracto perpendiculo, relinquatur quadratus. ' Etenim à summa quadratorum auferendo duplum producti laterum, remanet quadratus interualli laterum. Sic in priore positione detractis 6 N. ab 1 Q. + 9. fit quadratus 1 Q. + 9 − 6 N. à latere 1 N. − 3. quod est interuallum numerorum 1 N. & 3. à quibus formatur triangulum. At in secunda positione detractis 4 N. ab 1 Q. + 4. fit quadratus 1 Q. + 4. − 4 N. à latere 1 N. − 2. quod est interuallum ipsorum 1 N. & 2. à quibus effictum est triangulum.

4. 1. poris.

Secundò aduerte lemma quo quæritur cubus quadrati duplus infinitas recipere solutiones, & turpiter allucinari Xilandrum, qui ad sequentem quæstionem asserit nullum alium cubum præter 8. assignari posse quadrati duplum, neque in fractis, cum infiniti tales cubi assignari possint & in integris, & in fractis. Nam vt patet 2 Q. æquari possunt cuilibet cuborum numero cubico. Verbi gratia ponantur 2. Q. æquales $\frac{1}{8}$ C. fiet 1 N. 16. eritque cubus 512. duplus quadrati 256. Rursus ponantur 2 Q. æquales 8 C. fiet 1 N. $\frac{1}{4}$. Et inuenietur cubus $\frac{1}{8}$. duplus quadrati $\frac{1}{16}$. & sic de allijs. Immò eodem prorsus artificio inuenies cubos infinitos qui ad aliquos quadratos datam habeant rationem, & hinc formatur Canon vniuersalis.

Diuide denominatorem rationis datæ, per cubum aliquem, orietur latus quadrati quæsiti.

Vt si velis cubum qui sit quadrati triplus, diuide 3. per cubum aliquem, puta per 1. vel per 8. vel per 27. fient 3. $\frac{3}{8}$. $\frac{1}{9}$. quorum quadrati 9. $\frac{9}{64}$. $\frac{1}{81}$. quorum tripli, puta 27. $\frac{27}{64}$. $\frac{1}{27}$. sunt cubi, vt requiritur.

Tertiò aduerte cùm quadratus 1 Q. + 4 − 4 N. sit æquandus cubo, rectè Diophantum æquare cubo latus illius, puta 1 N. − 2. Constat enim si latus quadrati sit cubus, & ipsum quadratum fore cubum, quia ex cubo in cubum producitur cubus per tertiam & quartam noni Euclidis. Porro hac etiam ex parte infinitas solutiones quæstio recipit, nam 1 N. − 2. cuilibet vnitatum numero cubico æquari potest, æquauit Diophantus cubo 8. sed si æquasset cubo 1. fuisset 1 N. 3 & fingendo triangulum à 2. & 3. facta essent latera 13. 12. 5. quæ soluunt quæstionem, nam auferendo sigillatim vtramque laterum circa rectum ab hypotenusa, supersunt cubi 1. & 8. Hinc etiam elicitur huiusmodi Canon.

Sume numerum aliquem, ita vt quadratus illius sit semissis cubi; sumpto numero adde cubum quemlibet, tum ab hac summa, & à sumpto numero finge triangulum.

Verbi gratia sume $\frac{1}{4}$ cuius quadratus $\frac{1}{16}$. est semissis cubi $\frac{1}{8}$. Adde cubum 8. ad $\frac{1}{4}$ fiet $\frac{33}{4}$. tum finge triangulum ab $\frac{1}{4}$ & $\frac{33}{4}$. fient latera trianguli $\frac{545}{8}$. $\frac{33}{8}$. $\frac{544}{8}$. quæ soluunt quæstionem, nam sublato vtrouis laterum circa rectum ab hypotenusa, supersunt cubi 8. & 1.

Cæterùm inuento triangulo quæstionem soluente, si singula illius latera diuidas vel multiplices per aliquem eundem cubum, fiet aliud triangulum æquè proposito satisfaciens. Vt si triangulum à Diophanto inuentum 104. 40. 96. diuidas per 8. fiet aliud triangulum 13. 5. & 12. æquè benè proposito congruens, & ratio est euidens, nam interualla quibus hypotenusa 13. superat latera 5. & 12. fiunt diuidendo per 8. interualla quibus hypotenusa 104. superat latera 40. & 96. Quare cùm hæc interualla sint cubi ex hypothesi, & cubo per cubum diuiso, oriatur cubus, patet & illa interualla quibus 13. superat 5. & 12. fore cubos, quod est propositum.

QVÆSTIO II.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν ὑποτεινούσῃ προσλαβὼν τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ κύβον. ἐὰν πλάσσωμεν τὸ ζητούμενον ἀπὸ ἀριθμῶν δύο, ὡς καὶ περὶ τούτου, γίνεται ζητεῖν τετράγωνόν τινα ὅπως ὁ διπλάσιος αὐτοῦ ᾖ κύβος, καὶ ἔστιν ὁ ἀπὸ πλευρᾶς μ° β. πλάσσομεν δὴ τὸ ζητούμενον ἀπὸ ς^ο α.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt hypotenusa adsumens alterutrum laterum circa rectum, faciat cubum. Si formemus quæsitum triangulum à duobus numeris vt in præcedente, quærendus erit quadratus cuius duplum sit cubus, est autem is à latere 2. Fingemus er-

go triangulum ab 1 N. & à 2. & fiet similiter hypotenusa 1 Q. + 4. vnum autem laterum circa rectum 4 N. alterum denique 4 – 1 Q. Superest vt hypotenusa adscito priore latere faciat cubum; sed & necesse est vt cum ad positiones veniemus 1 Q. inueniatur minor quàm 4. Proinde 1 N. minor est quam 2. Eò itaque redacti sumus vt inueniamus cubum minorem quàm 4. maiorem quàm 2. Est autem $\frac{27}{8}$. Quamobrem 1 N. + 2. æqualis esto $\frac{27}{8}$. & fit 1 N. $\frac{11}{8}$. Erit ergo hypotenusa $\frac{377}{64}$. laterum circa rectum alterum $\frac{135}{64}$. alterum $\frac{352}{64}$. & constat.

καὶ μ° β̄. καὶ γίνεται ὁμοίως ἡ μὲν ὑποτείνουσα δ^υ ᾱ. μ° δ̄. μία δὲ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ςς δ̄. ἡ δὲ λοιπὴ μ° δ̄. λείψει δ^υ ᾱ. λοιπόν ἐστι τὸν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ προσλαβόντα τὸν ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιεῖν κύβον. ἀλλὰ καὶ διελθόντας εἰς τὴν ὑπόστασιν εὑρεῖν τὴν δύναμιν ἐλάσσονα μ° δ̄. ὁ ἄρα ς° ἐλάσσων ἐστὶ μ° β̄. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν κύβον ἐλάσσονα μ° δ̄. μείζονα δὲ μ° β̄. καὶ ἔστι μ° κζ^η. καὶ ἔστω ς° ᾱ μ° β̄. ἴσος μ. κζ^η. καὶ γίνεται ὁ ς° ια^η. ἔσται ἄρα ἡ μὲν ὑποτείνουσα τοζ^{ξδ}. τῶν δὲ περὶ τὴν ὀρθὴν, ἡ μὲν ρλε^{ξδ}. ἡ δὲ τνβ^{ξδ}. καὶ μένει.

IN QVAESTIONEM II.

HIc multa infeliciter adnotauit Xilander. Primò enim asserit cubum quadrati duplum nullum esse præter 8. & nullum quadrati triplum præter 27. &c. quod ad præcedentem abunde confutauimus. Deinde putat alterum laterum circa rectum poni debere, vt in præcedente 1 Q. – 4. quod est absurdum, nam ob talem positionem cogitur simul & semel æquare cubo, tum 2 Q. tum 1 N. + 2. Quare deueniendum ei ad duplicatam æqualitatem, quæ quomodo resolui possit, cùm scilicet duo numeri sint simul æquandi cubo, nec ipse docere potuit, nec vsquam docuit Diophantus. Denique non satis aperit causam cur 1 N. + 2. æquari debeant cubo alicui maiori quàm 2. minori quàm 4. Quamobrem vt omnia sigillatim elucidemus.

Aduerte primò cur sumatur numerus cuius quadratus sit semissis cubi, & ponatur basis trianguli 4 – 1 Q. quæ in præcedente ponebatur 1 Q. – 4. causam esse, quia vult Diophantus per huiusmodi positionem satisfieri vni parti postulati, nam hypotenusæ 1 Q. + 4. addendo basim 4 – 1. Q. fit vtique cubus 8. Posse autem basim poni 4 – 1 Q. æquè benè ac 1 Q. – 4. patet, quia basis debet esse interuallum quadratorum 1 Q. & 4. Quare cùm ignoretur vter eorum maior sit, potest eorum interuallum esse 1 Q. – 4. vel 4 – 1 Q.

Aduerte secundò hypotenusæ 1 Q. + 4. addendo perpendiculum 4 N. fieri quadratum 1 Q. + 4 N + 4. Quia hypotenusa est summa quadratorum, at perpendiculum est duplum plani sub lateribus, vnde patet hypotenusæ & perpendiculi summam ' æquari quadrato summæ laterum 1 N. + 2. Quare sicut in præcedente restat vt æquemus cubo 1 N. + 2. quia si latus hoc sit cubus, erit & quadratus illius cubus; ' quandoquidem ex cubo in seipsum producitur cubus. 4. secundò 3. nouit

Aduerte tertiò 1 N + 2. æquari debere cubo qui sit maior quàm 2. minor quàm 4. primum patet, nam à cubo illo auferendo 2. residuum æquari debet 1 N. secundùm sic probatur. Quia basis posita est. 4 – 1 Q. oportet 4. maiorem esse quàm 1 Q. Ergo 2. maior esse debet quàm 1 N. fit autem 1 N. vt dictum est, ab aliquo cubo auferendo 2. Oportet ergo talem esse cubum illum, vt ab eo auferendo 2. residuum sit minus quàm 2. ac proinde oportet cubum huiusmodi, minorem esse quàm 4. Porrò qua ratione inueniendus sit cubus maior quàm 2. minor quàm 4. non docet hîc Diophantus. Sed id facilè consequemur eodem artificio quo ad decimam tertiam quinti reperit author quadratum maiorem quàm 2. minorem quàm 3. Reducantur enim 2. & 4. ad fractionem cubicam eiusdem denominationis, puta ad octauas, fient $\frac{16}{8}$. & $\frac{32}{8}$. Inter quos cadit cubus $\frac{27}{8}$. proposito satisfaciens. Sic infinitos hujusmodi cubos reperies, & quo maior erit denominator ad quem fit reductio, eò plures cubi cadent inter numeros propositos, vt si reducas 2. & 4. ad millesimas, fient $\frac{2000}{1000}$. & $\frac{4000}{1000}$. inter quos cadunt tres cubi proposito apti, puta $\frac{2197}{1000}$. $\frac{2744}{1000}$. $\frac{3375}{1000}$. & sic de alijs.

Aduerte denique hîc contingere vt multiplicando vel diuidendo latera inuenti trianguli, per eundem cubum, fiat aliud triangulum soluens quæstionem. Sic loco laterum quæ inuenit Diophantus, puta $\frac{377}{64}$. $\frac{135}{64}$. $\frac{352}{64}$. ducendo omnia in 64. sumi possunt 377. 135. 352. quod facile est demonstrare.

Cæterùm ratio diuersitatis in solutione & operatione, ex duplici capite ortum habet. Primò enim vt docuimus 1 N. + 2. æquari potest infinitis cubis maioribus quàm 2. minoribus quàm 4. quales sunt $\frac{27}{8}$. $\frac{64}{27}$. $\frac{343}{125}$. &c. Deinde triangulum ipsum ab initio fingi potest ab 1 N. & quotlibet vnitatibus, quarum quadratus sit semissis cubi, quales infinitos numeros dari, quicquid dicat Xilander, ad præcedentem ostendimus. Verbi gratia fingatur ab 1 N. & $\frac{1}{4}$. erit hypotenusa 1 Q. + $\frac{1}{16}$. Basis $\frac{1}{2}$ N. perpendiculum $\frac{1}{16}$ – 1 Q. hocque addito ad hypotenusam, fit cubus $\frac{1}{8}$. At basi addita eidem hypotenusæ fit quadratus 1 Q. + $\frac{1}{16}$. + $\frac{1}{2}$ N. cuius latus 1 N. + $\frac{1}{4}$. æquandum est cubo

maiori quàm $\frac{1}{4}$. minori quàm $\frac{1}{2}$. quales sunt $\frac{8}{27}$. $\frac{27}{64}$. aliique infiniti. Et vniuersaliter. Cubus quo cum fit vltima æquatio debet esse maior vnitatibus, à quibus cum 1 N. formatum est triangulum, & minor duplo earundem. Quamobrem hinc facilè est elicere Canonem.

Sume quemlibet numerum, cuius quadratus sit semissis cubi, quem aufer ab aliquo cubo qui sit maior ipso, & minor duplo eiusdem; A residuo & à sumpto numero formabis quæsitum triangulum.

Verbi gratia sume 2. quem aufer à cubo $\frac{343}{125}$. remanet $\frac{93}{125}$. à quo & à 2. forma triangulum, vel reducendo ad integros, forma triangulum à 93. & à 250. fient latera 71149. 53851. 46500. & hypotenusa adsumens basim, tum perpendiculum, facit cubos 125000. & 117649. quorum latera 50. & 49.

Quoniam verò in mentem alicui venire posset cur non proposuerit Diophantus inuenire triangulum rectangulum cuius hypotenusa adsumens vtrumlibet laterum circa rectum, faciat quadratum. Vel cuius hypotenusa detracto quolibet laterum circa rectum relinquat quadratum, non abs re fuerit monere, omissas esse huiusmodi quæstiones, quod sint impossibiles. Id autem, nequis temerè dictum putet, sic demonstrabitur. Esto triangulum rectangulum A B C. dico siue hypotenusæ A addantur sigillatim latera B. C. siue adimantur, non posse simul fieri duos quadratos. ' Etenim cùm hypotenusa A componatur ex duobus planis similibus, sint ij D major, & E minor; erit ergo B duplum medij proportionalis inter D & E cadentis. At C erit interuallum ipsorum D E. Porro ipsi D E vel quadrati sunt, vel quadratorum similes. Ponantur primò quadrati. Cùm ergo A sit summa duorum quadratorum D E. & C sit eorundem interuallum, ' patet compositum ex duobus A C. esse duplum maioris quadrati D. Ergo si compositus ex A C ponatur quadratus, sequitur ex binario in quadratum D. produci quadratum. Quod est impossibile, cùm binarius non sit quadratus, vt ostendit Clauius ad secundam noni. Rursus si ab A qui est summa quadratorum D E. auferatur C eorundem interuallum, ' residuum duplum erit minoris quadrati E. Quare si hoc residuum ponatur quadratus, sequitur rursus ex binario in quadratum E. produci quadratum. Quod eadem de causa est impossibile. Quare in hoc casu patet propositum.

D 4. E 1.
A 5. B 4. C 3.
F 15. G 12. H 9.
K 12. L 3.

4. 3. poris.
23. 1. poris.
23. 1. poris.

Iam verò esto triangulum rectangulum F G H. & plani similes K L. ex quibus hypotenusa F componitur, non sint quadrati; dico nihilominus sequi propositum. Nam K L. cùm sint plani similes, ' habeant rationem quadrati ad quadratum; habeant ergo rationem quam quadratus D ad quadratum E. Igitur cùm sint proportionales D. E. K. L. & ab ipsis D E formetur triangulum A B C, ab ipsis K L formetur triangulum F G H. ' erunt hæc triangula similia. Itaque cùm sit A ad F. vt B ad G ' erit summa duorum A B ad summam ipsorum F G. vt A ad F. Quia verò A est summa quadratorum D E. & B est duplum plani sub lateribus, ' patet summam ipsorum A B esse quadratum, ac proinde si & summa ipsorum F G ponatur quadratus, erit A ad F vt quadratus ad quadratum. Sed vt A ad F sic est C ad H ob similitudinem triangulorum, ac proinde vt A ad F, ' sic est summa antecedentium A C. ad summam consequentium F H. Igitur ' si summa ipsorum F H sit quadratus, oportet & summam ipsorum A C esse quadratum. Quod impossibile est, vt suprà ostendimus. Deinde quia est A ad B vt F ad G. & rursus B ad C vt G ad H. patet argumentando per conuersionem rationis, tum per rationem permutatam esse interuallum ipsorum A B ad interuallum ipsorum F G. itemque interuallum ipsorum A C. ad interuallum ipsorum F H. sicut A ad F. Cùm igitur interuallum quo A summa quadratorum superat B duplum plani sub lateribus, sit quadratus, ' si & interuallum ipsorum F G ponatur quadratus, erit vtrumque interuallum quadratus. Quare & interuallum ipsorum A C. ad interuallum ipsorum F H erit in ratione quadrati ad quadratum, ac proinde si interuallum ipsorum F H ponatur quadratus ' erit & interuallum ipsorum A C quadratus. Quod ostensum est esse impossibile. Quamobrem ex omni parte constat propositum.

26. octaui.
9. 3. poris.
12. septimi.
4. secundi.
[illegible]
24. octaui.
4. 2. poris.
24. octaui.

Eadem quoque ratio est de cæteris omnibus potestatibus quadratis, vt pote quadratoquadratis, cubocubis, &c. Etenim inueniri non potest triangulum rectangulum, cuius hypotenusæ addendo vel adimendo vtrumlibet latus fiat quadratoquadratus, vel cubocubus. Hoc enim si datetur sequeretur dari quadratum duplum quadrati. Quod est impossibile; Alijs autem potestatibus omnibus quæ quadratæ non sunt, quales sunt cubi, quadratocubi, quadratoquadratocubi, &c. ritè applicabitur quæstio, vt exemplo quadratocuborum facile est demonstrare.

Sit ergo propositum inuenire triangulum rectangulum, cuius hypotenusa adsumens vtrumlibet laterum circa rectum, faciat quadratocubum. Patet si sequamur ductum operationis Diophanti, eò nos adigi, vt inueniamus quadratocubum duplum quadrati, & quia omnis quadratoquadratus est quadratus, soluetur lemma si inueniamus quadratocubum duplum quadratoquadrati. Esto quadratoquadratus 1 Q Q. ergo 2 Q Q. æquantur quadratocubo, esto 1 Q C. fit 1 N. 2. estque quadratoquadratus 16. quadratocubus 32. sumentes igitur latus quadratum ipsius 16. puta 4. effingamus triangulum ab 1 N, & à 4. erit hypotenusa 1 Q. + 16. Basis 16 − 1 Q. Perpendiculum 8 N. & constat addendo basim hypotenusæ fieri quadratocubum 32. Restat vt eidem hypotenusæ addendo per-

pendiculum fiat quoque quadratocubus. Fit ergo 1 Q. + 16. + 8 N. æqualis quadratocubo. Ergo latus quadratum ipsius 1 Q. + 16 + 8 N. puta 1 N. + 4. æquabimus quadratocubo, sic enim consequemur intentum, quia ex quadratocubo in quadratocubum fit quadratocubus, vt demonstrauimus in Elementis. Porro 1 N. + 4. sic æquari debet quadratocubo, vt is sit maior quàm 4. minor quàm 8. ob causas supra explicatas. Quare cum reducendo 4. & 8. ad fractionem quodratocubicam, fiant $\frac{128}{32}$. & $\frac{256}{32}$. & inter eos cadat quadratocubus $\frac{243}{32}$. huic æquabimus 1 N. + 4. fietque 1 N. $\frac{115}{32}$. Igitur effingemus quæsitum triangulum à 4. & à $\frac{115}{32}$ vel vtroque ad eandem denominationem redacto & communi abiecto denominatore à 128. & à 115. fietque triangulum 29609. 29440. 3159. quod soluit quæstionem: nam hypotenusæ addendo sigillatim latera, fient quadratocubi 59049. & 32768. quorum latera 9. & 8.

Eadem arte & quæstio præcedens extendetur ad huiusmodi potestates. Nam sit propositum inuenire triangulum rectangulum, cuius hypotenusa multata quolibet laterum circa rectum, relinquat quadratocubum. Effingemus vt prius triangulum ab 1 N. & à 4. & erit hypotenusa 1 Q. + 16. basis 1 Q. − 16. Perpendiculum 8 N. sic enim satisfit vni parti propositionis. Restat vt 1 Q. + 16. − 8 N. æquetur quadratocubo. Quare latus 1 N. − 4. æquandum est quadratocubo, esto is 32. fiet 1 N. 36. formetur ergo triangulum à 4. & à 36. erunt latera 1312. 1280. 288. & soluta est quæstio. Nam hypotenusa multata quolibet laterum, relinquit quadratocubos 32. & 1024. à lateribus 2. & 4.

QVÆSTIO III.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt areæ eius numerus adsumens datum numerum, faciat quadratum. Esto datus 5. & ponatur triangulum datum specie 3 N. 4. N. 5 N. & fit area adscito 5. 6 Q. + 5. æqualis quadrato. Esto ipsi 9. & auferantur à similibus similia, relinquuntur 3 Q. æquales 5. & oportet speciem ad speciem, rationem habere quæ est quadrati numeri ad quadratum numerum, sed & multitudinem ad multitudinem. Itaque eò deuentum est, vt oporteat inuenire triangulum rectangulum, & quadratum numerum, vt quadratus area trianguli multatus, faciat quintam partem quadrati, quia datus est 5. Formetur triangulum ab 1 N. & $\frac{1}{1N}$. & fit area 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. Esto quadrati latus 1 N. & fractio numerica tot vnitatum, quantus est duplus dati numeri, hoc est $\frac{10}{1N}$. & fit quadratus 1 Q. + $\frac{100}{1Q}$. + 20. & si ab eo detrahamus aream, hoc est 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. relinquitur $\frac{101}{1Q}$. + 20. Hæc quinquies, fit $\frac{505}{1Q}$. + 100. æquale quadrato. Et omnia multiplicentur per 1 Q. fiunt 100 Q. + 505. æquales quadrato. Esto latus eius 10 N. + 5. Inuenitur 1 N. $\frac{24}{5}$. Ad positiones. Formabitur ergo triangulum à $\frac{24}{5}$ & $\frac{5}{24}$. Erit autem quadrati latus $\frac{413}{60}$. si ergo triangulum statuamus in numeris, & aream ipsius adscito 5. æqualem faciamus $\frac{170569}{3600}$ Q. reliqua fient manifesta.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ε. καὶ τετάχθω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ἀριθμῶν γ. ἀριθμῶν δ. ἀριθμῶν ε. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μετὰ μονάδων ε. δυ ς. μο ε. ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω δυ θ. καὶ ἀπὸ τῶν ὁμοίων τὰ ὅμοια. λοιπαὶ δυ γ. ἴσαι μο ε. καὶ δεῖ τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὀφείλει καὶ τὸ πλῆθος πρὸς τὸ πλῆθος. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμόν, ὅπως ὁ τετράγωνος λείψας τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ τοῦ τριγώνου ποιῇ πέμπτον τετραγώνου. ἐπειδήπερ ὁ δοθεὶς μο ε. ἐστί. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ς α. καὶ α ςx. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ δυ α. λείψει α δυx. ἔστω ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ ς α. καὶ ἀριθμοστὸν μονάδων τοσούτων ὅσων ἐστὶν ὁ διπλάσιος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τουτέστιν ι ςx. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δυ α. ρ δυx. μο κ. καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἄρωμεν τὸ ἐμβαδόν, τουτέστι δυ α. λείψει α δυx. λοιπὸν γίνεται ρα. δυx μο κ. ταῦτα πεντάκις γίνεται φε δυx. μο ρ. ἴσον τετραγώνῳ, καὶ πάντα ἐπὶ δύναμιν α. γίνονται δυνάμεις ρ. μο φε. ἴσαι τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ἀριθμῶν ι μο ε. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς μο κδ ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, πλάσσεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ κδ ε. καὶ ε κδ. ἡ δὲ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ υιγ ξ. ἐπὶ οὖν τὸ ὀρθογώνιον τάξωμεν ἐν ἀριθμοῖς. καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ μετὰ μονάδας ε. ποιοῦμεν ἴσον δυνάμεσι ιζ. φξθ. ͵γχ. ἔσται ἡμῖν τὰ λοιπὰ δῆλα.

IN QVAESTIONEM III.

AD quæstiones omnes huius libri reliquas nihil adnotauit Xilander, earum tum difficultate, tum insigni deprauatione deterritus. Sed & summi vir ingenij Franciscus Vieta cùm hanc ipsam quæstionem pertractandam suscepisset, Zetetico nono libri quinti parum feliciter eam explicauit; etenim methodum Diophanti minimè percipiens, aliamque viam inire coactus, quod ille vniuersalissimè proposuerat de quolibet numero ad aream trianguli addendo, ipse ad solos numeros è duobus quadratis compositos, restrinxit. Itaque nobis ob integram tot pulcherrimorum subtilissimorumque problematum enodationem, solida relicta est gloria. Quàm vt non immeritò consequamur, circa hanc quæstionem.

Aduerte primò triangulum datum specie vocari à Diophanto, illud cuius laterum proportio data est tantùm, ipsorum laterum quantitate indefinita manente, quod à tertia definitione datorum Euclidis depromptum est. Verè enim triangula omnia quæ latera habent proportionalia eiusdem speciei censeri possunt, tum ob laterum similitudinem, tum ob angulorum æqualitatem, vnde & similia vocantur ab Euclide. Idcirco Diophantus huiusmodi triangula non exhibet in vnitatibus, quia verbi gratia si exponatur triangulum 3. 4. 5. Id iam non in specie, sed in indiuiduo exhibitum erit. Cùm autem proportio laterum dabitur, sed ipsa laterum quantitas manebit indefinita, exhibendo scilicet triangulum in Numeris, vt facit Diophantus sicut 3 N. 4 N. 5 N. verè & propriè exhibitum erit triangulum in specie, cùm hæ positiones, ob numeri indeterminationem, applicari possint lateribus cuiuslibet trianguli huius speciei.

Aduerte secundò. Cùm per primam operationem reperiatur 6 Q. + 5. æqualis quadrato, æquandum eum esse cuilibet quadratorum numero quadrato maiori quàm 6. puta 9 Q. 16 Q. &c. Quare oportet talem deligi quadratorum numerum vt ab eo auferendo 6. residuum ad 5. habeat rationem quadrati ad quadratum. Proinde cùm 6. sit numerus areæ expositi trianguli, patet quærendum aliud triangulum, cuius area si auferatur ab aliquo quadrato, residuum ad 5. habeat rationem quadrati ad quadratum. Vnde apparet necessitas secundæ operationis, qua Diophantus huiusmodi triangulum & quadratum inuestigat.

Aduerte tertiò subtiliter fingi triangulum ab 1 N. & $\frac{1}{1N}$. vnde fit hypotenusa 1 Q. + $\frac{1}{1Q}$. perpendiculum 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. Basis verò 2. Quare ducto dimidio basis in perpendiculum fit area 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. Quadrati vero latus fingitur 1 N. + $\frac{10}{1N}$. Et primò pars illius ponitur 1 N. vt eius quadratus puta 1 Q. elidatur ab 1 Q. qui est in area, cùm area subtrahetur à quadrato. Deinde pars altera ponitur $\frac{10}{1N}$ vt eius quadratus $\frac{100}{1Q}$. sit eiusdem denominationis cum − $\frac{1}{1Q}$. qui reperitur in area, vnde commodissimè hic ab illo subtrahetur per solam additionem 1. ad 100. ob signi diuersitatem, communi retento denominatore, & relinquetur $\frac{101}{1Q}$. Quod si diuersi essent harum fractionum denominatores facta subtractione, relinquerentur vtique cubi, vel quadratoquadrati, vel aliæ potestates, à quibus sese expedire difficillimum esset. Tertio in hac secunda lateris parte ponuntur vnitates 10. duplum scilicet dati numeri 5. vt in quadrato reperiantur 20. vnitates duplum scilicet ipsius 10. ac proinde quadruplum ad 5. Quare cùm $\frac{101}{1Q}$. + 20. debeat ad 5. habere rationem quadrati ad quadratum, ac proinde vno in alterum ducto oporteat gigni quadratum, patet productum ex 20. in 5. esse quadratum quia ob rationem quadruplam 20. & 5. sunt plani similes. Porrò $\frac{505}{1Q}$. + 100. (seu omnia ducendo in 1 Q. vt tollatur fractio) 505 + 100 Q. nulla ratione posset æquari quadrato nisi 100. esset quadratus. Vnde colligas in hac secunda lateris parte loco 10. poni posse quemlibet numerum qui sit semissis alterius qui ad 5. habeat rationem quadrati ad quadratum. Ac proinde ex hoc capite quæstionem varias recipere solutiones. Verbi gratia ponatur latus quadrati 1 N. + $\frac{40}{1N}$. fiet quadratus 1 Q. + $\frac{1600}{1Q}$. + 80. vnde auferendo aream puta 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. remanet $\frac{1601}{1Q}$. + 80. qui ad 5. debet habere rationem quadrati ad quadratum. Quare altero in alterum ducto fit $\frac{8005}{1Q}$. + 400. æqualis quadrato, & omnia in 1 Q. fit 8005 + 400 Q. æquandus quadrato. Quod facilè fiet, quia 400. est quadratus. Denique omissam à Diophanto solutionem quæstionis afferre non pigebit. Cùm sit 1 N. $\frac{24}{5}$. formatur triangulum à $\frac{24}{5}$. & à $\frac{5}{24}$. fitque hypotenusa $\frac{332401}{14400}$. perpendiculum $\frac{331151}{14400}$. basis 2. latus autem quadrati est $\frac{413}{60}$. quadratus $\frac{170569}{3600}$. vel in eadem denominatione $\frac{682276}{14400}$. Itaque ponantur latera quæsiti trianguli $\frac{332401}{14400}$ N. $\frac{331151}{14400}$. N. 2 N. area adsumens 5. fit $\frac{331151}{14400}$ Q. + 5. æqualis quadrato $\frac{682276}{14400}$ Q. & auferendo vtrimque æqualia, manent $\frac{14045}{576}$. æqualia 5. fitque 1 Q. $\frac{576}{2809}$. At 1 N. $\frac{24}{53}$. Erunt ergo latera quæsiti trianguli $\frac{332401}{31800}$. $\frac{331151}{31800}$. $\frac{48}{53}$. fitque area $\frac{331151}{70225}$. cui addendo 5. fit quadratus $\frac{682276}{70225}$. cuius latus $\frac{826}{265}$.

Quoniam verò hinc fortè venit in mentem Francisco Vietæ quæstionem applicari posse solis numeris, qui è duobus quadratis componuntur, quia Diophantus in sua hypothesi sumpserat 5. è duobus quadratis compositum; quamuis ex ipso ductu analyseos Diophantææ satis constet, ad quemlibet numerum extendi problema, ne quis tamen supersit dubitandi locus, placet id etiam experientia comprobare. Sit ergo inueniendum triangulum, cuius area adsumens 6. qui minimè

compositus est è duobus quadratis, faciat quadratum, Itaque prius quærendum est triangulum, itemque quadratus, vt area trianguli de quadrato sublata, supersit numerus qui ad 6. habeat rationem quadrati ad quadratum. Fingatur triangulum ab 1 N. & $\frac{1}{1N}$. erit vt prius area 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. sit autem latus quadrati 1 N. + $\frac{12}{1N}$. erit quadratus 1 Q. $\frac{144}{1Q}$. + 24. à quo auferendo aream supradictam, superest $\frac{145}{1Q}$ + 24. quo ducto in 6. & omnia ducendo in 1 Q. fit tandem 144 Q. + 870. æqualis quadrato. Fingatur latus illius 12 N. + 10. fiet 1 N. $\frac{77}{24}$. & latus quadrati [illegible]. Formetur igitur triangulum ab $\frac{77}{24}$. & $\frac{24}{77}$ & constituatur in Numeris, erunt latera illius [illegible] N. [illegible]. N. 2 N. fiet area adsumens 6. [illegible] Q. + 6, æqualis quadrato à latere suprapofito, hoc est quadrato [illegible] Q. vnde tandem fit valor quadrati [illegible]. vel in minimis [illegible]. ac proinde 1 N. est $\frac{77}{194}$. per quam resoluendo hypostases, inueniuntur latera quæsiti trianguli, nimirum [illegible]. [illegible]. $\frac{77}{97}$. sitque area [illegible]. cui addendo 6. fit quadratus [illegible]. cuius latus [illegible].

OBSERVATIO D. P. F.

Errot Vieta indè haud dubiè oritur. Supposuit vir clarissimus differentiam duorum quadratoquadratorum vt 1 qq. − 1. æquari areæ cui adjiciendo quintuplum quadrati fiat quadratus, si 5. numerus datus diuidatur in duos quadratos poterit inueniri quintuplum quadrati à quo demptâ vnitate supersit quadratus.

Ponatur igitur latus quadrati quintuplicandi esse 1. N. + 1. aut alius quiuis numerorum numerus + 1. quintuplum quadrati illius erit 5 Q + 10. N. + 5 cui si adiicias aream 1 QQ − 1 fiet 1 QQ + 5 Q + 10. N + 4. quæ summa debet æquari quadrato, hoc autem non est operosum. Cum numerus vnitatum ex hypothesi adjectâ problemati sit quadratus. Non vidit Vieta quæstionem perinde resolui posse si loco 1 QQ − 1 sumpsisset pro areâ 1 − 1 QQ. eo enim deducenda statim quæstio vt datus numerus 5 vel 6. vel alius quilibet in quadratum ductus adjectâ vnitate conficiat quadratum quod generaliter est facillimum cum vnitas sit quadratus.

Nos peculiari methodo quæstionem hanc & duas proximas resoluimus, cuius beneficio dum quærimus triangulum cuius area vnâ cum 5 v.g. conficiat quadratum triangulum in minimis exhibemus [illegible] cuius area 20 addito 5 facit quadratum 25. sed de ratione & vsu nostra huius methodi non est huius loci plura addere, non sufficeret sanè marginis exiguitas, multa enim habemus huc referenda.

QVÆSTIO IV.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt areæ numerus multatus dato numero faciat quadratum. Datus esto 6. & ponatur triangulum datum specie 3 N. 4. N. 5 N. & ob hypothesin 6 Q. − 6. æquantur quadrato. Esto ipsi 4 Q. Et rursus res eò deducitur, vt inueniendum sit triangulum rectangulum, & quadratus numerus, quo de area trianguli sublato, si reliquum sexies sumatur, fiat quadratus. Formetur rursus triangulum ab 1 N. & $\frac{1}{1N}$. At latus quadrati sit 1 N. cum defectu fractionis numericæ tot vnitatum, quantus est semissis dati numeri. Hoc est $\frac{3}{1N}$. & fit quadratus 1 Q. + $\frac{9}{1Q}$. − 6. Hunc si ab area detrahamus, hoc est ab 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. relinquitur 6 − $\frac{10}{1Q}$. & omnia sexies, & in 1 Q. ducantur. Fiunt 36 Q. − 60. æquales

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λήψας τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ϛ. καὶ τετάχθω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ςς γ. ςς δ. ςς ε. καὶ διὰ τὴν ὑπόθεσιν δυ ϛ ἴσαι εἰσὶ τετραγώνῳ. ἔστω δυ δ. πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ ἀρθεὶς τετράγωνος, καὶ τὰ λοιπὰ ἑξάκι γινόμενα ποιῇ τετράγωνον. πεπλάσθω πάλιν τὸ τρίγωνον ἀπὸ ςυ α. καὶ ςυ.χ. ἡ δὲ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ ςυ α. λείψει ἀριθμοστοῦ μονάδων τοσούτων ὅσων ἐστὶ τὸ ἥμισυ τοῦ πλήθους τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, τουτέστι γ ςυ.χ. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δυ α. θ δυ.χ. ⋔ μο ϛ. καὶ ἐὰν αὐτὸν ἀφέλωμεν ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ, τουτέστιν ἀπὸ δυ α. λείψει α δυ.χ. λοιπὸς γίνεται μο ϛ. λείψει ι δυ.χ. καὶ ταῦτα ἑξάκι, καὶ παρὰ δύναμιν γίνεται δυ λϛ,

λείψει μο ξ. ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς̄ ς̄. λείψει μο β̄. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς μο η γ^x. πλάσσεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ η γ^x. καὶ γ η^x. ἡ δὲ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ λζ. κδ^x. καὶ εὑρὼν τὸ τρίγωνον τάσσω ἐν ςς^οις. καὶ ἀκολουθήσας τῇ προτάσει, εὑρήσω τὸν ς ῥητόν, καὶ μένει.

quadrato. Esto latus eius 6 N. − 2. inuenietur 1 N. $\frac{8}{3}$ Formabitur ergo triangulum à $\frac{8}{3}$ & $\frac{3}{8}$. Eritque quadrati latus $\frac{37}{24}$. & cùm inuenero triangulum, statuam illud in numeris, secutusque propositionem, inueniam numerum rationalem. Et constat.

IN QVAESTIONEM IV.

EX dictis ad præcedentem, omnia quæ hîc peraguntur fiunt perspicua. Apparet sanè fingi quadratum à latere 1 N. − $\frac{3}{1N}$. Vt in quadrato repetiantur vnitates − 6. vnde omnia per 6. multiplicando, fiat quadratus 36. Alioquin enim numerus 36 Q. − 60. quadrato æquari non posset, si 36. non esset quadratus. Quamobrem etiam patet, loco ipsius 3. in latere poni potuisse quemlibet alium vnitatum numerum, cuius duplum ad 6. habeat rationem quadrati ad quadratum. Verbi gratia 12. fiererque latus 1 N. − $\frac{12}{1N}$. & sic de alijs.

Porrò non in pigebit tyronum gratiam integram apponere quæstionis solutionem quam prætermisit Diophantus. Cùm fiat 1 N. $\frac{8}{3}$ & latus quadrati $\frac{37}{24}$. formetur triangulum ab $\frac{8}{3}$ & $\frac{3}{8}$ & latera statuantur in numeris, fient $\frac{4177}{576}$ N. $\frac{4015}{576}$. N. 2 N. Est ergo area multata numero 6. $\frac{4015}{576}$ Q. − 6. æqualis quadrato à latere $\frac{37}{24}$ N. puta quadrato $\frac{1369}{576}$ Q. Vnde fit valor quadrati $\frac{64}{49}$. ac proinde valor numeri $\frac{8}{7}$ per quem resoluendo hypostases, fiunt quæsiti trianguli latera $\frac{4177}{504}$. $\frac{4015}{504}$. $\frac{16}{7}$. Estque area $\frac{4015}{441}$. vnde anferendo datum numerum 6. superest quadratus $\frac{1369}{441}$. à latere $\frac{37}{21}$.

QVÆSTIO V.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ῑ. καὶ πάλιν τετάχθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ςς̄ γ̄. ςς̄ δ̄. ςς̄ ε̄. γίνεται μο ῑ. ⋔ δυ ς̄ ἴσαι τετραγώνῳ. καὶ ἐὰν ποιῶμεν ἴσας δυνάμεσι τετραγωνικαῖς. ἀπάγεται πάλιν εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν ὅπως ὁ τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ δέκατον τετραγώνου. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ᾱ ςς^x. καὶ ς ᾱ. ἡ δὲ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ ᾱ ςς^x. καὶ ςς̄ ε̄. καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ τοῦ τετραγώνου δυ κς. μο ῑ. ταῦτα δεκάκις, γίνεται δυ σξ. μο ρ̄. ἴσαι τετραγώνῳ. καὶ τὰ τέταρτα, γίνονται δυ ξε. μο κε. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μο ε̄. ςς̄ η̄. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς μο π̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. καὶ ὁμοίως τοῖς πρὸ τούτου εὑρήσομεν.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ detractus à dato numero faciat quadratum. Esto datus 10. & rursum statuatur triangulum abs 3 N. 4 N. 5 N. fiunt 10 − 6 Q. æquales quadrato, & si æquales faciamus numero quadratorum quadrato, eò rursus deuentum est, vt inueniatur triangulum rectangulum & quadratus numerus, ita vt quadratus adsumpto areæ numero faciat decimam partem quadrati. Formetur triangulum abs $\frac{1}{1N}$. & 1 N. At quadrati latus esto $\frac{1}{1N}$. + 5 N. & fit compositus ex area, & ex quadrato 26 Q. + 10. Hæc decies, fiunt 260 Q. + 100. æqualia quadrato, & quadrans horum 65 Q. + 25. æquatur quadrato. Cujus latus esto 5 + 8 N. vnde inuenitur 1 N. 80. Ad positiones. Et inueniemus vt in præcedentibus.

IN QVAESTIONEM V.

HIc fingens triangulum Diophantus ab 1 N. & $\frac{1}{1N}$. ponit hypotenusam 1 Q. + $\frac{1}{1Q}$. At perpendiculum 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. basim 2. vnde fit area 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. tum fingit quadratum à latere $\frac{1}{1N}$. + 5 N. fitque quadratus $\frac{1}{1Q}$ + 25 Q. + 10. cui addendo aream, fit 26 Q. + 10. quo ducto in 10. fit 260 Q. + 100. æquandus quadrato. Vnde patet cur in quadrati latere posuerit 5. vt scilicet in quadrato reperiatur 10. qui ad datum numerum 10. sit in ratione quadrati ad quadratum. Fecit autem idem latus $\frac{1}{1N}$. + 5 N. non sicut in præcedentibus 1 N. + $\frac{5}{1N}$. vt latera & aream trianguli retineret eadem quæ priùs. Nam si posuisset latus quadrati 1 N. + $\frac{5}{1N}$. ponendum fuisset perpendiculum

perpendiculum trianguli $\frac{1}{1Q.}$ − 1 Q. vt etiam area fieret $\frac{1}{1Q.}$ − 1 Q. res tamen æquè benè succederet, & inueniretur 1 N. $\frac{1}{80}$. alter scilicet numerorum, à quo formari debet triangulum, cùm per operationem Diophanti alter reperiatur puta 80. Omisit autem hîc etiam Diophantus integram quæstionis solutionem labori se subtrahens, ob molestas fractiones; sed hunc laborem suscipere non grauabimur. Cùm 1 N. sit 80. & latus quadrati $\frac{12801}{80}$. formetur triangulum abs 80. & $\frac{1}{80}$. & statuantur latera in numeris, fient $\frac{40960001}{6400}$ N. $\frac{40959999}{6400}$ N. 2 N. fitque area $\frac{40959999}{6400}$ Q. qua detracta de numero 10 fit 10 − $\frac{40959999}{6400}$ Q. æqualis quadrato, esto quadrato à latere $\frac{32001}{80}$ N. puta quadrato $\frac{1024064001}{6400}$ Q. fient tandem 10. æquales $\frac{1065024000}{6400}$ Q. vnde fit valor quadrati $\frac{6400}{1065024000}$. seu in minimis $\frac{1}{16641}$ vnde 1 N. est $\frac{1}{129}$. Ad positiones erunt latera quæsiti trianguli. $\frac{40960001}{825600}$. $\frac{40959999}{825600}$. $\frac{2}{129}$. est area $\frac{40959999}{106502400}$. qua detracta de 10. remanet quadratus $\frac{1024064001}{106502400}$. à latere. $\frac{32001}{10320}$.

Non adeo molestos numeros habebimus si numeri 65 Q. + 25. latus statuamus 5 + 5 N. Nam fiet 1. N. $\frac{5}{4}$. latus quadrati $\frac{141}{20}$. Quare formabitur triangulum à $\frac{5}{4}$. & $\frac{4}{5}$. eruntque latera in Numeris $\frac{881}{400}$ N. $\frac{369}{400}$ N. 2 N. & area detracta de 10. fit 10. − $\frac{369}{400}$ Q. æqualis quadrato $\frac{19881}{400}$. Q. vnde fit tandem 1 Q. $\frac{16}{81}$. At 1 N. $\frac{4}{9}$. per quem resoluendo hypostases, fiunt latera trianguli quæsiti $\frac{881}{900}$. $\frac{369}{900}$. $\frac{8}{9}$. Area est in minimis $\frac{41}{225}$. quam auferendo à 10. remanet quadratus $\frac{2209}{225}$. à latere $\frac{47}{15}$.

QVÆSTIO VI.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adsumens vnum laterum circa rectum, faciat datum numerum. Esto datus 7. statuatur rursus triangulum datum specie 3 N. 4 N. 5 N. & fiunt 6 Q. + 3 N. æquales 7. & oportet semissem numerorum in se ductum adsumere quadratos per 7. multiplicatos, & facere quadratum. Non facit autem. Oportet igitur inuenire triangulum rectangulum, vt quadratus semissis vnius laterum circa rectum adsumens septuplum areæ, faciat quadratum. Esto vnum laterum circa rectum 1 N. alterum 1. & fiunt 3 $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. & omnia quater, fiunt 14 N. + 1. æqualia quadrato. Vt autem etiam triangulum rectangulum rationale constituamus, oportet, & 1 Q. + 1. æquari quadrato. Horum interuallum est 1 Q. − 14 N. mensuratio 1 N. secundum 1 N. − 14. Istorum interualli semissis in se facit 49. quod æquatur minori, & fit 1 N. $\frac{24}{7}$. Ad positiones. Pono igitur vnum laterum circa rectum trianguli $\frac{24}{7}$. alterum 1. & omnia septies & in numeris, fiet illud 24 N. hoc verò 7 N. At hypotenusa 25 N. & fit area adsumens latus secundum 84 Q. + 7 N. Hoc æquatur 7. vnde 1 N. inuenitur $\frac{1}{4}$. suntque latera trianguli 6. $\frac{1}{4}$. & $\frac{25}{4}$. & constat.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ προσλαβὼν τὴν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μ° ζ. τετάχθω πάλιν ὁ τρίγωνος δεδομένῳ τῷ εἴδει ςς γ. ςς δ. ςς ε. καὶ γίνονται δ° ς. ςς^{οι} γ. ἴσαι μ° ζ. καὶ δεῖ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμίσεος ἐφ' ἑαυτὸν προσθέντα τὰς δυνάμεις ἑπτάκις γενομένας καὶ ποιεῖν τετράγωνον. οὐ ποιεῖται δέ, ὅθεν δεήσει εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς ἡμισείας μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, προσλαβὼν τὸν ἑπταπλάσιον τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ ἐν μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἀριθμοῦ α. ὁ δὲ ἐν τῇ ἑτέρᾳ μ° α. καὶ γίνονται ἀριθμοὶ γ. α ∠. μ° α δ΄. καὶ πάντα τετράκις γίνονται ςς^{οι} ιδ μ° α. ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ ἵνα τὸ ὀρθογώνιον ῥητὸν κατασκευάσωμεν δεῖ καὶ δύναμιν α μονάδα α. ἴσας εἶναι τετραγώνῳ. ἡ ὑπεροχὴ γίνεται δ° α λείψει ςς ιδ. ἡ μέτρησις ἀριθμοῦ α καὶ ἀριθμοῦ α λείψει μ° ιδ. τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται μ° μθ. ἴσαι τῷ ἐλάσσονι, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς κδ ζ΄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. τάσσω μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ τριγώνου κδ ζ΄. τὴν δὲ ἑτέραν μ° α. καὶ πάντα ἑπτάκις καὶ ἐν ἀριθμοῖς γίνεται ἡ μὲν ἀριθμῶν κδ. ἡ δὲ ἀριθμῶν ζ. ἡ δὲ ὑποτείνουσα ἀριθμῶν κε. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μετὰ δευτέρας τῆς περὶ τὴν ὀρθὴν δ° πδ ςς^{οι} ζ. ταῦτα ἴσα μ° ζ. ὅθεν ὁ ἀριθμὸς εὑρίσκεται α δ΄. αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ μ° ς. μ° ζ δ΄ μ° κε δ΄. καὶ μένει.

OBSERVATIO D. P. F.

HAec propositio & sequentes aliter fieri possunt fingatur triangulum in hac propositione abs dato numero & vnitate & plana lateribus similia applicentur ad summam vnitatis & numeri dati, orietur quæsitus triangulus.

IN QVAESTIONEM VI.

HIc deuenitur ad regulas compositas, vt liquet tum ex prima operatione, in qua 6 Q. + 3 N. æquantur 7. tum ex secunda, in qua 84 Q. + 7 N. æquantur 7. has autem æquationes resoluit Diophantus modo sibi familiari quem explicauimus ad trigesimam tertiam primi, sumendo scilicet quadratum semissis numeri Numerorum, (qui numerus est vnum laterum circa rectum sumpti trianguli) & huic quadrato addendo productum ex dato numero 7. in numerum quadratorum, qui est numerus areæ. Quamobrem rectè infert. Inueniendum esse triangulum, vt quadratus semissis vnius laterum circa rectum, adsumens septuplum areæ, faciat quadratum. Huius trianguli latera circa rectum ingeniosè ponuntur 1 N. & 1. vnde fit area $\frac{1}{2}$ N. cuius septuplum $3\frac{1}{2}$ N. cui addendo quadratum semissis secundi lateris, fit $3\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. æqualis quadrato, & omnia in 4. ad tollendas fractiones, fit 14 N. + 1. æqualis quadrato. Porrò vt tria latera trianguli sint rationalia, cum latera circa rectum posita sint 1 N. & 1 oportet vt eorum quadrati simul faciant quadratum hypotenusæ. Quare oportet vt 1 Q. + 1. sit æqualis quadrato. Iam ergo duplicata occurrit æqualitas, cùm æquandi sint quadrato tum 14 N. + 1. tum 1 Q. + 1. Reliqua sunt manifesta. Cur in lemmatis solutione adiiciantur denominatores, ratio est quia inuento triangulo soluente lemma propositum, si sumatur quodlibet aliud simile, id æquè benè proposito satisfaciet, vt demonstrare in promptu est. Sint A B latera circa rectum trianguli rectanguli, & sit D. quadratus semissis ipsius A. sitque E area trianguli, &. datus numerus C. quo ducto in E fiat F. additisque simul F D. fiat G. quadratus. Tum sumantur H K latera circa rectum alterius trianguli similis priori, cuius area sit M. qua ducta in C. fiat N. & sit L. quadratus semissis ipsius H. additisque L N. fiat P. dico P. esse quadratum. Quia enim vt A ad H. sic est semissis ipsius A. ad semissem ipsius H. [1] At quadrati D L. sunt in duplicata ratione laterum, patet D ad L. duplicatam esse rationem rationis A ad H. [2] sed & ob similitudinem triangulorum area E ad aream M. est in duplicata ratione lateris A ad latus H. est ergo D ad L. vt E ad M. Quia verò idem C ductus in E & in M. producit F & N. [3] est F ad N. vt E ad M. ergo est etiam F ad N. vt D ad L. Quamobrem [4] & antecedentium summa puta G. est ad summam consequentium P. sicut vnus antecedentium D ad vnum consequentium L. sed D L sunt quadrati. Ergo G ad P. habet rationem quadrati ad quadratum, [5] ac proinde cùm G sit quadratus ex hypothesi, erit & P. quadratus. Quod erat demonstrandum.

F 2352. G 2401.
D 49. E 336.
A 14. B 48. C 7
H 28. K 96.
L 196. M 1344.
N 9408. P 9604.

11. octaui.
2. 3. Parif.
17. septimi.
12. septimi
24. octaui.

Facile quoque est examinare an numeri à Diophanto inuenti soluant quæstionem sunt enim latera trianguli 6. $\frac{7}{4}$. $\frac{25}{4}$. est autem area $\frac{21}{4}$. cui si addas alterum latus, puta $\frac{7}{4}$. fit vtique præscriptus numerus 7.

QVÆSTIO VII.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λείψας τὴν ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τὸν δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ζ. καὶ πάλιν ἐὰν τάξωμεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει, ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ᾽ ἑαυτὸ γενόμενον, καὶ προσλαβὼν τὸν ἑπταπλάσιον τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, ποιῇ τετράγωνον. καὶ εὕρηται, ὁ ὢν ζ. κδ. κε. τάσσω οὖν ἐν ςς οις. καὶ τὸ ἐμβαδὸν λείψας τὸν ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γίνονται δυνάμεις πδ. λείψει ἀριθμῶν ζ. ταῦτα ἴσα μο ζ. καὶ γίνεται ὁ ς α γ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ multatus vno laterum circa rectum, faciat datum numerum. Esto datus 7. Et rursum si statuamus triangulum datum specie, res eò deducitur vt inueniendum sit triangulum rectangulum, vt vnius laterum circa rectum semissis in se ductus, & adsumens septuplum areæ faciat quadratum. Et inuentum est, nempe 7. 24. 25. statuo ergo in numeris, & area multata vno laterum circa rectum facit 84 Q − 7 N. Hæc æquantur 7. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$ Ad positiones.

OBSERVATIO D. P. F.

FIngatur triangulum abs dato numero & vnitate & plana lateribus similia applicentur ad differentiam dati numeri & vnitatis, hac quæstio per viam quâ hujusmodi duplicatas æqualitates infinitis modis resoluimus infinitas recipit solutiones. Modum autem quo vtimur tetigimus & explicauimus infra ad quæstionem 24.

Imò & ſolutiones illæ infinitæ aptantur 4. Sequentibus quæſtionibus, quod nec Diophantus nec Bachetus animaduertit. Cur autem neque Diophantus neque Bachetus ſequentem quæſtionem addiderunt? Inuenire triang. rectang. vt vnum ex lateribus areâ multatum faciat datum numerum. Certè hanc videntur ignoraſſe quia non ſtatim ſe prodit in reſolutione duplicatæ æqualitatis. Verum ex noſtrâ methodo facilè poteſt inueniri, ſimiliter in ſequentibus quæſtionibus tertius hic caſus ſuppleri poteſt.

IN QVAESTIONEM VII.

EX dictis ad præcedentem hic omnia fiunt manifeſta, cùm ab eodem lemmate pendeat ſolutio quæſtionis. Fit autem 1 N. $\frac{1}{3}$. ac proinde quæſiti trianguli latera ſunt $\frac{7}{3}$. 8. $\frac{25}{3}$. Area eſt $\frac{28}{3}$. vnde ſi auferas alterum latus, puta $\frac{7}{3}$. remanet vtique datus numerus 7.

QVÆSTIO VIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt area adſumens vtrumque laterum circa rectum, faciat datum numerum. Eſto datus 6. Et rurſum ſtatuatur triangulum datum ſpecie. Et rurſum eo res deducitur vt inueniatur triangulum rectangulum, vt ſummæ laterum circa rectum ſemiſſis in ſe ductus, & adſumens ſextuplum areæ faciat quadratum. Ponamus denuo vnum laterum circa rectum 1 N. alterum 1. & fit vt quæramus $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{7}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. æqualia quadrato, & omnia quater. Fit 1 Q. + 14 N. + 1. æquale quadrato. Sed & 1 Q. + 1. æquari debet quadrato. Horum interuallum eſt 14 N. menſuratio 2 N. ſecundum 7. Iſtorum interualli ſemiſſis in ſe facit 1 Q. + 12 $\frac{1}{4}$ − 7 N. æquale 1 Q. + 1. & fit 1 N. $\frac{45}{28}$. eſt ergo triangulum $\frac{45}{28}$. 1. & $\frac{53}{28}$. & omnia per 28. fit igitur triangulum 45 N. 28 N. 53 N. & fit area adſumens vtrumque latus circa rectum 630 Q. + 73. N. quod æquatur 6. & fit 1 N. rationalis. Ad poſitiones.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν ἐν συναμφοτέραις τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ϛ. καὶ πάλιν τετάχθω δεδομένος τῷ εἴδει, καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως συναμφοτέρας τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ μετὰ τοῦ ἑξαπλασίου τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ τετράγωνον. καὶ πάλιν ὑποκείσθω μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ϛ α ἡ δὲ ἑτέρα μο α. καὶ γίνεται ζητεῖν δυ α δ˜. ϛϛοὶ ζ ϛ˜. μο α δ˜. ἴσα τετραγώνῳ. καὶ πάντα τετράκις, γίνεται δύναμις α. ϛϛοὶ ιδ. μο α. ἴση τετραγώνῳ. ἡ ὑπεροχὴ ϛϛ ιδ. ἡ μέτρησις ϛϛ β. καὶ μο ζ. τῆς τούτων ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται δύναμις α. μο ιβ. α δ˜. λείψει ἀριθμῶν ζ. ἴσοι δυνάμει α. μο α. καὶ γίνεται ὁ ϛ μο με κη. ἔσται ἄρα τὸ τρίγωνον μο με κη. μο α. μο νγ κη. καὶ πάντα εἰς κη. γίνεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀριθμῶν με. ἀριθμῶν κη. ἀριθμῶν νγ. καὶ γίνεται τὸ ἐμβαδὸν μετὰ συναμφοτέρας τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν δυνάμεων χλ. ἀριθμῶν ογ. ἴσα μο ϛ. καὶ γίνεται ὁ ϛ ῥητός. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

IN QVAESTIONEM VIII.

RVRSVS ex adnotatis ad ſextam, operationis Diophanti ratio ſatis innoteſcit, ne tamen illius breuitas, tyronibus pariat obſcuritatem, age paulò fuſius eam explicemus. Quærentes triangulum, vt quadratus ſemiſſis ſummæ laterum adſumens ſextuplum areæ faciat quadratum ponimus latera circa rectum 1 N. & 1. vnde fit area $\frac{1}{2}$ N. cujus ſextuplum 3 N. At ſemiſſis ſummæ ſuprapoſitorum laterum eſt $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{2}$. cuius quadratus $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. cui addendo 3 N. fit $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{7}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. & omnia quadruplicando fit 1 Q. + 14 N. + 1. æquandus quadrato. Sed etiam vt hypotenuſa ſit rationalis oportet 1 Q. + 1. æquari quadrato. Ergo duplicata occurrit æqualitas. Interuallum itaque numerorum eſt 14. N. & numeri quorum mutuo ductu id fit ſumuntur 2 N. & 7. cautè, qualia multa fieri animaduertimus paſſim libro tertio. vnde tandem fit 1 N. $\frac{45}{28}$. alterum laterum circa rectum, nam alterum poſitum eſt 1. Quare hypotenuſa erit $\frac{53}{28}$. & abjectis denominatoribus conſtituitur triangulum ſpecie, 45 N. 28 N. 53 N.

fitque area 630 Q. cui addendo summam laterum circa rectum, fit 630 Q. + 73 N. æqualis 6. vnde fit 1 N. $\frac{1}{18}$. sunt ergo latera circa rectum quæsiti trianguli $\frac{14}{9}$. & $\frac{5}{2}$. hypotenusa $\frac{53}{18}$. vnde fit area $\frac{105}{54}$. cui addendo summam laterum circa rectum, fit $\frac{324}{54}$. seu 6. vt requirebatur.

QVAESTIO IX.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λείψας τὸν ἐν συναμφοτέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς ς. καὶ πάλιν ἐὰν τάξωμεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει, γίνεται ζητεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως συναμφοτέρας τῆς περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ προσλαβὼν τὸν ἑξαπλάσιον τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ προδέδεικται. καὶ ἔστιν κη. με. νγ. τάσσω οὖν αὐτὰ ἐν ἀριθμοῖς. καὶ πάλιν γίνεται δυνάμεις χλ. λείψει ςς ογ. ἴσαι μ° ς. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς μ° ς λε^χ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ multatus summa laterum circa rectum faciat datum numerum. Esto datus 6. Et rursus si statuamus quæsitum triangulum datum specie, fit vt quærendum sit triangulum rectangulum, vt summæ laterum circa rectum semissis in se ductus, & adsumens sextuplum areæ, faciat quadratum. Hoc autem iam antè est demonstratum, & est 28. 45. 53. Pono itaque hæc in numeris, & fit tandem 630 Q. − 73 N. æquale 6. vnde inuenitur 1 N. $\frac{6}{35}$. Ad positiones.

OBSERVATIO D. P. F.

ADdi potest ex nostra methodo sequens quæstio; *Inuenire triangulum rectangulum vt summa laterum multata areâ conficiat datum numerum.*

IN QVAESTIONEM IX.

EX præcedentium explicatione, satis hæc fit dilucida. Integram solutionem omisit Diophantus, quæ talis est. fit 1 N. $\frac{6}{35}$. Quare latera quæsiti trianguli reperiuntur $\frac{24}{5}$ $\frac{54}{7}$. & $\frac{318}{35}$. Area verò est $\frac{648}{35}$. vnde si detrahas summam laterum circa rectum, remanet $\frac{210}{35}$. seu 6. vt postulabatur.

QVAESTIO X.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν ἐν συναμφοτέρᾳ, τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ δοθέντα ς^ον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ° δ. καὶ πάλιν τάξομεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει. ἀπάγεται πάλιν εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως συναμφοτέρας τῆς τε ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ προσλαβὼν τὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τετραπλάσιον, ποιῇ τετράγωνον. πλάσσω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ς^ου α. καὶ ἀπὸ ς^ου α. μ° α. καὶ ποιεῖ συναμφοτέρας τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ δ^υ δ^υ α κ^υ δ. δ^υ ς. ςς^οὶ δ. μ° α. ὁ δὲ τετραπλάσιων τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ κ^υ η. δ^υ ιβ. ςς δ. ὥστε δεήσει ζητεῖν δ^υ δ^υ α. κ^υ ιβ. δ^υ ιη. ςς^οὶ η. μ° α. ἴσους τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς δ^υ α. ςς ς. ⋔ μ° α. καὶ γίνεται ὁ ς^ος ε δ^χ. πλάσσεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ ε δ^χ. καὶ θ δ^χ. καὶ ἅπαντα τετράκις πλα-

INVENIRE triangulum rectangulum vt areæ numerus adsumens summam hypotenusæ & alterius laterum circa rectum, faciat datum numerum. Esto datus 4. Rursus statuemus triangulum datum specie, & eo reducimur, vt inueniamus triangulum rectangulum, vt numerorum hypotenusæ & alterius laterum circa rectum summæ semissis in se ductus, & adsumens quadruplum areæ faciat quadratum. Formetur triangulum ab 1 N. & 1 N. + 1. & summæ hypotenusæ & alterius laterum circa rectum semissis in se, fit 1 QQ. + 4 C. + 6 Q. + 4 N. + 1. Quadruplum autem areæ est 8 C. + 12 Q. + 4 N. Itaque oportet quærere 1 QQ. + 12 C. + 18 Q. + 8 N. + 1 æqualia quadrato. Esto latus eius 1 Q. + 6 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{5}{4}$. formabitur ergo trian-

gulum abs $\frac{5}{4}$. & $\frac{9}{4}$. & omnia quater. Formabitur rursum triangulum à 9. & 5. & sumens minima similium, statuo ipsum in numeris, fit 28 N. 45 N. 53 N. Et est numerus areæ adsumens summam hypotenusæ & alterius laterum circa rectum 630. Q. + 81 N. æqualis 4. & fit 1 N. $\frac{4}{105}$. Ad positiones.

ἀθήσεται πάλιν τὸ τρίγωνον ἀπὸ θ. καὶ ε. καὶ λαβὼν τὰ ἐλάσσονα τῶν ὁμοίων τάσσω αὐτὸν ἐν ςςοῖς. γίνεται ςς κη. ςς με. ςς νγ. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μετὰ συναμφοτέρας τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν δυνάμεις χλ ςς πα. ἴσος μο δ. καὶ γίνεται ὁ ς δ ρε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

IN QVAESTIONEM X.

IMPRIMIS monendus est lector, hanc & sequentem propositionem in codice Xilandri malè ordinem immutare, cùm sequens statuatur ibi decima, & hæc vndecima. Rectius in codice regio suum quemque obtinet locum, in quo vno codex ille nobis hucusque fuit auxilio, in reliquis omnibus nimis inseliciter cum codice Xilandri consentiens. Sed & euidens est Diophantum in sequente quæstione vndecima, supponere totam fere decimæ huius constructionem, vt de harum propositionum ordine nullus supersit dubitandi locus. Hic porro cùm inueniendum sit triangulum, vt quadratus semissis compositi ex hypotenusa, & ex altero laterum circa rectum, adsumens quadruplum areæ faciat quadratum, formatur triangulum ab 1 N. & ab 1 N. + 1. fitque hypotenusa 2 Q. + 2 N. + 1. basis 2 N. + 1. perpendiculum 2 Q. + 2 N. Area verò est 2 C. + 3 Q. + 1 N. cuius quadruplum 8 C. + 12 Q. + 4 N. summa autem hypotenusæ & baseos est 2 Q. + 4 N. + 2. cuius semissis 1 Q. + 2 N. + 1. cuius quadratus fit 1 QQ. + 4 C. + 6 Q. + 4 N. + 1. cui addendo quadruplum areæ, fit 1 QQ. + 12. C. + 18 Q. + 8 N. + 1. æquandus quadrato. Huius autem latus cur ponatur à Diophanto 1 Q. + 6 N. − 1. satis superque docuimus ad vigesimam nonam quarti, nimirum hac ratione tolluntur quadratoquadrati, cubi & vnitates, manetque æquatio inter duas proximas species quadratos & numeros. Nam fiunt 16 Q. æquales 20. N. vnde fit 1 N. $\frac{5}{4}$. Quare formandum est triangulum à $\frac{5}{4}$. & $\frac{9}{4}$ & omnia per 4. multiplicando, fingitur triangulum à 5. & 9. suntque latera 106. 56. 90. quæ diuidendo per 2. vt habeatur nimirum triangulum eiusdem speciei in integris, fiunt 53. 28. 45. cuius rei ratio ex demonstratis ad sextam satis liquet. Ponuntur ergo latera quæsiti trianguli 53 N. 28. N. 45 N. & est area 630 Q. cui addendo summam hypotenusæ 53 N. & lateris 28 N. fit 630 Q. + 81 N. æqualis 4. vnde fit 1 N. $\frac{4}{105}$, per quem resoluendo hypostases, fiunt latera quæsiti trianguli $\frac{212}{105}$. $\frac{16}{15}$. $\frac{12}{7}$. Area est $\frac{96}{105}$. cui si addas summam hypotenusæ & primi lateris fit $\frac{420}{105}$. seu 4. vt requirebatur.

Cæterùm eodem prorsus artificio soluetur quæstio quæ à Diophanto prætermissa est, cùm tamen ad hanc tractationem pertineat nimirum.

Inuenire triangulum rectangulum, vt areæ numerus adsumens hypotenusam datum faciat numerum. Esto datus 4.

Patet quærendum prius triangulum, vt quadrato semissis hypotenusæ addendo quadruplum areæ, fiat quadratus. Fingatur triangulum ab 1 N. & 1 N. + 1. erit semissis hypotenusæ 1 Q. + 1 N. + $\frac{1}{2}$. cujus quadratus 1 QQ. + 2 C. + 2 Q. + 1 N. + $\frac{1}{4}$. cui addendo quadruplum areæ, puta 8 C. + 12 Q. + 4 N. fit 1 QQ. + 10 C. + 14. Q. + 5 N. + $\frac{1}{4}$. æqualis quadrato. Ponatur latus illius 1 Q. + 5 N. − $\frac{1}{2}$. fient tandem 10 N. æquales 10. Q. Quare 1 N. est 1. & fingendum est triangulum ab 1. & à 2. fiuntque latera 5. 3. 4, quæ si statuantur in numeris, fiet area cum hypotenusa 6 Q. + 5 N. æqualis 4. vnde fit 1 N $\frac{1}{2}$. sunt ergo quæsiti trianguli latera 2 $\frac{1}{2}$. 2. 1 $\frac{1}{2}$. fitque area 1 $\frac{1}{2}$ cui si addas hypotenusam fit numerus 4. vt postulabatur.

QVÆSTIO XI.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ multatus summa hypotenusæ & alterius laterum circa rectum, faciat datum numerum. Esto datus 4. Rursum si statuamus triangulum datum specie, eò ducimur vt inueniamus triangulum rectangulum, vt quadruplum areæ additum quadrato semissis

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λείψας τὸν ἐν συναμφοτέρῳ τῆς τε ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μονάδες δ. καὶ πάλιν ἐὰν τάξωμεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει, ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ τετράκις γενόμενος πρὸς συναμ-

φοτέρων τῆς τε ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ποιῇ τετράγωνον. καὶ δειχθήσεται ὅτι ἐστὶν κη. με. νγ. τάσσω αὐτὸν ἐν ςςοῖς καὶ γίνονται δυ χλ. λείψει ςς πα. ἴσαι μο δ. καὶ γίνεται ὁ ς ᾱ ς̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

summæ ex hypotenusa, & altero laterum circa rectum, faciat quadratum, & demonstratum est esse 28. 45. 53. Pono illud in numeris, & fiunt 630 Q. – 81 N. æquales 4. & fit 1 N. $\frac{1}{6}$. Ad positiones.

IN QVAESTIONEM XI.

HVIVS quæstionis solutio pendet omnino à lemmate ad præcedentem assumpto. Nam inuento triangulo vt quadruplum areæ additum quadrato semissis compositi ex hypotenusa & altero laterum, faciat quadratum, constituitur in Numeris, puta 53 N. 28 N. 45 N. & fiunt tandem 630 Q. – 81 N. æquales 4. vnde 1 N. fit $\frac{1}{6}$. Quare quæsiti trianguli latera reperiuntur $\frac{53}{6}$ $\frac{14}{3}$. $\frac{15}{2}$. Area est $\frac{105}{6}$ vnde auferendo summam hypotenusæ & baseos, puta $\frac{81}{6}$. remanet $\frac{24}{6}$. seu 4. vt postulabatur.

Eodem etiam artificio soluetur hæc quæstio.

Inuenire triangulum rectangulum, vt area, detracta hypotenusa, faciat datum numerum.

Datus esto 4. Quæretur triangulum, vt prius, vt quadruplum areæ additum quadrato semissis hypotenusæ, faciat quadratum, quale inuentum est ad præcedentem 5. 4. 3. statuatur ergo in Numeris, & sint quæsiti trianguli latera 5 N. 4 N. 3 N. fient ergo 6 Q. – 5 N. æquales 4. vnde fit 1 N. $\frac{4}{3}$. Ad hypostases. Sunt quæsiti latera trianguli $\frac{20}{3}$. 4. $\frac{16}{3}$. Estque area $\frac{32}{3}$. vnde si auferas hypotenusam, remanet $\frac{12}{3}$ seu 4. vt postulabatur.

OBSERVATIO D. P. F.

Addi potest ex nostra methodo sequens quæstio; Inuenire triangulum rectangulum vt summa hypotenusæ & alterius lateris circa rectum multata areâ faciat datum numerum imo & sequens addi potest Bacheti commentarijs; Inuenire triangulum vt hypotenusa detractâ areâ faciat datum numerum.

QVÆSTIO XII.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ ὁ ἐν τῇ μείζονι τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ᾖ τετράγωνος. ἔτι δὲ ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ μετὰ ἐλάσσονος τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τετράγωνον. πεπλάσθω τρίγωνος ἀπὸ ἀριθμῶν δύο, καὶ ὑποκείσθω ἡ μείζων τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γινομένη ἐκ τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν. δεῖ οὖν εὑρεῖν δύο ςςοὺς ὅπως ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ᾖ τετράγωνος. καὶ ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει τὸ δὶς ὑπ' αὐτῶν τῆς ὑπεροχῆς τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ ἐν πᾶσι δυσὶν ἀριθμοῖς, ὅταν ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ᾖ διπλασίων. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ςου ᾱ. καὶ ςς β̄ καὶ λύεται δύο τῶν ἐπιταγμάτων, λοιπὸν ζητοῦμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου μετὰ τὴν ἐλάσσονα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ δυ δυ ς̄. δυ γ̄. καὶ πάντα παρὰ δύναμιν, γίνεται δυ ς̄. μο γ̄. ἴσαι τετραγώνῳ. ζητήσομεν ἄρα ἀριθμόν τινα, ὅπως οἱ ἓξ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνοι μετὰ μο γ̄. ποιῶσι τετράγωνον. ἔστι δὲ ἡ μονὰς ᾱ. καὶ ἄλλοι ἄπειροι ἀριθμοί. ὥστε τὸ

INVENIRE triangulum rectangulum, vt & interuallum laterum circa rectum, & ipsum maius latus, sit quadratum. Et præterea area cum minore laterum circa rectum, faciat quadratum. Formetur triangulum à duobus numeris, & supponatur maius laterum circa rectum fieri ex duplo producti multiplicationis ipsorum. Oportet ergo inuenire duos numeros, vt duplum multiplicationis eorum sit quadratus, & excessus dupli multiplicationis eorum super interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, faciat quadratum. Hoc autem accidit duobus quibusuis numeris, quando maior minoris est duplus. Formetur ergo triangulum abs 1 N. & 2 N. & satisfit duabus propositi partibus. Superest vt videamus an area trianguli cum minore laterum circa rectum faciat quadratum fit autem 6 QQ. + 3 Q. & omnia per 1 Q. diuidantur. Fiunt 6 Q. + 3. æqualia

quadrato. Quæremus igitur aliquem numerum, cuius sex quadrati adſumpto ternario faciant quadratum. Hujuſmodi autem eſt 1. & alij infiniti numeri. Ergo quæſitum triangulum rectangulum formabitur ab 1. & 2.

ζητούμενον ὀρθογώνιον ἔσται πεπλασμένον ἀπὸ μο α. καὶ μο β.

Lemma.

Duobus datis numeris, quorum ſumma ſit quadratus. Inuenientur infiniti quadrati, quorum quilibet ductus in vnum datorum & adſumens alterum, faciet quadratum. Sint duo dati numeri 3. & 6. & oporteat inuenire quadratum, qui ductus in 3. & adſumens 6. faciat quadratum. Eſto quæſitus quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. & fiunt 3 Q. + 6 N. + 9. æqualia quadrato, & ſolui poteſt infinitis modis, quia vnitates ſunt quadratæ. Eſto igitur latus quadrati 3 − 3 N. & fit 1 N. 4. erit igitur quadrati latus 5. & alij infiniti inuenientur.

Λῆμμα.

Δύο δοθέντων ἀριθμῶν ὧν τὸ σύνθεμα ποιῇ τετράγωνον. εὑρίσκονται ἄπειροι τετράγωνοι, ὧν ἕκαστος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα τῶν δοθέντων, καὶ προσλαβὼν τὸν ἕτερον ποιεῖ τετράγωνον. ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ δύο ὅ τε γ. καὶ ὁ ς. καὶ δέον ἔστω προσευρεῖν τετράγωνον. ὃς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν γ. καὶ προσλαβὼν τὸν ς. ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ ζητούμενος τετράγωνος. δυ α. ςς β. μο α. καὶ γίνονται δυ γ. ςς ς. μο θ. ἴσαι τετραγώνῳ, καὶ δυνατόν ἐστι ἀπειραχῶς εὑρεῖν διὰ τὸ τὰς μονάδας εἶναι τετραγωνικάς. ἔσται οὖν πλευρὰ ἀπὸ πλευρᾶς μο γ. λεῖψει ςς γ. καὶ γίνεται ὁ ς μο δ. ἔσται ἄρα ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ μο δ. καὶ ἕτεροι ἄπειροι εὑρίσκονται.

IN QVAESTIONEM XII.

SVPPONIT in primis Diophantus huiuſmodi Theorema.

Si fuerint duo numeri in proportione dupla, tam duplum producti eorum multiplicatione, quam exceſſus eiuſdem dupli producti ſuper interuallum quadratorum, quadratus eſt.

A 3. B 6.
C 9. D 36.
G 27.

Quod ita demonſtratur. Sint in ratione dupla A minor & B maior, quorum quadrati C D. quorum interuallum G. dico tum duplum producti ex A in B. tum exceſſum eiuſdem dupli producti ſuper G. eſſe quadratum, etenim quia B eſt duplus ad A patet D eſſe quadruplum ipſius C. eo quod quadrati ſunt in duplicata ratione laterum. Sed productum ex A in ſuum duplum B æquatur duplo quadrati ipſius A. ac proinde duplum producti ex A in B. æquatur quadruplo quadrati ipſius A. hoc eſt quadruplo ipſius C. Igitur quadratus D. eſt duplum producti ex A in B. Quod erat primo probandum. Deinde patet ex hypotheſi exceſſum D ſuper G eſſe ipſum quadratum C. Quare ex omni parte conſtat propoſitum. Idcirco Diophantus fingit triangulum ab 1 N. & 2 N. vt duabus propoſiti partibus ſatisfiat; nam latera circa rectum ſunt 4 Q. & 3 Q. quorum maius eſt quadratus vt patet; exceſſus verò illius ſuper minus, eſt etiã quadratus puta 1 Q. Reſtat ergo vt area minore latere adſumpto faciat quadratum, facit autem 6 QQ. + 3. Q. æquale quadrato, & omnia per 1 Q. diuidendo, fit 6. Q. + 3. æquandus quadrato.

Hic ſanè Diophantus non vſitata prius ratione, quadrato æquat numerum ex duabus ſpeciebus non proximis compoſitum, quales ſunt quadrati & vnitates, quamuis neutra ipſarum numero exprimatur quadrato. Vt autem hoc fieri poſſit, quærendus eſt quadratus quo per 6. multiplicato, & producto addendo 3. fiat quadratus. Quod quidem poſſibile eſt, quia 6. & 3. ſimul conficiunt quadratum, & res abſoluitur per aſſumptum lemma. Quia verò vnitas quadratus eſt, & non mutat numerum quem multiplicat, ſequitur ex eo quod 6. & 3. conficiunt quadratum 9. vnitatem ſumi poſſe loco quadrati quæſiti. Vnde fit etiam 1 N. 1. Quamobrem fingitur triangulum ab 1. & 2. & fiunt latera 5. 4. 3. quæ ſoluunt quæſtionem.

Porrò facilè eſt auxilio lemmatis aſſumpti alias reperire ſolutiones. Ponamus enim quadratum quæſitum 1 Q. + 2 N. + 1. quo ducto in 6. & producto addendo 3. fit vtique 6 Q. + 12 N. + 9. æquandus quadrato, cuius latus cùm infinitis modis fingi poſſit, quia vnitatum numerus quadratus eſt, patet infinitas reperiri poſſe ſolutiones. Verbi gratia ponatur latus hoc 3 − 3 N. fiet 1 N. 10. Quamobrem quæſitus quadratus eſt 121. quo ducto in 6. fit 726. cui addendo 3. fit 729. quadratus

à latere 27. Quare si 6 Q. + 3. æquemus quadrato 729. fiet 1 N. 11. Ac proinde fingatur triangulum ab 11. & 22. eruntque latera 605. 484. 363. quæ soluunt quæstionem, nam maius laterum circa rectum puta 484. est quadratus à latere 22. & illius excessus super 363. est 121. quadratus à latere 11. Area verò addito minore latere facit 88209. quadratum à latere 297. Itaque notandus est modus iste, quo æquabimus quadrato quemlibet quadratorum & vnitatum numerum, quamuis neuter sit quadratus, dummodo vterque simul conficiat quadratum.

Et vt aliquid addamus Diophanto, aio æquationem quoque explicari posse quamuis quadratorum, & vnitatum numeri simul non conficiant quadratum, dum reperiatur quadratus aliquis qui ducto in numerum quadratorum, & producto addendo numerum vnitatum fiat quadratus, quod sanè perficiemus per huiusmodi lemma.

Datis duobus numeris, si altero per quadratum multiplicato, altero ad productum addito fiat quadratus, inuenientur alij quadrati idem præstantes.

Sint dati 5. & 16. Nam ducto quadrato 4. in 5. & producto addendo 16. fit quadratus 36. Quærendus ergo est alius quadratus quàm 4. qui hoc idem præstet. Esto latus illius 2 + 1 N. fiet quadratus 4 + 4 N. + 1 Q. quo ducto in 5. & producto adiiciendo 16. fit 36 + 20 N. + 5 Q. æqualis quadrato. Hîc autem infinitæ dati possunt solutiones, quia vnitatum numerus est quadratus. Fingatur verbi gratia latus huius quadrati 6 − 3 N. fiet 1 N. 14. eritque quæsiti quadrati latus 16. ipse quadratus 256. quo ducto in 5. & producto adiiciendo 16. fit 1296. quadratus à latere 36.

Immò quod de multiplicatione dictum est, intelligendum quoque de diuisione, & scias eadem arte solui huiusmodi lemma.

Datis duobus numeris, si altero per quadratum diuiso, & altero ad quotientem addito fiat quadratus, inuenientur alij infiniti quadrati idem præstantes.

Sint dati numeri 96. & 12. Nam diuiso 96. per quadratum 4. fit quotiens 24. cui addendo 12. fit quadratus 36. Quærendus ergo alius quadratus quàm 4. qui præstet idem ponatur eius latus vt prius 2 + 1 N. erit quadratus 4 + 4 N. + 1 Q. per quem diuidendo 96. fit quotiens $\frac{96}{4 + 4 N. + 1 Q.}$ & huic addendo 12. fit $\frac{144 + 48 N. + 12 Q.}{4 + 4 N. + 1 Q.}$ æqualis quadrato. Est autem denominator quadratus. Quare superest vt numerator 144. + 48 N. + 12 Q. æquetur quadrato, quod facilè fit, quia 144 est quadratus, & fingetur latus illius 12 − 6 N. & fiet 1 N. 8. Quare latus quæsiti quadrati est 10. ipse quadratus 100. per quem diuidendo 96. fit quotiens $\frac{24}{25}$. cui addendo 12. fit $\frac{324}{25}$. quadratus à latere $\frac{18}{5}$. Quòd autem 144. necessariò sit quadratus, patet, ex eo quòd 144. fit addendo ad 96. productum ex 4 in 12. Quare cùm ex hypothesi 24. & 12. simul faciant quadratum 36. si vterque per aliquem quadratum multiplicetur, erit & summa productorum quadratus. Atqui ducto 4. in 24. fit 96. & ducto eodem 4. in 12. fit 48. Igitur summa ipsorum 96. & 48. puta 144. quadratus est, ille scilicet qui fit ducto 4. in 36.

Hoc autem lemmate mirificè iuuatur operatio Diophanti, quæ aliter fortuita videatur. Nam si finxisset triangulum ab aliquibus alijs numeris in ratione dupla constitutis, puta à 2 N. & 4 N. fuissent latera 20 Q. 16 Q. 12 Q. vbi laterum quidem circa rectum interuallum, itemque maius ipsorum, quadratus est, sed area minore assumpto. Fit 96. QQ + 12 Q. & omnia diuidendo per 1 Q. fit 96 Q. + 12. æqualis quadrato. Atqui 96. & 12. simul non conficiunt quadratum. Quare per ea quæ tradit author, non constat quomodo 96 Q. + 12. possit æquari quadrato, & eius lemma hîc vsui esse non potest. Per nostrum autem lemma facilè res expedietur, nam si diuidas 96. per quadratum 4. fit 24. cui addendo 12. fit quadratus 36. Quare per allatum lemma inuenientur infiniti quadrati ab ipso 4. diuersi qui præstabunt idem, & infinitas exhibebunt solutiones. Nam inuento verbi gratia quadrato 100. per quem diuidendo 96. fit $\frac{24}{25}$. quo addito ad 12. fit quadratus $\frac{324}{25}$. æquabimus 96 Q. + 12. quadrato $\frac{324}{25}$. vnde fiet 1 N. $\frac{1}{10}$. Quare formabitur triangulum ab $\frac{1}{5}$. & $\frac{2}{5}$. & erunt latera circa rectum $\frac{3}{25}$. $\frac{4}{25}$. quorum maius, itemque interuallum ipsorum quadratus est. Area verò est $\frac{6}{625}$. cui addendo minus latus $\frac{3}{25}$. fit quadratus $\frac{81}{625}$. à latere $\frac{9}{25}$.

Tota tamen hæc operatio, adhuc labare videtur, nisi probetur aream trianguli sic diuidi posse per aliquem quadratum, vt quotienti addendo, minus laterum circa rectum, fiat quadratus. Quamobrem ne hîc scrupulus hæreat, sic pronuncio.

Si à datis duobus numeris in proportione dupla formetur triangulum rectangulum, eius area per quadratum minoris datorum diuisa, fit quotiens, quo addito minori laterum circa rectum, conflatur quadratus noncuplus ad priorem quadratum.

A 2.	B 4.
C 4.	D 16.
E 96.	F 12.
G 24.	

Sint in ratione dupla A minor & B maior, quorum quadrati C D. quorum interuallum F. ergo cum vt probatum est in adnotatis ad initio D sit duplum producti ex A in B. sunt D F latera circa rectum trianguli. Quare ducto semisse ipsius D in F fiat area E. qua diuisa per C. fit quotiens G. dico summam duorum F G esse quadratum noncuplum ad ipsum C. Etenim quia vt probatum est ab initio D quadruplus est ad C. sequitur subtracto C ab ipso D. residuum F esse triplum ad C. Quare cùm semissis ipsius D ducitur in

F. ducitur

F. ducitur duplum ipſius C in triplum eiuſdem. Igitur E continet ſexies quadratum ipſius C. itaque diuidendo E per C. quotiens G eſt ſextuplus ad C. cui ſi addatur F. triplus ad eundem C. fiet vtique ſumma ipſorum F G noncupla ad C. ac proinde quadratus, cùm ſit noncuplum quadrati C. Quod demonſtrandum erat.

Supereſt vt moneam, verba illa poſtrema quæ virgulis incluſimus, γίνεται δὲ δυ δυ &c. à nobis ſuffecta eſſe in locum iſtorum quæ in codice manu exarato corruptiſſima leguntur. γίνεται δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δ. ς. τῆς ἀπὸ τοῦ ς δυ δυ. ὅτι τῇ τὸν τ ἐκ τελῶν τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον, καὶ πάντα παρὰ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον. A quibus tamen ſi quis commodum ſenſum elicere potuerit, per me licet, vt noſtra deleat, & meliora reponat.

QVÆSTIO XIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adſumens alterutrum laterum circa rectum, faciat quadratum. Statuatur triangulum datum ſpecie 5 N. 12 N. 13 N. & fit 30 Q. + 12 N. æquandus quadrato, eſto quadrato 36 Q. & fit 1 N. 2. & cùm 1 N. ſit 2. oportebit vt etiam 30 Q. + 5 N. ſit quadratus. At non eſt. Itaque eo compellimur, vt inueniamus quadratum aliquem quo multato numero 30. & per reſiduum diuiſo 12. & quotientis quadrato per 30. multiplicato, & adſumente quintuplum ſui lateris fiat quadratus. Eſto quæſitus quadratus 1 Q. & ſi inde auferatur 30. & per reſiduũ diuidatur 12. fit 12. denominatione partis 1 Q. − 30. cuius quadratus eſt 144. denominatione partis 1 QQ. + 900 − 60 Q. Hoc tricies cum quintuplo ſui lateris, facit 60 Q. + 2520. ſub denominatione partis 1 QQ. + 900 − 60 Q. æquale quadrato, & eſt pars quadratus. Oportet igitur & 60 Q. + 2520. quadratum eſſe, hoc eſt oportet quadratum aliquem ductum in 60. & adſumentem 2520. facere quadratum. Si ergo formantes rectangulum, curauiſſemus vt 60. adſcito 2520. faceret quadratum, ſoluta eſſet quæſtio. Fit autem 60. ex mutuo ductu laterum circa rectum. At 2520. eſt ſolidus contentus ſub majore laterum circa rectum, & ſub interuallo laterum circa rectum, & ſub area. Eoque res rediit, vt inueniendum ſit triangulum rectangulum, vt qui fit mutuo ductu laterum circa rectum adſcito ſolido ſub maiore laterum circa rectum, interuallo eorundem, & area contento, faciat quadratum. Et ſi conſtituamus maius laterum circa rectum, quadratum numerum, & omnia per ipſum diuida-

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ςς ε. ςς ιβ. ςς ιγ. καὶ γίνεται δυ λ. ςςοὶ ιβ. ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ ἔστω δυ λς. καὶ γίνεται ὁ ς β. καὶ τοῦ ς ὄντος μο β. δεήσει καὶ δυ λ. ςςοὶ ε. εἶναι τετράγωνον. οὐκ ἔστι δέ. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν τετράγωνόν τινα ὃς λείψας τὸν λ. ἀριθμὸν, παρὰ τὸν λοιπὸν μερισθῇ ὁ ιβ. καὶ ὁ γινόμενος ἀριθμὸς ἐφ' ἑαυτὸν τριακοντάκι καὶ προσλαβὼν τὸν πενταπλασίονα τοῦ εὑρεθέντος ἀριθμοῦ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ ζητούμενος τετράγωνος δυ α. καὶ ἐὰν λείψῃ τὸν λ. καὶ παρὰ τὸν λοιπὸν μερισθῇ ὁ ιβ. γίνεται μο ιβ. ἐν μορίῳ δυνάμεως α. λείψει μο λ. ὁ τετράγωνος γίνεται ρμδ. ἐν μορίῳ δυ δυ α. μο π. λείψει δυνάμεων ξ. ταῦτα τριακοντάκι μετὰ τοῦ πενταπλασίονος τῆς ἑαυτοῦ πλευρᾶς γίνεται δυ ξ. μο βφκ. ἐν μορίῳ δυ δυ α. μο π. λείψει δυ ξ. ἴσον τετραγώνῳ. καὶ ἔστι τὸ μόριον τετράγωνος. καὶ δεήσει ἄρα δυνάμεις ξ. μο. βφκ. εἶναι τετράγωνον. τουτέστι δεῖ τετράγωνόν τινα ἑξηκοντάκι γινόμενον, καὶ προσλαβόντα μο βφκ. ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν οὖν πλάσσοντες τὸ ὀρθογώνιον κατασκευάσωμεν τὸν ξ. μετὰ τοῦ βφκ. ποιεῖν τετράγωνον. λύσομεν τὸ ζητούμενον. γίνεται δὲ ὁ μὲν ξ. ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν. ὁ δὲ βφκ. ἐκ τοῦ στερεοῦ περιεχομένου ἐκ τῆς μείζονος τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως, ὁ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ, προσλαβὼν τὸν στερεὸν, τὸν περιεχόμενον ἔκ τε τῆς μείζονος τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ, ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐὰν τάξωμεν τὴν μείζονα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἅπαντα παραβάλλωμεν παρ' αὐτήν, ζητήσομεν τὸν ἐν τῇ ἐλάσσονι τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, μετὰ τοῦ

ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, τετράγωνον. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ δύο ἀριθμῶν δοθέντων τοῦτε ἐμβαδοῦ, καὶ τῆς ἐλάσσονος τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, πρὸς αὐτοῖς ζητεῖν τετράγωνόν τινα, ὃς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα τῶν δοθέντων, καὶ προσλαβὼν τὸν ἕτερον ποιῇ τετράγωνον. ταῦτα δὲ λήμματα προδέδεικται. καὶ ἔστι τὸ ὀρθογώνιον γ. δ. ε. τάσσω αὐτὸν ἐν ςς^{οῖς}, καὶ γίνεται ζητεῖν δυ ς. ςς^{οὺς} δ. ἴσους τετραγώνῳ. καὶ δυ ς. ςς^{οὺς} γ. ἴσους τετραγώνῳ, καὶ πάλιν ἐὰν ἀπολύσωμεν τὴν μείζονα ἰσότητα γίνεται ὁ ς^{ὸς} μο δ. ἐν μορίῳ δυ α ⋔ μο ς. ἡ ἄρα δύναμις γίνεται μο ις. ἐν μορίῳ δυ δυ α μο λς λεῖψει δυ ιβ. ἔσται ἄρα δυνάμεως ἑξαπλασίων μετὰ ςς τριῶν. δυ ιβ. μο κδ. ἐν μορίῳ δυ δυ α. μο λς ⋔ δυ ιβ. δυνάμεις ἄρα ιβ μο κδ. ὀφείλουσιν ἴσαι [illegible] τετραγώνῳ. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τετράγωνον, ὃς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ἐλάσσονα τῶν δοθέντων, καὶ προσλαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ τετράγωνον. ἔστι δὲ ὁ κε. ὥστε ἡ δύναμις γίνεται μο κε. ὁ ἄρα ς^{ὸς} ἔσται μο ε. ζητοῦντες οὖν δυ ς ςς^{οὺς} δ. ἰσῶσαι τετραγώνῳ. ποιοῦμεν ἴσον δυ κε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ ιθ^{ων}. ἔσται ἄρα τὸ τρίγωνον ιβ ιθ^{ων}. ις ιθ^{ων}. κ ιθ^{ων}. καὶ μένει.

mus, quæremus minus laterum circa rectum additum plano sub area & interuallo laterum circa rectum contento, esse quadratum. Oportet igitur datis duobus numeris, areæ scilicet, & minoris laterum circa rectum, ipsis adinuenire quadratum aliquem, qui ductus in vnum datorum, & adsumens alterum, faciat quadratum. Hæc autem lemmata suprà sunt demonstrata. Et est rectangulum 3. 4. 5. statuo id in numeris, fitque vt quæram 6 Q. + 4 N. æquales quadrato, & 6 Q. + 3 N. æquales quadrato. Et rursum si absoluamus maiorem æqualitatem, fit 1 N. 4. denominatione partis 1 Q. – 6. ergo quadratus erit 16. denominatione partis 1 Q Q. + 36 – 12 Q. Quamobrem sextuplum quadrati adscitis 3. N. erit 12 Q. + 24. denominatione partis 1 Q Q. + 36 – 12 Q. Proinde 12. Q. + 24. æquari oportet quadrato. Et res eò rediit vt inueniatur quadratus, qui ductus in minorem datorum, & adsumens maiorem faciat quadratum. Est autem 25. Quare 1 Q. est 25. & 1 N. 5. Igitur quærentes æquare quadrato 6 Q. + 4 N. æquabimus quadrato 25 Q. & fit 1 N. $\frac{4}{19}$. Est ergo triangulum $\frac{12}{19}$ $\frac{16}{19}$ $\frac{20}{19}$ & constat.

OBSERVATIO D. P. F.

Vnius tantum speciei triangula Diophantus exhibet propositum adimplentia, Sed ex nostrâ methodo suppetunt infinita diuersæ speciei triangula quæ ex Diophantæo per ordinem deriuantur.

Sit igitur inuentum triangulum 3. 4. 5. cuius hæc est proprietas vt qui fit mutuo ductu laterum circa rectum adscito solido sub maiore laterum circa rectum interuallo eorundem, & areâ contento faciat quadratum. Ab eo deducendum aliud eiusdem proprietatis, sit maius ex lateribus circa rectum trianguli quæsiti 4. minus vero 3 + 1 N. Rectangulum sub lateribus circa rectum adscito solido sub maiore laterum circa rectum interuallo eorundem & areâ contento, facit 36 – 12 N. – 8 Q. quæ ideo debent æquari quadrato. Cum autem latera 4 & 3 + 1 N. sint latera circa rectum trianguli rectanguli, debent etiam eorum quadrata iuncta æquari quadrato. Quadrata illa iuncta faciunt 25 + 6 N + 1 Q. quæ idcircò etiam æquanda quadrato. Et oritur duplicata æqualitas, nam 36 – 12. N – 8 Q. & etiam 25 + 6 N + 1 Q. debent æquari quadrato. Eius æquationis duplicatæ solutio est in promptu.

IN QVAESTIONEM XIII.

MVLTA sunt hic obseruatu dignissima. Sed cùm tres operationes instituat Diophantus, eas sigillatim percurrendo, omnia dilucidabimus.

In prima operatione sumit quemlibet triangulum datum specie, puta 5 N. 12 N. 13 N. fitque area 30 Q. cui addendo sigillatim latera circa rectum, fiunt 30 Q. + 12 N. & 30 Q. + 5 N. simul æquandi quadrato. Non est autem locus duplicatæ æqualitati, quoniam quadratorum numerus 30.

non est quadratus. Quamobrem alio, & sanè mirabili artificio vtitur Diophantus. Sumit enim alterum numerorum quadrato æquandorum, puta 30 Q. + 12 N. quem facit quadrato æqualem. Id autem facillimum est sumendo quemlibet quadratorum numerum quadratum, maiorem quàm 30. vt 36 Q. vnde fit 1 N. 2. & sanè per hunc Numeri valorem resoluendo 30 Q. + 12 N. fit quadratus. Sed vt valida sit æquatio, oportet vt per eundem valorem Numeri resoluendo quoque 30 Q. + 5 N. fiat quadratus. Quod non accidit, nam cùm 1 N. sit 2. quadratus est 4. atque adeo 30 Q. sunt 120. cui addendo 5 N. seu 10. fit 130. qui neutiquam quadratus est.

Necessitas ergo secundæ operationis hinc innotescit. Nam vt æquemus quadrato 30 Q. + 12 N. sumimus aliquem quadratum maiorem quàm 30. à quo auferendo 30. & per residuum diuidendo 12. fit valor Numeri. Quare vt alter numerus 30 Q. + 5 N. sit æqualis quadrato, oportet vt quotientis illius quadratus tricies sumptus, adscito quincuplo eiusdem quotientis, fiat quadratus. Ponit itaque quæsitum quadratum 1 Q. vnde auferendo 30. fit 1 Q. − 30. per quem diuidendo 12. fit quotiens $\frac{12}{1 Q. - 30}$. huius quadratus est $\frac{144}{1 QQ. - 60 Q. + 900}$. cuius trigecuplum est $\frac{4320}{1 QQ. - 60 Q. + 900}$. cui addendo quincuplum ipsius lateris $\frac{12}{1 Q. - 30}$. puta $\frac{60}{1 Q. - 30}$. fit $\frac{60 Q. + 2520}{1 QQ. - 60 Q. + 900}$. fit autem hæc additio reducendo $\frac{60}{1 Q. - 30}$. ad denominationem alterius numeri cui additur, nempe ducendo 60. in 1 Q. − 30. vnde fit 60 Q. − 1800. quo addito ad 4320. fit numerator fractionis quæ est summa numerorum additorum, puta 60 Q. + 2520. manetque idem denominator, puta 1 QQ. − 60 Q. + 900. Igitur vt consequamur quod hac secunda operatione intenditur, oportet vt $\frac{60 Q. + 2520}{1 QQ. - 60 Q. + 900}$. æquetur quadrato, & quidem denominatorem satis constat esse quadratum, cùm factus sit à latere 1 Q. − 30. Numerator autem restat æquandus quadrato, quod quidem optimè fieret per lemmata ad præcedentem tradita, si summa ipsorum 60. & 2520. esset quadratus, vel si reperiretur quadratus per quem multiplicando vel diuidendo 60. & producto, quotientive addendo 2520. fieret quadratus. Quod cùm fieri non possit, apparet necessitas tertiæ operationis. Sed prius considerandum est vnde proueniant 60. & 2520. & quidem manifestum est 60. produci ex mutua multiplicatione laterum circa rectum, nempe ex 12. in 5. At 2520. ait Diophantus esse solidum sub maiore laterum circa rectum, sub ipsorum interuallo laterum, & sub area contentum, quod quidem ita se habere non statim apparet. Quare id demonstrandum est. Hoc autem nil aliud est, quàm huiusmodi Theorema.

Datis duobus numeris inæqualibus, & tertio quocunque, si tertius ducatur in quadratum maioris duorum datorum, fit numerus æqualis solido sub tribus datis contento, & solido sub maiore duorum datorum, interuallo eorundem, & tertio dato.

F 4320. E 144. D 7.
C 30. A 12. B 5.
G 1800. H 360. K 60.
L 2520.

Sint dati numeri A maior & B minor, & tertius quicunque C. ipsorum autem A B. interuallum esto D. & ipsius A quadratus sit E. Quo ducto in C fiat F. Tum ducatur A in B & fiat K. quo ducto in C. fiat G. solidus sub tribus C A B. Ducto autem C in A fiat H. quo ducto in D. fiat L. solidus sub tribus C A D. dico F æqualem esse duobus solidis G L. Nam sumptis tribus numeris A bis, & C semel [a] idem fiet numerus, quouis ordine ij inter se ducantur. At ex A in A fit E. *3. 1. porism.* quo ducto in C fit F. ergo idem F fiet ducendo A in C. & productum H in A. Quare ex H in A fit F. solidus item G. sub tribus C A B contentus, fiet ducendo C in A & productum H in B. Quare G fit ex H in B. At ex constructione ex eodem H in D fit solidus L. Cùm ergo B D. simul æquentur ipsi A. [b] numeri G L. producti ex H in ipsos B D. æquabuntur producto ex H in ipsum A. *1. secundi.* At ex H in A producitur F. vt ostensum est. Igitur solidi G L simul æquantur ipsi F. quod erat demonstrandum.

Hinc porrò sequi quod ait Diophantus manifestum est, si operatio illius diligenter consideretur & A B statuantur latera circa rectum trianguli, & C ponatur area. Itaque in tertia operatione quærendum est triangulum rectangulum, vt planus contentus sub lateribus circa rectum, adiecto solido sub maiore laterum, interuallo eorundem laterum, & area contento, fit quadratus. Sic autem ratiocinatur Diophantus. Si concipiamus tam planum, quàm solidum supradictum diuidi per maius latus, orietur inde minus latus, hinc verò planus sub area & interuallo laterum contentus. quare si maius latus ponatur quadratus, sufficiet vt summa minoris lateris, & plani sub interuallo & area contenti, sit quadratus, sic enim ex quadrato in quadratum, fiet quadratus. Igitur oportet constituere triangulum rectangulum, ita vt maius laterum circa rectum sit quadratus, & præterea planus sub interuallo laterum & area contentus, adscito minore latere faciat quadratum, vel certè (quod omisit Diophantus) idem planus per aliquem quadratum diuisus, det quotientem cui adiiciendo minus latus, fiat quadratus. Id autem præstabit, quoduis triangulum per præcedentem inuentum, nam & maius laterum, circa rectum erit quadratus, & ipsum interuallum laterum, quadratus erit; & area adscito minore latere faciet quadratum. Quare cùm planus sub area & interuallo laterum contentus, diuidetur per quadratum illum qui est interuallum laterum, quotiens fiet ipsa

area quæ adſciſcens minus latus faciet quadratum ex hypotheſi; ac proinde per lemma quod vltimum attulimus ad præcedentem, planus ſub area & interuallo laterum contentus, adſciſcens minus latus, infinitis modis æquari poterit quadrato.

Hæc ad integram quæſtionis huius intelligentiam dicta ſufficerent. Sed libet præterea in tyronum gratiam, tertiam Diophanti operationem, quam ille breuiter perſtrinxit, fuſius explicare. Sumo triangulum per præcedentem inuentum, & conſtituo illud in Numeris, puta 5 N. 4 N. 3 N. fitque area 6 Q. cui addendo ſigillatim latera circa rectum, fiunt 6 Q. + 4 N. & 6 Q + 3 N. æquandi quadrato. Quare per ea quæ diximus de neceſſitate ſecundæ operationis, oportet inuenire quadratum, à quo auferendo 6. & per reſiduum diuidendo 4. fiat quotiens, cuius quadratus ſexies ſumptus, & adſumens triplum ſui lateris faciat quadratum. Quadratus ille eſto 1 Q. hic dempto 6. & per reſiduum diuidendo 4. fit $\frac{4}{1Q-6}$. cuius quadratus $\frac{16}{1QQ-12Q+36}$. cuius ſextuplum $\frac{96}{1QQ-12Q+36}$. cui addendo triplum lateris, puta $\frac{12}{1Q-6}$. vel ſub eadem denominatione $\frac{12Q-72}{1QQ-12Q+36}$. fit vtique ſumma $\frac{12Q+24}{1QQ-12Q+36}$. quam æquare oportet quadrato, & cùm denominator ſit quadratus, ſupereſt vt æquemus quadrato numeratorem 12 Q. + 24. Quod facilè fit quia 12. & 24. ſimul efficiunt quadratum 36. & vtendum lemmate quod ad precedentem attulit Diophantus. Quia enim quadratus quæſitus debet eſſe maior quàm 6. (vt æquari poſſit 6. Q. + 4 N.) oportet quærere quadratum maiorem quàm 6. qui ductus in 12. & adſumens 24. faciat quadratum ſit eius latus 1 N. + 1. fiet quadratus ductus in 12. & adſumens 24. 12 Q. + 24 N. + 36. cuius cuius latus eſto 6 + 3 N. fit 1 N 4. Ergo latus quadrati eſt 5. ipſe quadratus 25. Quare 6 Q. + 4 N. æquantur 25 Q. & fit 1 N. $\frac{4}{19}$. eſtque triangulum quæſitum $\frac{12}{19}$. $\frac{16}{19}$. $\frac{20}{19}$. fitque area $\frac{96}{361}$. cui addendo ſigillatim latera circa rectum, fiunt quadrati $\frac{324}{361}$. & $\frac{400}{361}$. à lateribus $\frac{18}{19}$. & $\frac{20}{19}$. Poſſunt autem infinitæ dari ſolutiones, vtendo eodem triangulo 3. 4. 5. Quia per lemma præcedentis loco 25. inueniri poſſunt alij infiniti quadrati, verbi gratia ſi numeri 12 Q. + 24 N. + 361. ponas latus 6 − 4 N. fiet 1 N. 18. eritque latus quadrati 19. ipſe quadratus 361. Quare 6 Q. + 4 N. æquabitur 361 Q. & fiet 1 N. $\frac{4}{133}$. erunt igitur latera trianguli $\frac{12}{133}$. $\frac{16}{133}$. $\frac{20}{133}$. Area $\frac{96}{17689}$. cui addendo latera circa rectum, fiunt quadrati $\frac{4356}{17689}$. & $\frac{5776}{17689}$. à lateribus $\frac{66}{133}$. & $\frac{76}{133}$.

Ceterùm moneo, caſu accidere in hypotheſi Diophanti, vt planus ſub lateribus, puta 12. adſumens 24. ſolidum ſub maiore laterum, interuallo laterum & area contentum, faciat quadratum quod accidit quia interuallum laterum 3. & 4. eſt vnitas; ſed ſi aliud ſumatur triangulum præcedenti ſatisfaciens, id non continget. Quare vt vniuerſalis reddatur operatio Diophanti, in alio triangulo libet rem experiri. Sumatur triangulum per præcedentem inuentum 363 N. 484 N. 605 N fiet area adſumens ſigillatim latera circa rectum 87846 Q. 484 N. & 87846 Q. + 363 N. & vtrumque oportet æquare quadrato. Quare inueniendus eſt quadratus à quo detrahendo 87846. & per reſiduum diuidendo 484. fiat quotiens, cuius quadratum ducendo in 87846. & producto addendo quod fit ex eodem quotiente in 363. fiat quadratus. Et vt rem compendio abſoluam, eò redactus ero vt æquem quadrato 175692 Q. + 5144613144. & numerus quadratorum eſt planus ſub lateribus circa rectum 484. & 363. contentus. At numerus vnitatum eſt ſolidus ſub maiore latere 484 ſub interuallo laterum 121. & ſub area 87846. contentus. Porro vtriuſque numeri ſumma minimè quadratum facit. Sed quia quadrato per quadratum diuiſo fit quadratus, diuido vtrumque numerum per maius laterum circa rectum, puta per 484. qui quadratus eſt ex lege præcedentis, & fit 363 Q. + 10629366. æquandus quadrato. Vbi quoque quadratorum & vnitatum numeri ſimul additi non conficiunt quadratum. Sed quia quadratorum numerus 363. eſt minus laterum circa rectum, at vnitates 10629366. conficiunt planum ſub area 87846. & ſub interuallo laterum 121. (qui quadratus eſt ex lege præcedentis) & ſumma areæ & minoris lateris, conficit etiam quadratum ex eiuſdem præcedentis lege. Patet cùm 363. & 87846. ſimul faciant quadratum, ſi quadratus 121. ducatur in vtrumqne, & productorum ſummam fore quadratum, at ex 121. in 87846. fit 10629366 vt dictum eſt. Igitur ſi & 121. ducatur in 363. & producto adiiciatur 10629366. fit quadratus. Quare per lemma præcedentis à nobis ampliatum 363 Q. + 10629366. infinitis modis æquari poterit quadrato, ſic autem æquari debet quadrato, vt valor quadrati excedat 87846. quia quadratus ille æquari debet 87846 Q. + 484 N. Ponatur ergo quadrati latus 1 N. + 11. fiet ipſe 121 + 22 N + 1 Q. Quo ducto in 363. & producto addendo 10629366. fit 10673289 + 7986 N. + 363. Q. æquandus quadrato, & facilè fit, quia vnitates ſunt quadratæ. Ponatur ergo latus illius 3267 + 19 N. fiet 1 N. 58080. cui addendo 11. fit latus quadrati 58099. ipſe quadratus 3374564281. Igitur 87846 Q. + 484 N. æquabimus 3374564281 Q. & fiet 1 N. $\frac{4}{3374476435}$. per quem reſoluendo latera trianguli quæ poſita erant 363 N. 484 N. 605 N. fiet quæſitum triangulum $\frac{1452}{3374476435}$. $\frac{1936}{3374476435}$. $\frac{2420}{3374476435}$. eius area eſt $\frac{1407916}{[illegible]}$. Quæ adſumens ſigillatim latera circa rectum, facit quadratos $\frac{[illegible]}{[illegible]}$. & $\frac{[illegible]}{[illegible]}$. quorum latera $\frac{203324}{3374476435}$. & $\frac{232364}{3374476435}$.

Supereſt vt moneam loco verborum quæ primò aſteriſcis incluſimus, legi in codice manuſcripto; καὶ ἔστι ὁ ξ ἐκ τετραγώνου τινὸς δυνάμει ἑξηκοντάκις γενόμενον, καὶ προσλαβόντα μονάδας μ̄ γ̄ π̄. καὶ ποιεῖ τετράγωνον. ἐὰν οὖν ἐλάσσω τοῦ ὀρθογωνίου κατασκευάσωμεν, &c. Secundo verò

loco legebatur, ἀπάγεται εἰς τὸ β. ἀριθμοὺς ὄντας τοῦ ἐμβαδοῦ, καὶ τῆς ὑπεροχῆς τὸν τ αὐτῆς ζητεῖν, &c.

QVÆSTIO XIIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ multatus alterutro laterum circa rectum, faciat quadratum. Rursum si constituamus id datum specie sicut in præcedente, eò res redit vt inueniendum sit triangulum rectangulum simile huic 3.4.5. Ponatur ergo in numeris, & fit 3 N. 4 N. 5 N. Et 6 Q. − 4 N. æquantur quadrato. Et si statuamus quadratum minorem quàm 6. fiet 1 N. 4 sub denominatione partis excessus quo 6. superat quadratum aliquem. Et si ponamus quadratum 1 Q. opus erit tali existente numero, æquare etiam quadrato 6 Q. − 3 N. & 1 Q. sexies sumptus est 96. sub denominatione partis 1 QQ. + 36 − 12. Q. lateris autem triplum est 12. sub denominatione partis 6. − 1 Q. hoc est 72 − 12 Q. sub denominatione partis eiusdem, & si hoc auferamus à 96. sub denominatione eiusdem partis, relinquuntur 12 Q. + 24. sub denominatione partis 1 QQ. + 36 − 12 Q. & est pars quadratus. Proinde oportet æquare quadrato 12 Q. + 24. & est 1 N. 1. Pono igitur 6 Q. − 4 N. æquales 1 Q. & fit 1 N. $\frac{4}{5}$. Erunt igitur quæsiti rectanguli latera $\frac{12}{5}$. $\frac{16}{5}$. 4. & si nolis vti vnitate, statue quadrati latus 1 N. + 1. Itaque triplum quadrati adscito 6. fit 3 Q. + 6 N. + 9. æquandus quadrato. Hoc autem facile est, & inuenietur 1 N. non maior quàm $\frac{13}{9}$. At quadrati latus quod est 1 N. + 1. non erit maius quàm $\frac{22}{9}$. Et inde ortus quadratus sublatus de 6. faciet numerum rationalem.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λείψας τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ἐὰν τάξωμεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει ὁμοίως περὶ τούτου ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅμοιον τῷ γ. δ. ε. τετάχθω οὖν ἐν ἀριθμοῖς, καὶ γίνεται ἀριθμῶν γ. ἀριθμῶν δ. ἀριθμῶν ε. καὶ δυ ς. λείψει ςς δ. ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ ἐὰν τάξωμεν τὸν τετράγωνον, ἐλάττονα δυνάμεων ς. ἔρχεται ὁ ς μο δ. ἐν μορίῳ τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ὁ ς. τετραγώνου τινός. καὶ ἐὰν τάξωμεν τὸν τετράγωνον δυ α γίνεται τηλικούτου ὄντος τοῦ ς δυ ς ⋔ ςς γ. ποιεῖν ἴσα τετραγώνῳ. καὶ ἡ μὲν δύναμις ἑξάκις ἐστὶ μο ϟς. ἐν μορίῳ δυ δυ α μονάδες λς λείψει δυ ιβ. τῆς δὲ πλευρᾶς τριπλασίων μο ιβ. ἐν μορίῳ μο ς, λείψει δυ α. τουτέστι μο οβ. λείψει δυ ιβ ἐν μορίῳ τῷ αὐτῷ καὶ ἐὰν ταῦτα αἴρωμεν ἀπὸ μο ϟς. ἐν μορίῳ τῷ αὐτῷ λοιπαὶ εἰσὶ δυ ιβ. μο κδ. ἐν μορίῳ δυ δυ α. μο λς. λείψει δυ ιβ. καὶ ἐστὶ τὸ μόριον τετράγωνος. ὥστε καὶ δεῖ δυ ιβ. μο κδ. ἰσῶσαι τετραγώνῳ καὶ ἐστὶν ὁ ς μο α. τάσσω οὖν δυ ς. λείψει ςς δ. ἴσους δυ α. καὶ γίνεται ὁ ς μο δ ε. ἔσονται οὖν τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου πλευραὶ ιβ ε. ις ε. δ. καὶ ἐὰν μὴ θέλῃς χρήσασθαι μονάδι. τάξον τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ς α. μο α. ὥστε ὁ τετράγωνος ἔσται καὶ μονάδες ς. ποιεῖ δυ γ. ςς ς. μο θ. καὶ ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ποιεῖν ῥᾴδιόν ἐστι, καὶ εὑρεθήσεται ὁ ς οὐ μείζων ιγ θ. ἡ δὲ τετραγώνου πλευρά, ἡ ἐστὶν ς α. μο α ἔσται οὐ μείζων κβ θ. καὶ ὁ ἀπὸ τούτου τετράγωνος ἀρθεὶς ἀπὸ μο ς. ποιεῖ ςν ῥητόν.

IN QVAESTIONEM XIV.

EX adnotatis ad præcedentem, omnium quæ hîc aguntur rationem reddere facillimum est. Mirum fortasse alicui videre possit, cùm in hac quæstione vtendum sit subtractione loco additionis qua vtendum erat in præcedente, cur tamen ad extremum maneat idem numerus 12. Q. + 24. æquandus quadrato. Huius autem symptomatis causa est, contrarietas additionis & subtractionis vnâ cum admixtione contrariorum signorum pluris & minoris. Nam in præcedente opportebat addere 12 Q. − 72. ad 96. in hac autem oportet de 96. subtrahere 72 − 12 Q. Quare euidens est, & summam illam, & hoc residuum, eundem efficere numerum, puta 12 Q. + 24. vnde satis apparet demonstrationes ad præcedentem allatas, & hîc locum habere.

Cæterùm cùm ad æquandum quadrato 12 Q. + 24. oporteat quærere quadratum qui ductus in 12. & adsumens 24. faciat quadratum, sumit Diophantus pro huiusmodi quadrato vnitatem, quod

fieri posse docuimus ad duodecimam, quia 12. & 24. simul conficiant quadratum, & quia talis quadratus sumendus est minor quàm 6. vt æquari possit 6 Q. − 4 N. sic posito quod 6 Q. − 4 N. æquentur 1 Q. fit 1 N. $\frac{4}{5}$. & sunt latera quæsiti trianguli $\frac{12}{5}$. $\frac{16}{5}$. 4. estque area $\frac{96}{25}$. vnde auferendo sigillatim latera circa rectum, supersunt quadrati $\frac{36}{25}$. & $\frac{16}{25}$.

Quod autem ad extremum, ait Diophantus, loco vnitatis, sumi posse alium quadratum, verum est implorando auxilium lemmatis ad duodecimam allati. Id tamen cautè agendum, quia quadratus ille debet esse minor quam 6. Quare sic ratiocinatur Diophantus. Imprimis loco 12 Q. + 24. sumit 3 Q. + 6. cuius rei duplex assignari potest causa. Prima est quod ipsius 12 Q. + 24. sumit quadrantem 3 Q. + 6. suo more, vt rem in minimis conficiat, & euidens est si 3 Q. + 9. æquetur quadrato, fore vt & eius quadruplum 12 Q. + 24. sit quadratus. Secunda causa, quæ mihi magis arridet pendet ex dictis ad duodecimam. Quia enim 12. est planus sub lateribus trianguli per duodecimam inuenti, at 24. est solidus sub maiore laterum, sub interuallo eorundem, & sub area contentus, diuidendo vtrumque per maius laterum circa rectum, puta 4. (qui est quadratus ex lege duodecimæ) fiunt numeri 3. & 9. Quorum prior est minus laterum circa rectum, posterior est planus sub area & interuallo laterum, quare hoc diuiso per interuallum laterum (quod etiam æquatur quadrato ex lege duodecimæ) oritur ipsa area, quæ rursus per duodecimam adscito minore latere facit quadratum. Quamobrem ex vltimo lemmate quod ibidem attulimus, constat 3 Q. + 6. æquari posse infinitis modis quadrato. Ponatur eius latus 1 N. + 1. erit quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. quo ducto in 3. & producto addendo 6. fit 3. Q. + 6 N. + 9. æquandus quadrato, cuius latus fingetur 3 − certo Numerorum numero, sed quia quæsitus quadratus debet esse minor quàm 6. cùm latus proximum ipsius 6. sit $\frac{22}{9}$. oportet latus quadrati quæsiti esse minus quàm $\frac{22}{9}$. Quare cùm ponatur hoc latus 1 N. + 1. si à $\frac{22}{9}$. aufetas vnitatem, remanet $\frac{13}{9}$. quo patet minorem esse debere 1 N. Proinde cùm æquando quadrato 3 Q. + 6 N. + 9. debeat fieri valor Numeri, à quodam quadrato multato ternario, diuidente sextuplum sui lateris auctum senario, si ponatur huiusmodi quadratus 1 Q. fiet $\frac{6\,N. + 6}{1\,Q. - 3}$. minor quàm $\frac{13}{9}$. & tandem fit 54 N. + 54. minor quàm 13 Q. Qua æquatione, vt par est, per approximationem resoluta, fit 1 N. maior quàm 5 $\frac{1}{13}$. Quare numerus Numerorum in latere fictitio ponendus excedere debet 5 $\frac{1}{13}$. Ponatur verbi gratia latus illud 3. − 6 N. fiet 1 N. $\frac{14}{11}$. Quare latus quadrati quæsiti, quod positum erat 1 N. + 1. erit $\frac{25}{11}$. ipse quadratus $\frac{625}{121}$. Proinde 6. Q. − 4 N. statuemus æqualem $\frac{625}{121}$ Q. & fiet 1 N. $\frac{484}{101}$. Quamobrem erit quęsitum triangulum $\frac{1452}{101}$. $\frac{1936}{101}$. $\frac{2420}{101}$. fit area $\frac{1405536}{10201}$. vnde auferendo sigillatim latera circa rectum, manent $\frac{1258884}{10201}$. & $\frac{1210000}{10201}$. quadrati à lateribus $\frac{1122}{101}$. & $\frac{1100}{101}$.

Quod si lubeat vti triangulo 363 N. 484 N. 605 N. fient æquales quadrato 87846 Q. − 484 N. & 87846 Q. − 363 N. & ductum Diophanti sequentes, tandem inueniemus 175692 Q. + 5144613144. æqualem quadrato, & omnia diuidendo per 484. maius laterum circa rectum, quod est quadratum, fiet 363 Q. + 10629366. æqualis quadrato. Quod fieri potest infinitis modis, quia ducendo in 363. quadratum 121 (interuallum scilicet laterum circa rectum) & producto addendo 10629366. fit quadratus. Quia verò oportet quadratum quæsitum minorem esse quàm 87846. sumemus ipsum 121. vel inueniemus alium eodem quo suprà artificio. Quod si sumamus 121. fiet 87846 Q. − 484 N. æqualis 121 Q. vnde fit 1 N. $\frac{4}{725}$. Sunt ergo quæsiti trianguli latera $\frac{1452}{725}$. $\frac{1936}{725}$. $\frac{2420}{725}$. estque area $\frac{1405536}{525625}$. à qua detrahendo sigillatim latera circa rectum, manent quadrati $\frac{352836}{525625}$. & $\frac{1936}{525625}$. quorum latera $\frac{594}{725}$. & $\frac{44}{725}$.

OBSERVATIO D. P. F.

EX nostrâ Methodo soluetur sequens quæstio alioquin difficillima. Inuenire triangulum rectangulum vt alterutrum laterum circa rectum multatum areâ faciat quadratum.

QVÆSTIO XV.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λείψας τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῆς τε ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ἀριθμῶν γ. ἀριθμῶν δ. ςς ε. καὶ πάλιν γίνεται ζητεῖν δυ ς ⋔ ςς ε. ἴσα τετραγώνῳ. καὶ δυ ς λείψει ςς γ. ἴσα τετραγώνῳ. καὶ ἐὰν ποιήσω δυ ς ⋔ ςς γ ἴσα τετραγώνῳ. γίνεται ὁ ς μο γ. ἐν μορίῳ μο ς ⋔ δυ α. καὶ

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ tam hypotenusa quàm altero laterum circa rectum detracto, faciat quadratum. Esto triangulum datum specie 3 N. 4 N. 5 N. & rursus oportet quærere 6 Q. − 5 N. æqualia quadrato, & 6 Q. − 3 N. æqualia quadrato. Et si fecero 6 Q. − 3 N. æqualia quadrato, fit 1 N. 3. sub denominatione partis 6 − 1 Q. & tali

inuento numero, 6 Q. fiunt 54. sub denominatione partis 1 QQ. + 36 − 12 Q. & oportet a 54. sub denominatione partis 1 QQ. + 36 − 12 Q. auferre 90 − 15 Q. sub denominatione eiusdem partis, & reliqua æqualia facere quadrato. Et pars quidem quadratus est. Ergo etiam 15 Q. − 36. æquanda sunt quadrato. Atque hæc quidem impossibilis est æquatio, quia 15. in duos non diuiditur quadratos. Non autem omnino impossibile est quod initiò erat propositum. Oportet ergo determinare de triangulo. Facti sunt enim 15 Q. ex quodam quadrato minore quàm areæ numerus, ducto in productum ex hypotenusa in vnum laterum circa rectum. At quæ desunt vnitates 36. fiunt ex solido contento sub area, & vno laterum circa rectum, & interuallo quo hypotenusa superat idem latus. Eò itaque res deducta est, vt prius oporteat inueniri triangulum rectangulum, & quadratum numerum minorem area, vt quadratus ductus in productum ex hypotenusa in vnum laterum circa rectum, detracto solido contento sub area, prædicto latere, & interuallo quo hypotenusa superat idem latus, faciat quadratum. * Factum esse ex duplo producti eorum, & omnia diuidamus per productum ex hypotenusa in prædictum latus, quæremus rursus alium quendam quadratum, quo ducto in productum ex hypotenusa in vnum laterum circa rectum in primum latus interualli quadratum. * Et si statuamus eos à quibus triangulum effingetur, planos similes, dissoluemus quæstionem. Formetur triangulum abs 4. & 1. At quadratus, vt minor sit numero areæ, esto 36. & formans triangulum statuo illud in numeris 8 N. 15 N. 17 N. & fit numerus areæ detracto vno laterum circa rectum 60 Q. − 8 N. Hæc æquantur 36 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$. Ad positiones. Erit triangulum $\frac{8}{3}$. $\frac{15}{3}$. $\frac{17}{3}$. & manet.

τούτου ἀφαιρεθέντος αἱ δυνάμεις ἓξ γίνονται μ° νδ ἐν μορίῳ δυ. δυ. ᾱ μ° λς ⋔ δυ ιβ. καὶ δεῖ ἀπὸ μ° νδ. ἐν μορίῳ δυ. δυ. ᾱ. μ° λς ⋔ δυ ιβ ἀφελεῖν μ° ϟ ⋔ δυ ιε ἐν μορίῳ τῷ αὐτῷ, καὶ τὰ λοιπὰ ποιεῖν ἴσα τετραγώνῳ. καὶ ἔστι τὸ μόριον τετράγωνος. ὥστε καὶ δυ ιε λείψει μ° λς. ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ αὕτη μὲν ἡ ἰσότης ἀδύνατός ἐστι διὰ τὸ τὸν ιε μὴ διαιρεῖσθαι εἰς δύο τετραγώνους. οὐ πάντως δὲ τὸ ἐξ ἀρχῆς ἀδύνατόν ἐστι. δέον οὖν διορίζεσθαι περὶ τοῦ τριγώνου. γεγόνασι γὰρ αἱ μὲν δυνάμεις ιε. ἔκ τινος τετραγώνου ἐλάσσονος τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸν ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθήν. αἱ δὲ ἐν λείψει μ° λς. ἐκ τοῦ στερεοῦ τοῦ περιεχομένου ἔκ τε τοῦ ἐμβαδοῦ, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, καὶ τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ ὑποτείνουσα τῆς εἰρημένης τῶν ὀρθῶν. καὶ ἀπῆκται εἰς τὸ πρότερον εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ ἐμβαδοῦ, ὅπως ὁ τετράγωνος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν λείψει τοῦ στερεοῦ τοῦ περιεχομένου, ἔκ τε τοῦ ἐμβαδοῦ, καὶ τῆς εἰρημένης τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, καὶ τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ ὑποτείνουσα τὴν εἰρημένην τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ποιῇ τετράγωνον * γεγονέσθαι ἐκ τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν, καὶ πάντα παραβάλωμεν παρὰ τὸν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς προειρημένης μιᾶς τῶν ⁂ ζητήσομεν πάλιν ἄλλον τινὰ τετράγωνον πολλὴν ἐπὶ τὸν ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν τοῦ ἐμβαδοῦ ἐπὶ τὴν πρώτην τῆς ὑπεροχῆς τετράγωνον. * καὶ ἐὰν τάξωμεν τοὺς πλάσσοντας τὸ ὀρθογώνιον ὁμοίους ἐπιπέδους διαλύσομεν τὸ ζητούμενον. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ μ° δ. καὶ μ° ᾱ. ὁ δὲ τετράγωνος ἔστω, ἵνα ἐλάσσων ᾖ τοῦ ἐμβαδοῦ, μ° λς. καὶ πλάσσων τὸ τρίγωνον, πλάσσω αὐτὸ ἐν ςς°ῖς. ἔσται ςς η. ςς ιε. ςς ιζ. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ λείψας τὸν ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν δυ ξ. λείψει ςς η. ταῦτα ἴσα δυ λς. καὶ γίνεται ὁ ς μ° ᾱ γ×. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἄρα τὸ τρίγωνον η γ×. ιε γ×. ιζ γ×. καὶ μένει.

IN QVAESTIONEM XV.

Hîc quod attinet ad primam operationem, cùm ea similis sit omnino operationi duarum præcedentium, nihil est quod nos moretur. Quod autem ait Diophantus 36. esse solidum contentum sub area, vno laterum circa rectum, & interuallo inter hoc & hypotenusam, idem est prorsus cum theoremate ad decimam tertiam demonstrato. Denique quod ait 15 Q. − 36. æquari non posse quadrato quia 15. non diuiditur in duos quadratos, pendet ab iis quæ mox ostensuri su-

mus. Necessitas autem secundæ operationis euidenter colligitur ex defectu prioris. Nam ad hoc vt 15 Q. – 36. possit æquari quadrato, oportet inuenire quadratum quo ducto in 15. & à producto auferendo 36. maneat quadratus. Et cùm quadratus inueniendus æquari debeat 6 Q. – 4 N. curandum est, vt sit minor numero areæ 6. Quia ergo 15. est planus sub hypotenusa & altero laterum, at 36. est solidus sub area, prædicto latere, & interuallo inter idem latus & hypotenusam, euidens est quærendum esse triangulum, & quadratum minorem area trianguli, vt quadrato ducto in productum ex hypotenusa in vnum laterum circa rectum, fiat numerus à quo detrahendo solidum sub area, prædicto latere, & interuallo inter idem latus & hypotenusam, relinquatur quadratus.

Equidem triangulum fingendum esse ait Diophantus à duobus numeris qui sint plani similes; sed qua ratione id colligat, & vnde sumendus sit quadratus, non constat ex corruptissimis illius verbis quæ idcirco asteriscis inclusimus more nostro. Quorum tamen defectum vt ego suppleam, pronuncio, quadratum illum, eum esse qui fit ex quadrato interualli dictorum planorum similium, in quadratum qui fit ex mutua eorundem multiplicatione. Quod vt demonstrem, & simul rei obscurissimæ lucem afferam, aliqua prius suppono.

Primùm suppono, in quolibet triangulo effecto per methodum à Diophanto traditam, quamque demonstrauimus propositione quinta lib. tertij porism. hypotenusam superare quadrato numero, latus illud quod fit bis ex mutua multiplicatione numerorum à quibus effectum est triangulum. Quod euidens est, quia hypotenusa est summa quadratorum, à qua si auferatur duplum multiplicationis laterum, superest quadratus interualli laterum per quartam secundi porismatum.

Secundo suppono, interuallum duorum quadratorum esse maius quadrato interualli laterum, quod ipsum iam demonstrauimus ad sextam secundi.

Tertiò suppono, in triangulo effecto à duobus planis similibus, si excessus hypotenusæ super latus illud quod æquatur interuallo laterum, ducatur in alterum latus, fieri quadratum. Sint enim plani similes A B. quorum quadrati C D. quorum summa E. interuallum F. tum ex A in B fiat H. cuius duplum G. ¹ eritque E F G. triangulum rectangulum. Sit ergo K excessus E super F. & ducto K in G. fiat L. dico L esse quadratum. Quia enim A B sunt plani similes, ² erit H quadratus. Et quia E est summa duorum C D. At F. est eorundem interuallum, detracto F ex E. ³ reliquus K erit duplus ipsius D. Cùm ergo G. K. sint dupli quadratorum H D. sequitur G ad K habere rationem quadrati ad quadratum, ⁴ ac proinde G K sunt plani similes, ⁵ & productus ex eorum mutuo ductu, puta L. quadratus est. Quod demonstrandum erat.

H 16.
A 8. B 2.
C 64. D 4.
E 68. F 60. G 32.
K 8. L 256.

¹ 5. 3. porism.
² 1. noni.
³ 23. 1. porism.
⁴ 36. octaui.
⁵ 5. noni.

His positis, totum quod supponitur à Diophanto, sic demonstrabitur. Sint plani similes A B. à quibus fingatur triangulum C D E. ita vt E sit duplum quadrati K. qui fit ex A in B. At D sit interuallum quadratorum ab ipsis A B. Ductoque K in D. fiat area M. Rursus interuallum ipsorum C E. sit G. quadratus per primum suppositum. quo ducto in quadratum K fiat quadratus H. Item ducto C in E fiat L. quo ducto in H fiat P. & rursus ducto E in M. fiat R. quo ducto in G. fiat Q. Dico si Q. solidus sub area M. altero laterum circa rectum E, & sub G interuallo inter idem latus & hypotenusam, auferatur ab ipso P. qui fit ex quadrato H in L planum sub hypotenusa C & prædicto latere E contentum, residuum esse quadratum, & ipsum quadratum H esse minorem area M. ac denique ipsum L componi ex duobus quadratis. Primùm sic ostendo. Ex E in D producatur N. & ex interuallo ipsorum C D in E. fiat F quadratus per tertium suppositum. Tum consideratis tribus numeris D E K. Quia ex D in K fit M. quo ducto in E fit R. ⁶ fiet idem R. si E ducatur in D. & productus N in K. Igitur R fit ex N in K. Rursus eadem de causa consideratis tribus G K N. Quia ex K in N. fit R vt ostensum est, & ex R in G fit solidus Q. idem Q. fiet ducto K in G. & producto H in N. Igitur Q. producitur ex H in N. At per constructionem ex eodem H in L. fit P. Ergo P. superat Q. numero qui fit ex H in interuallum ipsorum L N. Atqui cùm ex eodem E in ipsos C D. fiant L N. patet etiam L superare N. numero qui fit ex E. in interuallum ipsorum C D. hoc est quadrato F. Igitur P. superat Q. producto ex H in F. sed hic productus est quadratus, cùm vterque H F quadratus sit. Ergo P. superat Q. quadrato numero; quod erat intentum. Deinde quadratum H minorem esse area M. probatur. Etenim cùm ex eodem K in ipsos G D. producantur H M, & D sit maior quàm G per secundum suppositum, constat & ipsum M maiorem esse quàm H. Quod erat propositum.

A 4. B 1.
F 16.
C 17. D 15. E 8.
G 9. H 36. K 4.
L 136. M 60. N 120.
P 4896. Q 4320. R 480.

⁶ 3. 2. porism.

Denique L componi ex duobus quadratis constat ex septima tertij porismatum, quia scilicet producitur ex C in E quorum vterque componitur ex duobus quadratis, puta C ex quadratis ipsorum A B. At E ex duplo quadrati K. vnde etiam per Scholium propositionis citatæ apparet ipsum L. componi tantum semel ex duobus quadratis, quia E non componitur ex quadratis inæqualibus. Sunt autem quadrati ex quibus L componitur, ipse H qui fit ex K in G. & quadratus qui fit ex eodem K in quadratum summæ amborum A B.

Ex

Ex his sanè quæ cum incredibili labore commenti sumus, causa omnium quæ peragit Diophantus fit manifesta. Reliqua operatio nil habet difficultatis, cùm sit penitus similis operationi duarum præcedentium. Eam tamen in studiosorum gratiam non pigebit adiicere. Formatur triangulum à 4. & 1. & constituitur specie, puta 17 N. 15 N. 8 N. fit area multata tum hypotenusa, tum latere tertio 60 Q. − 17 N. & 60 Q. − 8 N. Quare vtrumque æquare oportet quadrato, quod si 60 Q. − 8 N. æquemus quadrato, quærendus erit quadratus quem auferendo à 60. & per residuum diuidendo 8. fiat quotiens cuius quadratum ducendo in 60. & à producto auferendo quod fit ex 17. in supradictum quotientem, remaneat quadratus. Esto quæsitus quadratus 1 Q. hunc auferendo à 60. & per residuum diuidendo 8. fit quotiens $\frac{8}{60 - 1 Q}$ cuius quadratus $\frac{64}{3600 - 120 Q + 1 QQ}$ quo ducto in 60. fit $\frac{3840}{3600 - 120 Q + 1 QQ}$. vnde si auferas productum ex 17. in $\frac{8}{60 - 1 Q}$. puta $\frac{136}{60 - 1 Q}$. seu sub eadem denominatione $\frac{8160 - 136 Q}{3600 - 120 Q + 1 QQ}$. remanet $\frac{136 Q - 4320}{3600 - 120 Q + 1 QQ}$. æquandus quadrato. Quare cum denominator sit quadratus, superest vt numerator 136 Q. − 4320. æquetur quadrato, quod facilè fit, quia ex supra demonstratis quadrato 36. ducto in 136. & à producto auferendo 4320. remanet quadratus. Est ergo 1 Q. 36. Quamobrem 60 Q. − 8 N. æqualis erit 36 Q. & fiet 1 N. $\frac{1}{3}$. erunt igitur trianguli latera $\frac{8}{3}$. $\frac{15}{3}$. $\frac{17}{3}$. fit area $\frac{60}{9}$. vnde auferendo tum $\frac{8}{3}$, tum $\frac{17}{3}$. remanent quadrati $\frac{36}{9}$. seu 4. & $\frac{9}{9}$. seu 1.

Cæterùm quæstio infinitas recipit solutiones, tum quia loco ipsorum 4. & 1. sumi possunt quilibet alij plani similes à quibus effingatur triangulum. Tum quia sumptis iisdem 4 & 1. inueniri possunt infiniti quadrati loco ipsius 36. vel minores ipso 36. vel etiam maiores, qui tamen non excedant aream 60. quibus ductis in 136. & de producto auferendo 4320. relinquatur quadratus, vt docebimus ad sequentem.

QVÆSTIO XVI.

DATIS duobus numeris, si aliquo quadrato in vnum eorum ducto, & altero de producto subtracto, fiat quadratus; inuenietur & alius quadratus maior quadrato prius sumpto, qui hoc idem præstet. Dentur duo numeri 3. & 11. & quadrato aliquo, puta à latere 5. ducto in 3. & à producto detracto 11. fiat quadratus à latere 8. Oporteat inuenire alium quadratum maiorem quàm 25. qui hoc ipsum præstet. Esto latus quadrati 1 N. + 5. fit quadratus 1 Q. + 10 N. + 25. Huius triplum dempto 11. fit 3 Q. + 30 N. + 64. æquale quadrato; sit eius latus 8 − 2 N. & fit 1 N. 62. Est ergo latus 67. quadratus 4489. qui præstat imperata.

ΔΥΟ ἀριθμῶν δοθέντων, ἐὰν τετράγωνός τις πολλαπλασιάσῃ ἐπὶ ἕνα αὐτῶν καὶ λείψας τὸν ἕτερον, ποιῇ τετράγωνον. εὑρίσκεται καὶ ἕτερος τετράγωνος μείζων τοῦ προειρημένου τετραγώνου, ὃς τὸ αὐτὸ ποιῇ. δεδόσθωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅτε γ. καὶ ὁ ια. καὶ τετράγωνός τις ὁ ἀπὸ τοῦ ε. πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν γ. καὶ λείψας τὸν ια. ποιείτω τετράγωνον, τὸν ὄντα ἀπὸ πλευρᾶς μο η. δέον ἔστω ζητεῖν ἕτερον τετράγωνον μείζονα τοῦ κε. τὸ αὐτὸ ποιοῦντα. ἔστω ἡ τετραγώνου πλευρὰ ς α μο ε. ὁ τετράγωνος γίνεται δυ α ςς ι μο κε. ταῦτα τρὶς ⋔ μο ια. γίνονται δυ γ ςς λ μο ξδ. ἴσα τετραγώνῳ ἀπὸ πλευρᾶς μο η ⋔ ςς β. καὶ γίνεται ὁ ς μο ξβ. ἔσται ἄρα ἡ πλευρὰ μο ξζ. ὁ τετράγωνος ͵δυπθ. καὶ οὗτος ποιεῖ τὸ ἐπιταχθέν.

IN QVAESTIONEM XVI.

Hîc omnia sunt perspicua. Cæterùm quod vult Diophantus quadratum quæsitum maiorem esse quadrato exposito, id agit ob sequentem quæstionem, in qua tale quid postulatur, & ad quem hæc est veluti lemma. Sed hoc non est sic accipiendum, quasi verò simili fere operatione, non possimus etiam inuenire quadratum minorem. Sint enim iidem 3. & 11. dati numeri, & quadratus 25. ductus in 3. faciat 75. vnde auferendo 11. supersit quadratus 64. volo reperire alium quadratum minorem ipso 25. qui hoc idem præstet. Pono latus eius 5 − 1 N. erit quadratus 25 − 10 N. + 1 Q. quo ducto in 3. & ex producto auferendo 11. superest 64 − 30 N. + 3 Q. æqualis quadrato. cuius latus ita fingendum est, vt fiat 1 N. minor quàm 5. fiet autem 1 N. ponendo latus fictitium 8 − tot Numeris, de quorum quadrato auferendo 3. per residuum diuidetur sedecuplum ipsorum Numerorum multatum numero 30. Quare si ponatur quæsitus Numerorum numerus 1 N. fiet $\frac{16 N - 30}{1 Q - 3}$. minor quàm 5. & tandem 16 N. minores quàm 5 Q. + 15. quod per se manifestum est, quia quadratus semissis numeri numerorum puta 64. minor est quàm productus ex quadratis in vnitates, puta quàm 75. vnde patet nulla hîc opus esse Numeri determinatione, sed poni potest latus fictitium 8 − quotlibet Numeris, quorum quadratus excedat 3. Ponatur 8 − 2 N. fiet 1 N. 2. Quare latus quadrati quæsiti quod positum erat 5 − 1 N. erit 3. & satisfacit proposito. nam eius quadrato 9. ducto in 3. fit 27. vnde si auferatur 11. remanet quadratus 16.

Qq

Hac ratione, vt iam monui, applicabis hoc lemma præcedenti quæstioni. Nam primo expositis numeris 136. & 4320. quorum altero ducto in quadratum 36. altero de producto sublato, relinquitur quadratus 576. inuenies alium quadratum minorem quàm 36. qui præstet idem. Esto latus illius 6 − 1 N. huius quadratus ductus in 136. & multatus numero 4320. fit 576 − 1632 N. + 136 Q. æquandus quadrato. Verùm latus quæsiti quadrati non solùm debet esse minus quàm 6. sed etiam quia quadratus talis esse debet vt eo ducto in 136. à producto possit auferri 4320. cùm diuiso 4320. per 136. fiat 31. $\frac{13}{17}$. cuius latus ferè est 5 $\frac{1}{2}$. oportet vtique latus quadrati non esse minus quàm 5 $\frac{1}{2}$. at illud positum est 6 − 1 N. quare cùm auferendo 5 $\frac{1}{2}$, à 6 − 1 N. superfit $\frac{1}{2}$ − 1 N. curandum est vtique vt 1 N. fit minor quàm $\frac{1}{2}$. Igitur numeri 576 − 1632 N. + 136 Q. latus ita fingendum est vt prodeat 1 N. minor quàm $\frac{1}{2}$. Quamobrem si modo sæpè alias à nobis vsitato, determinationem quæras numeri Numerorum in latere fictitio ponendorum, inuenies latus fingi debere 24 − tot numeris qui sint plus quàm 34. Ponatur ergo 24 − 62 N. fiet 1 N. $\frac{112}{309}$. quo detracto à 6. manet latus quæsiti quadrati $\frac{1742}{309}$. Ipse ergo quadratus est $\frac{3034564}{95481}$. quo ducto in 136. fit $\frac{412700704}{95481}$. vnde si auferas 4320. vel sub eadem denominatione $\frac{412477920}{95481}$. manet quadratus $\frac{222784}{95481}$. à latere $\frac{472}{309}$.

Deinde si velis adhuc quadratum maiorem quàm 36. sed minorem quàm 60. pone latus illius 6 + 1 N. quadratus ductus in 136. & multatus numero 4320. fiet 576 + 1632 N. + 136 Q. æquandus quadrato. Sed quia valor quadrati debet esse minus quàm 60. cùm latus proximum ipsius 60. sit 7 $\frac{11}{15}$. & ab hoc auferendo latus quadrati quæsiti quod positum est 6 + 1 N. superfit 1 $\frac{11}{15}$ − 1 N. patet 1 N. minorem esse debere quàm $\frac{26}{15}$. Quare si quæras determinationem numeri Numerorum in latere fictitio ponendorum, inuenies latus illud fingi debere 24 − tot Numeris qui excedant 49 $\frac{1}{5}$. Ponatur ergo 24 − 56 N. fiet 1 N. $\frac{36}{25}$. Quare latus quadrati quod positum est 6 + 1 N. erit $\frac{186}{25}$. ipse quadratus $\frac{34596}{625}$ qui vtique minor est quàm 60. eoque ducto in 139. & de producto auferendo 4320. remanet quadratus $\frac{2005056}{625}$. à latere $\frac{1416}{25}$.

QVÆSTIO XVII.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῆς τε ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐὰν τάξωμεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει, πάλιν ἔρχεται ἡμῖν, διορίζεσθαι καὶ ζητεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν μείζονα ὄντα τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ, ὅπως ὁ τετράγωνος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, λείψει τοῦ στερεοῦ περιεχομένου ἐκ τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ, καὶ τῆς προειρημένης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τῆς ὑπεροχῆς, ἧς ὑπερέχει ἡ ὑποτείνουσα τῆς προειρημένης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ποιῇ τετράγωνον. πεπλάσθω οὖν τὸ τρίγωνον ἀπὸ μο δ. καὶ μο α. ὁ δὲ τετράγωνος μο λς. καὶ οὐκ ἔστι μείζων τοῦ ἐμβαδοῦ. ἔχομεν οὖν δύο ἀριθμοὺς, τὸν μὲν ἕνα, τὸν ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, τουτέστι μο ρλς. τὸν δὲ λοιπὸν, τὸν στερεὸν τὸν περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ τῆς προειρημένης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸν ,δτκ. ἐπεὶ οὖν τετράγωνός τις ὁ ὢν μο λς. πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ρλς. καὶ λείψας τὸν ,δτκ. ποιεῖ τετράγωνον. ζητοῦμεν δὲ τὸν τετράγωνον μείζονα εἶναι τοῦ λς. ἐὰν οὖν τάξωμεν αὐτὸν Δυ α ςς ιβ μο λς καὶ ἀκολουθήσωμεν τῇ προδεδειγμένῃ ἀποδείξει εὑρήσομεν ἀπείρους ποιοῦντας

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ tam hypotenusæ quàm alterius laterum circa rectum numero adscito, faciat quadratum. Si statuamus illud datum specie, rursum cogimur determinare, & quærere triangulum rectangulum, & quadratum numerum maiorem areæ numero, vt quadratus ductus in productum ex hypotenusa in vnum laterum circa rectum, detracto solido contento sub area, & prædicto latere circa rectum, & interuallo hypotenusæ suprà prædictum latus, faciat quadratum. Formetur ergo triangulum à 4. & 1. & fit quadratus 36. Sed is non est maior areæ numero. Habemus igitur duos numeros, alterum quidem qui fit ex hypotenusa in vnum laterum circa rectum, nempe 136. alterum verò, solidum contentum sub area, vno laterum circa rectum, & excessu hypotenusæ suprà prædictum latus, nempe 4320. Quoniam igitur quadratus aliquis, puta 36. multiplicatus in 136. & detracto 4320. facit quadratum, quærimus autem quadratum maiorem esse quàm 36. si statuamus ipsum 1 Q. + 12 N. + 36. & superiorem sequamur demonstrationem, inueniemus infinitos quadratos quæstionem soluentes. Quorum vnus erit

676. Statuamus ergo triangulum rectangulum 8 N. 15 N. 17 N. & fiunt 60 Q. + 8 N. æquales 676 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{77}$. Ad positiones.

τὸ πρόβλημα, ὧν εἷς ἔσται ὁ ἀπὸ μ° χος̄. τάξομεν οὖν τὸ ὀρθογώνιον ςς η̄. ςς ιε̄. ςς ιζ̄. καὶ γίνονται δυ ξ̄ μ° η̄. ἴσαι δυ χος̄. καὶ γίνεται ὁ ς ὁ α̅ ος̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

OBSERVATIO D. P. F.

Tentetur beneficio nostra methodi sequens quæstio alioquin difficillima. Inuenire triangulum rectangulum vt tam hypotenusa quam vnum ex lateribus detractâ areâ faciant quadratum.

IN QVAESTIONEM XVII.

Ex adnotatis ad duas præcedentes, omnium quæ hîc aguntur causa fit manifesta. Quare sufficiet integram subiicere operationem. Ponatur triangulum datum specie 8 N. 15 N. 17 N. fiet area 60. Q. cui adiiciendo tum hypotenusam 17 N. tum latus 8 N. fiunt 60 Q. + 17 N & 60 Q. + 8 N. æquandi quadrato. Quod si instituamus æquationem respectu 60. Q. + 8 N. vt etiam valor Numeri alteri numero ritè applicari possit, opportebit inuenire quadratum à quo auferendo 60. & per residuum diuidendo 8. fiat quotiens, cuius quadratus sexagesies sumptus, adscito latere suo decies & septies, faciat quadratum. Esto quadratus quæsitus 1 Q. detracto 60. fit 1 Q. − 60. per quem diuidendo 8. fit $\frac{8}{1Q - 60}$. cuius quadratus $\frac{64}{1QQ - 120Q + 3600}$. qui si ducatur in 60 fit $\frac{3840}{1QQ - 120Q + 3600}$. cui si addatur decies & septies $\frac{8}{1Q - 60}$. hoc est sub eadem denominatione $\frac{136Q - 8160}{1QQ - 120Q + 3600}$. fiet vtique $\frac{136Q - 4320}{1QQ - 120Q + 3600}$ æquandus quadrato. Quare cùm denominator sit quadratus, restat, vt numerator 136 Q. − 4320. æquetur quadrato. Quod facilè fit cùm ex demonstratis ad decimam quintam quadrato 36. ducto in 136. & de producto auferendo 4320. supersit quadratus. Verùm quadratus 36. hîc vsui esse non potest, quia non est maior quàm 60. quod necesse est, cùm quæramus quadratum æquandum cum 60 Q. + 8 N. Igitur implorandum est auxilium præcedentis lemmatis, & inueniendus quadratus maior quàm 36. immò quàm 60. quo ducto in 136. & de producto auferendo 4320. relinquatur quadratus. Ponatur latus quæsiti quadrati 6 + 1 N. fiet quadratus 36 + 12 N. + 1 Q. quo ducto in 136. & de producto auferendo 4320. fit 576 + 1632 N. + 136 Q. æquandus quadrato. Quia autem quadratus quæsitus debet esse maior quàm 60. sumpto quadrato proximè maiore quàm 60. puta 64. cuius latus 8. à quo auferendo 6. remanet 2. patet ita fingendum latus quadrati; vt 1 N. non sit minor quàm 2. Quare si quæras Numeri determinationem inuenies latus fictitium poni debere 24 + tot numeris, qui non excedant 21. ita tamen vt eorum quadratus excedat 136. quales sunt omnes numeri à 12. vsque ad 21. inclusiuè. Ponatur ergo 24 + 16 N. fiet 1 N. 20. Quare latus quadrati est 26. Ipse quadratus 676. æquemus ergo 676 Q. cum 60 Q. + 8 N. fiet 1 N. $\frac{1}{77}$. & latera quæsiti trianguli erunt $\frac{8}{77}$. $\frac{15}{77}$. $\frac{17}{77}$. Area fit $\frac{60}{5929}$. cui si adiiciatur tum hypotenusa, tum primum latus, fiunt quadrati $\frac{1369}{5929}$. & $\frac{676}{5929}$. quorum latera $\frac{37}{77}$. & $\frac{26}{77}$.

QVAESTIO XVIII.

Inuenire triangulum rectangulum, vt acutis eius angulis bifariam scissis, numerus angulum secantis sit rationalis. Ponatur secans angulum bifariam 5 N. vnum verò segmentum basis 3 N. ergo cathetus erit 4 N. Statuatur itaque ab initio basis vnitatum quotcunque quæ trientem habeant. Ac sit 3. erit igitur reliquum basis segmentum 3 − 3 N. sed quoniam angulus bifariam sectus est, & cathetus ad abscissam partem est sesquitertia, erit & hypotenusa ad reliquum basis segmentum, sesquitertia. At positum est reliquum basis segmentum 3 −

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ τῶν ὀξειῶν αὐτοῦ γωνιῶν τμηθεισῶν δίχως, ὁ τῆς τεμνούσης τὴν γωνίαν ἀριθμὸς ᾖ ῥητός. τετάχθω ἡ μὲν τέμνουσα γωνίαν δίχως ςς ε̄. ἡ δὲ μία τομὴ τῆς βάσεως ἀριθμῶν γ̄. ἡ ἄρα κάθετος ἔσται ςς δ̄. τετάχθω δὴ καὶ ἡ ἐξ ἀρχῆς βάσις μονάδων ὅσων δήποτε ἐχουσῶν τρίτον. ἔστω δὴ μ° γ̄. ἔσται δὴ τὸ λοιπὸν τμῆμα τῆς βάσεως μ° γ̄ λείψει ςς γ̄. ἀλλ' ἐπεὶ ἡ γωνία δίχως ἐτμήθη, καὶ ἔστιν ἡ κάθετος ἀποτομῆς ἐπίτριτος, ὥστε καὶ ἡ ὑποτείνουσα τοῦ λοιποῦ τῆς βάσεώς ἐστιν ἐπίτριτος. καὶ τέτακται τὸ λοιπὸν τμῆμα τῆς βάσεως μ° γ̄ ⋔ ςς γ̄. ἡ ἄρα ὑποτείνουσά ἐστι μ° δ̄. λείψει ςς δ̄. λοιπόν ἐστι

τὸν ἀπὸ ταύτης τετράγωνον. τουτέστι Δ^Υ ιϛ μ° ιϛ ⋔ ϛϛ λβ. ἰσῶσαι τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τετραγώνοις. τουτέστι Δ^Υ ιϛ μ° θ. καὶ γίνεται ὁ ϛ° μ° ζ λβ^ων. τὰ λοιπὰ δῆλα. καὶ ἐὰν πάντα λβ. ποιήσω, ἔσται ἄρα ἡ μὲν κάθετος μ° κη. ἡ δὲ βάσις μ° ϙϛ. ἡ δὲ ὑποτείνουσα μ° ρ. ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν μ° λε.

3 N. Igitur hypotenusa erit 4 – 4 N. Restat vt huius quadratus, nempe 16 Q. + 16 – 32 N. æquetur quadratis laterum circa rectum, hoc est 16 Q. + 9. & fit 1 N. $\frac{7}{32}$. & reliqua sunt manifesta. Et si omnia ducam in 32. erit vtique cathetus 28. Basis 96. Hypotenusa 100. At secans angulum 35.

IN QVAESTIONEM XVIII.

Hîc nulla ferè est difficultas. Nam quod ait Diophantus Cathetum ad alterum baseos segmentum eandem habere rationem, quam habet hypotenusa ad alterum eiusdem baseos segmentum, id manifestè infertur ex tertia sexti Euclidis. Sit enim triangulum rectangulum A B C. & ducatur A D secans angulum acutum A bifariam. Quia ergo, vt ostendit Euclides loco citato, se habet A B ad A C. vt B D ad D C. erit & permutando A B ad B D, sicut A C ad C D. Quod est propositum. Itaque sumit Diophantus latera trianguli rectanguli 5. 4. 3. & constituens illud datum specie, applicat lateribus trianguli A D B. fitque A D 5 N. A B 4 N. B D 3 N. Necesse est autem A B statui maiorem quàm B D. quia enim est A B ad B D. vt A C ad C D. sed A C maior est quàm C D. immò quàm tota C B. erit & A B maior quàm B D. Tum verò tota basis C B ponitur quilibet vnitatum numerus qui habeat trientem ad vitandas fractiones, puta 3. Quare fit reliquum segmentum C D. 3 – 3 N. At hypotenusa A C 4 – 4 N. cuius quadratum æquando quadratis laterum circa rectum fit 1 N. $\frac{7}{32}$. Quare A B est $\frac{28}{32}$. B C $\frac{96}{32}$. A C $\frac{100}{32}$. secans verò A D $\frac{35}{32}$. & si omnia multiplices per 32. fient 28. 96. 100. 35. hoc enim licere constat ex prima tertij porismatum. Quod si loco trianguli 5. 4. 3. sumas aliud non simile, aliam reperies solutionem, & in altera proportione inuenies latera triangulorum A C B. A D B. vt manifestum est.

Cæterùm non docet Diophantus quomodo inueniri possit triangulum rectangulum, vt numerus angulum rectum secantis bifariam sit rationalis, quia id est impossibile. Quod sic demonstratur. Esto triangulum rectangulum A B C. rationale, & ducatur A D diuidens angulum rectum A bifariam. Dico A D non esse rationalem. Ducatur enim ab angulo D linea D E. perpendicularis ad latus A C hæc sanè cadet intra triangulum A D C quoniam anguli D A C. D C A

3. sexti. sunt acuti. Itaque [1] quoniam est B A ad A C. sicut B D ad D C erunt & componendo B A. A C. simul ad A C. sicut tota B C ad D C. sed A B. A C sunt rationales, & tota B C rationalis ex hypothesi, ergo &

4. sexti. quarta proportionalis D C rationalis est. Quoniam verò triangula A B C. D E C sunt æquangula, cùm in vtroque sit angulus rectus, & angulus C communis, [2] erit B C ad C A. sicut D C ad C E.

32. primi. Quare cùm B C. C A. D C. sint rationales, erit & quarta C E rationalis, ac per consequens & re-

5. primi. liqua E A. Quia verò ex hypothesi angulus D A E est semirectus, & angulus E rectus, [3] est & re-

47. primi. liquus A D E semirectus. Quare cùm anguli D A E. A D E sint æquales, [4] sunt & æquales lineæ A E. E D. Ac proinde quadratus ipsius A D [5] duplus est quadrati ipsius A E quare cùm A E ostensa sit rationalis, non erit A D rationalis, alioquin dabitur in numeris quadratus quadrati duplus. Quod est impossibile. Vel cùm A D sit diameter quadrati à latere A E, & A E sit rationalis, non erit A D rationalis per vltimam decimi. Quod erat demonstrandum.

Si libet in numeris rem experiri, ponatur A C 28. A B 21. B C 35. reperietur per regulam trium B D 15. D C 20. & rursus C E 16. A E 12. Quamobrem & D E erit 12. Quadratus ergo angulum secantis A D. erit 288. & ipse A D. ℞ 288.

Quoniam verò pleraque non iniucunda problemata proponi possunt ad inueniendum quotlibet triangulum in rationalibus, ita vt vel perpendicularis à quolibet angulo in latus oppositum ducta, vel etiam linea diuidens basim vel angulum bifariam, sit rationalis, operæ pretium fore duxi, ea hoc loco explicare. Equidem aliqua horum iam tentauit vir doctissimus Christophorus Clauius ad duodecimam, & ad decimam tertiam secundi Elementorum, sed præterquàm de sola egit perpendiculari, in vnica tantum proportione propositum absoluit, nec vllam profert demonstrationem. Nos autem & vniuersaliorem methodum proferemus, & omnia demonstrando persequemur, & non solùm de perpendiculari, sed & de linea basim vel angulum secante bifariam nondum vulgata pro

blemata subiiciemus. Sed quoniam, vt professi sumus, nihil quod ab Euclide demonstratum non sit supponere nobis propositum est, ne aliò lectorem amandemus, demonstranda sunt in primis lemmata quæ sequuntur.

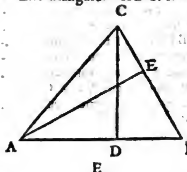
LEMMA PRIMVM.

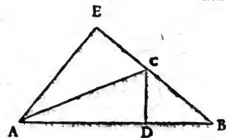
In omni triangulo si duæ perpendiculares à quibuslibet angulis ducantur ad opposita latera, erit vt latus ad latus, ita reciprocè perpendicularis ad perpendicularem.

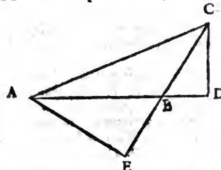
Esto triangulum A B C. & ab angulis C A ducantur in latera opposita A B. C B. perpendiculares C D. A E. dico esse vt latus A B ad latus B C ita reciprocè perpendicularem A E ad perpendicularem C D. Nam vel vtraque perpendicularis cadit intra triangulum vt in prima figura; vel altera cadit intra, altera extra, vt in secunda figura. Vel vtraque cadit extra vt in tertia figura. Vel secunda perpendicularis cadit in ipsum angulum, vnde demittitur prima, vt in quarta figura. & in duobus prioribus casibus vnica est demonstratio. Quia enim triangula C D B A E B sunt æquangula, cùm in vtroque sit angulus rectus, & angulus B communis, [a] erit A B ad A E. sicut C B ad C D. & permutando, erit A B latus, ad latus C B. sicut perpendicularis A E ad perpendicularem C D. Quod erat propositum. At in tertio casu, quoniam etiã triangula C D B. A E B. sunt æquiangula, eo quod in vtroque sit angulus rectus, [b] & anguli ad verticem C B D. A B E. sint æquales, sequitur vt prius esse A B ad A E. sicut C B ad C D. Quare & permutando erit A B latus ad latus C B. sicut perpendicularis A E ad perpendicularem C D. Quamobrem patet propositum.

[a] 4. sexti.

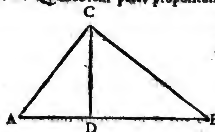
[b] 15. primi.







Denique si perpendicularis A C. cadat in ipsum angulum C. vnde demissa est perpendicularis C D. vt accidit in triangulo rectangulo; erit ob similitudinem triangulorum C A B. C A D. vt latus C B ad latus B A, sic perpendicularis C D. ad perpendicularem C A. & Rursus ob similitudinem triangulorum C A B. C D B. erit vt latus C A ad latus A B. sic perpendicularis C D ad perpendicularem C B. Quod ipsum etiam demonstratum est ab Euclide octaua sexti. Quamobrem ex omni parte patet propositum.



COROLLARIVM.

Hinc sequitur si omnia trianguli latera sint rationalia, & vna perpendicularium rationalis, & reliquas perpendiculares à reliquis angulis demissas, fore rationales.

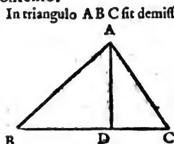
Quia cùm quatuor proportionalium, tres sint rationales, necesse est & quartam esse rationalem.

LEMMA SECVNDVM.

Si à quouis angulo trianguli demittatur in basim perpendicularis, interuallum quadratorum à lateribus angulum comprehendentibus, æquale est rectangulo sub tota basi & interuallo segmentorum basis; vel sub tota basi & aggregato segmentorum basis contento.

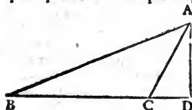
In triangulo A B C sit demissa in basim B C. perpendicularis A D. quæ primò cadat intra triangulum, dico interuallum quadratorum à lateribus A B. A C. æquale esse rectangulo sub tota B C. & interuallo segmentorum B D. D C. comprehenso. Quia enim [a] quadratus ipsius A B. æquatur quadratis ipsarum A D. D B. & quadratus ipsius A C. æquatur quadratis ipsarum A D. D B. erit excessus quadrati A B super quadratum A C. æqualis excessui quadratorum ab ipsis A D. D B. super quadratos ab ipsis A D. D C. & auferendo vtrimque communem quadratum ipsius A D.

[a] 47. primi.



erit interuallum quadratorum ab ipsis B D. D C. æquale interuallo quadratorum ab ipsis A B. A C. 3. 2. peris. Porro interuallum quadratorum ab ipsis B D. C D. [1] æquatur rectangulo sub tota B C. & interuallo ipsorum B D: C D. Igitur & interuallum quadratorum ab ipsis A B. A C. æquatur rectangulo sub tota B C. & sub interuallo ipsarum B D. C D. Quod erat propositum.

Deinde cadat perpendicularis A D. extra triangulum. Dico interuallum quadratorum ab ipsis A B. A C. æquari rectangulo sub basi B C. & sub aggregato segmentorum B D. C D. Nam vt prius, 47. primi. quia [1] quadratus A B. æquatur quadratis ipsarum B D. A D. & quadratus A C. æquatur quadratis ipsarum A D. C D. ablato vtrimque communi quadrato ipsius A D. interuallum quadratorum ab ipsis A B. A C. æquale est interuallo quadratorum ab ipsis B D. C D. At interuallum quadratorum ab ipsis B D. C D. [2] æquatur rectangulo sub B C. interuallo ipsarum B D. C D. & sub aggregato earundem B D. C D. Igitur interuallum quadratorum ab ipsis A B. A C. æquatur rectangulo sub basi B C. & aggregato segmentorum B D. C D. Quod demonstrandum erat. 3. 2. peris.



SCHOLIVM.

Neminem moueat quod in huius propositionis demonstratione citetur tertia secundi porismatum, quam in solis numeris, non autem in lineis proposuimus. Nam vt euidens est, propositio illa aquè benè lineis competit, atque ipsis numeris; cùm illius demonstratio solis propositionibus libri secundi Euclidis innitatur.

Sane ex hoc lemmate pulchra elicitur regula ad inuenienda segmenta basis à perpendiculari facta, si omnia trianguli latera data sint. Sit enim in primo casu A B 30. & A C 26. B C 28. Sumo interuallum quadratorum ab ipsis 30. & 26. puta 224. quem diuido per basim 28. fit quotiens 8. interuallum segmentorum B D. D C. Quare cùm eorundem aggregatum sit 28. Per Canonem prima primi Diophanti facilè inuenientur singula segmenta. Nam addendo & adimendo 8. ipsi 28. fient 36. & 20. quorum semisses 18. & 10. sunt ipsa segmenta B D. D C.

Sit autem in secundo casu A B 30. A C 15. B C 25. sumo interuallum quadratorum ab ipsis 30. & 15. puta 675. quod diuido per 25. prouenit 27. aggregatum segmentorum B D. C D. Quare cum eorum interuallum sit 25. addendo & adimendo 52. ipsi 27. fiunt 52. & 2. quorum semisses 26. & 1. sunt segmenta B D. C D. Ipsa autem operatio pulchrè docet an perpendicularis cadat intra triangulum vel extra. Nam si diuidendo interuallum quadratorum per basim, fiat quotiens minor basi, perpendicularis cadit intra triangulum. Sed si fiat quotiens maior basi, perpendicularis cadit extra triangulum.

COROLLARIVM.

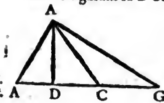
Hinc manifestè sequitur si omnia latera trianguli sint rationalia, & segmenta quoque basis à perpendiculari facta, esse rationalia.

Nam cùm latera angulum comprehendentia erunt rationalia, erit & interuallum quadratorum ab ipsis, rationalis numerus, quo diuiso per basim rationalem, prodibit vel interuallum, vel aggregatum segmentorum basis rationale. Quare & ipsa segmenta rationalia erunt.

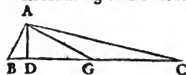
LEMMA TERTIVM.

Si ab angulo acuto demittatur intra triangulum perpendicularis in basim, erit minor proportio cujuslibet segmenti baseos ad perpendicularem, quàm perpendicularis ad aliud segmentum. Sed si ab angulo obtuso demittatur perpendicularis, erit maior proportio cujuslibet segmenti ad perpendicularem, quàm perpendicularis ad aliud segmentum.

Esto triangulum A B C. & angulo acuto B A C. demittatur intra triangulum perpendicularis A D. dico minorem esse proportionem B D. ad D A. quàm D A. ad D C. & è conuerso minorem quoque esse proportionem D C. ad D A. quàm D A ad D B. Ducatur enim ad B A. perpendicularis A G. quæ sanè cadet extra triangulum, quia angulus B A C. ponitur acutus. 8. sexti. Tum ob triangulum rectangulum, [1] erit B D. ad D A. sicut D A. ad 8. quinti. D G. sed eadem D A. ad [2] maiorem D G. habet minorem proportionem, quàm ad minorem D C. Igitur & B D. ad D A. minorem habet rationem quàm D A. ad D C. similiter quia est D G. ad D A. vt D A. ad D B. & D C. minoris, ad D A. minor est proportio, quàm D G. maioris ad eandem D A. erit & minor proportio D C. ad D A quam D A ad D B. Quod est propositum.



Sit autem angulus B A C. obtusus, dico maiorem esse rationem B D. ad D A. quàm D. A ad D C.

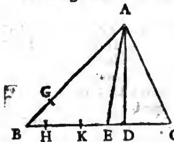


& è conuerso. Nam ducta ad B A. perpendiculari A G. ea quidem cadet intra triangulum ob angulum rectum B A G. minorem obtuso B A C. sed tamen cadet inter D. & C. quia scilicet angulus B A D. acutus est, ac proinde minor recto B A G. Hoc autem posito eadem est prorsus demonstrandi ratio. Quia enim est [1] B D. ad D A. vt D A. ad D G. sed D A. ad D G. [2] maior est proportio, quàm D A. ad D C. erit & B D. ad D A. maior proportio quam D A. ad D C. similiter quia est & D G. ad D A. sic D A. ad D B. sed D C. ad D A. maior est proportio, quàm D G. ad D A. erit quoque D C. ad D A. maior proportio, quàm D A. ad B D. Quod demonstrandum erat. 8. sexti. 8. quinti.

LEMMA QVARTVM.

Si ab angulo acuto vel obtuso demittatur intra triangulum perpendicularis in basim, itemque linea secans angulum bifariam; interuallum laterum angulum comprehendentium, est medium proportionale, inter interuallum segmentorum basis à perpendiculari factorum, & inter interuallum segmentorum quæ fiunt ab angulum secante linea.

Sit triangulum A B C. & in eo angulus B A C. acutus vel obtusus, à quo demittatur perpendicularis A D. itemque linea A E. secans angulum bifariam. Et in maiore latere A B. sumatur A G. æqualis minori lateri A C. ita vt B G. sit interuallum laterum, sumatur etiam in segmento B D, linea K D. æqualis ipsi D C, ita vt B K. sit interuallum segmentorum à perpendiculari factorum. Denique sumatur in B E. linea H E. æqualis ipsi E C. ita vt B H sit interuallum segmentorum à secante angulum factorum, dico B G esse mediam proportionalem inter K B. H B. hoc est esse K B ad B G vt B G ad B H. Quia enim interuallum quadratorum à lateribus A B. A C. [3] æquatur rectangulo sub B C. B K. At idem interuallum quadratorum [4] æquatur rectangulo sub aggregato laterum A B. A C. & interuallo eorundem B G. erit rectangulum sub aggregato A B. A C. & sub B G. æquale rectangulo sub B C. & B K. [5] Igitur est aggregatum ipsarum A B. A C. ad B C. sicut B K. ad B G. [6] Quoniam verò est A B. ad B E. sicut A C. ad C E, [7] erunt & antecedentes simul ad consequentes, hoc est aggregatum ipsarum A B. A C. ad totam B C. sicut A B. ad B E. vel sicut A C. ad C E. Igitur vt A B. ad B E. vel A C. ad C E. sic est B K. ad B G. Cùm ergo A G. sit æqualis ipsi A C. & H E. ipsi E C. erit & A G. ad H E. sicut A B. ad B E. & sicut B K. ad B G. Cùm igitur sit vt tota A B. ad totam B E, sic ablata A G. ad ablatam H E. [8] erit & reliqua B G. ad reliquam B H, sicut A B. ad B E. vel B K. ad B G. Quamobrem est B K. ad B G. sicut B G ad B H. Quod demonstrandum erat. Lemma secundi. 3. 2. poris. 16. sexti. 3. sexti. 11. quinti. 19. quinti.



COROLLARIVM.

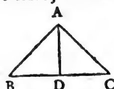
Hinc sequitur primo interuallum segmentorum à perpendiculari factorum, maius esse interuallo eorum quæ fiunt à linea secante angulum, nempe B K maiorem esse quàm B H. Quia est B K ad B G vt A B. A C simul ad B C [9] sed A B. A C. simul sunt maiores quàm B C. ergo & B K maior est quàm B G. ac proinde & B G maior est quàm B H. Quamobrem multo magis B K maior est quàm B H. 20. primi.

Secundò sequitur maius segmentum eorum quæ fiunt à linea secante angulum, puta B E, minus esse maiore eorum quæ fiunt à perpendiculari, puta ipso B D. & contra E C maius esse quàm D C. Quia enim B K maior est quàm B H. erit reliqua K C. minor quàm reliqua H C. quare & horum semisses sumendo, erit D C. minor quàm E C. Igitur E cadit inter B & D. ac proinde B E minor est quàm B D.

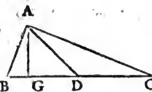
Tertiò, sequitur interuallum E D (quo B D. superat B E. vel quo E C. superat D C) esse dimidium ipsius H K interualli interuallorum. Quia enim vt est H C. ad E C. sic ablatus K C. ad ablatum D C. nam vtrobique est ratio dupla, [10] erit & reliquus H K. ad reliquum E D. in eadem ratione dupla. 19. quinti.

LEMMA QVINTVM.

In triangulo rectangulo, si ab angulo recto ducatur linea diuidens hypotenusam bifariam, erit ducta linea æqualis dimidio hypotenusæ



In triangulo rectangulo A B C. ab angulo recto B A C sit ducta linea A D diuidens B C. bifariam. Dico A D æqualem esse ipsi B D vel D C. Nam sint primo A B. A C æquales. [11] Ergo & anguli A B C. A C B æquales erunt, & [12] quilibet eorum dimidium erit recti, cùm B A C sit rectus. Sed & angulus B A D. est dimidium recti eadem de causa. Igitur cùm in triangulo B A D. anguli B A D. A B D. sint æquales, [13] erunt & latera B D. A D. æqualia. Quod erat propositum. 5. primi. 32. primi. 5. primi.

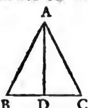


Deinde A B. A C. sint inæquales, sit A C. maior quàm A B. Quia ergo latera A D. D C. trianguli A D C. æqualia sunt lateribus A D. D B trianguli A B D. & basis A C. basi A B maior est, [1] erit angulus A D C. angulo A D B maior. Quare A D C obtusus est, ac proinde perpendicularis A G. cadit inter B & D. ne in eodem triangulo alter angulus sit rectus, alter obtusus [2] & tres anguli trianguli sint duobus rectis maiores. Itaque quia B C Diuisa est bifariam in D. & inæqualiter in G. [3] quadratus semissis D C. æqualis est rectangulo sub B G. G C. & quadrato ipsius G D. At quoniam [4] A G. est media proportionalis inter B G. G C. rectangulum sub B G. G C [5] æquatur quadrato ipsius A G. Igitur quadratus ipsius D C. æquatur quadratis ipsarum A G. G D. [6] sed eisdem quadratis æquatur quadratus ipsius A D. ergo quadrati ipsorum A D. D C. æquales sunt inter se, ac per consequens A D. æquatur ipsi D C. Quod erat demonstrandum.

25. primi. 32. primi. 5. secundi. 8. sexti. 16. sexti. 47. primi.

LEMMA SEXTVM.

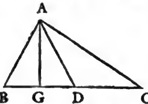
In oxygonio triangulo, linea quæ ducitur ab angulo acuto diuidens basim bifariam maior est dimidio basis.



In triangulo oxygonio A B C. ab angulo acuto B A C. ducta sit A D diuidens basim B C. bifariam, dico A D maiorem esse ipsa B D. vel D C. Nam primo sint A B. A C. æquales, [7] erunt igitur & anguli B C. æquales. Quare cùm A C. C D. æquales sint ipsis A B. B D. & anguli B C. æquales, [8] erunt & reliqui anguli triangulorum A B D. A D C. æquales, & anguli ad D. recti. Itaque si A D. non est maior quàm B D. est vtique vel æqualis, vel minor; si æqualis, [9] erunt & anguli D B A. D A B. æquales, & eadem ratione angulus D A C. æqualis erit angulo C. Quare totus angulus B A C. æquabitur duobus angulis B C. ac proinde [10] cùm tres anguli trianguli A B C. æquentur duobus rectis, erit angulus B A C. rectus contra hypothesim. Si autem A D. ponatur minor quàm B D. [11] erit angulus B minor angulo B A D. & eadem de causa angulus C. minor angulo D A C. Quare totus B A C. maior erit vtroque B. C. simul, ac proinde angulus idem B A C maior erit recto, contrà hypothesim. Quare A D. non est æqualis ipsi B D. nec minor. Igitur maior est. Quod erat propositum.

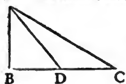
5. primi. 4. primi. 5. primi. 32. primi. 18. primi.

Deinde sit A C. maior quàm A B. Cùm ergo A D. D C. sint æquales ipsis A D. D B. & basis A C. sit maior basi A B. [12] erit angulus A D C. maior angulo A B G. ac per consequens angulus A D C. obtusus est. Quare perpendicularis A G. cadit inter B & D. Itaque quoniam B C. secta est æqualiter in D. & inæqualiter in G. [13] erit quadratus ipsius D C. æqualis rectangulo sub B G. G C. & quadrato G D. sed ob angulum acutum B A C. [14] minor est ratio B G. ad A G. quam ipsius A G. ad G C. ac proinde quadratus ipsius A G. maior est rectangulo sub B G. G C. vt ostendit Clauius ad vigesimam septimi demonstratione, quæ non minus lineis competit quàm numeris. Igitur quadrati ipsarum A G. G D. maiores sunt quadrato ipsius D C. Atqui quadrati ipsarum A G. G D. [15] æquantur quadrato ipsius A D. Ergo quadratus ipsius A D. maior est quadrato ipsius D C. ac proinde A D. maior est quàm D C. Quod demonstrandum erat.



25. primi. 5. secundi. Lemma tertium. 47. primi.

SCHOLIVM.



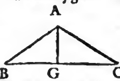
Non minus vera est hac propositio in triangulo rectangulo vel amblygonio, dum linea A D ducatur ab vno acutorum angulorum. Sit enim angulus A B C. rectus vel obtusus, & ducta sit A D. diuidens B C bifariam, dico nihilominus A D. maiorem esse quàm B D. & quidem manifestum est, [16] *cum A D. maiorem angulum B. subtendat.*

17. primi.

LEMMA SEPTIMVM.

In amblygonio triangulo, linea quæ ducitur ab angulo obtuso diuidens basim bifariam, minor est dimidio basis.

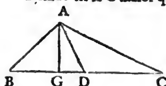
In amblygonio triangulo A B C. ducta sit ab obtuso angulo linea A D diuidens B C. bifariam. Dico A D. minorem esse quàm B D. vel D C. Nam primo A B. A C. ponantur æquales, [17] erunt ergo anguli B. C. æquales, & vt suprà ostendetur angulos ad D. esse rectos. Itaque si A D. non est minor quàm B D. erit vtique vel æqualis, vel maior. Quod si ponatur, [18] ergo angulus B æqualis erit angulo B A D. vel maior & angulus C. angulo D A C. Quare vterque B C simul æquabitur toti B A C. vel maior erit quàm B A C. Quare cùm B A C. sit obtusus, erunt tres anguli trianguli A B C. æquales duobus obtusis, ac proinde maiores duobus rectis. [19] Quod est impossibile. Igitur A D non est æqualis ipsi B D. neque maior. Quamobrem relinquitur vt sit minor. Quod est propositum.



5. primi. 5. primi. & 18. primi. 32. primi.

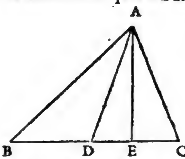
Deinde

Deinde sit A C maior quàm A B. Igitur vt prius ostendetur angulum A D C. obtusum esse, ac proinde perpendicularis A G. cadet inter B & D. Quoniam itaque B C. secta est æqualiter in D. & inæqualiter in G. [1] erit quadratus ipsius D C æqualis rectangulo sub B G. G C. & quadrato ipsius G D. 5. secundi. At quia [2] maior est proportio B G ad A G. quàm A G. ad G C. quadratus ipsius A G minor est rectangulo sub B G. G C. vt ostendit Lemma tertium. Clauius ad vigesimam septimi, demonstratione cuilibet quantitati conueniente. Igitur quadrati ipsarum A G. G D. minores sunt quadrato ipsius D C. sed quadrati ipsarum A G, G D. [3] æquantur quadrato ipsius A D. ergo & quadratus ipsius A D. minor est quadrato ipsius D C. ac proinde A D. minor est quàm D C. Quod demonstrandum fuit. 47. primi.



LEMMA OCTAVVM.

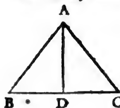
Si à quolibet angulo trianguli ducatur linea diuidens basim bifariam, erunt quadrati laterum dictum angulum comprehendentium, simul dupli quadratorum, tam ex dimidia basi quam ex ducta linea ortorum.

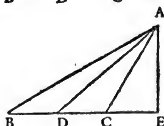


In triangulo A B C. à quolibet angulo A. ducatur A D. diuidens B C. bifariam, dico quadratos simul ipsarum A B. A C. duplos esse quadratorum ab ipsis A D. B D. Nam ducta perpendiculari A E. erunt quadrati ipsarum A B. A C. æquales quadratis segmentorum B E. E C vnà cum duplo quadrati A E. sed quadrati B E. E C. inæqualium segmentorum, [4] dupli sunt quadratorum à dimidia B D. & ab intermedia D E. Igitur quadrati ipsarum A B. A C. dupli sunt quadratorum ab ipsis B D. D E. A E. 9. secundi. Atqui duplum quadratorum ab ipsis D E. A E. [5] æquatur duplo quadrati ipsius A D. Igitùr quadrati ipsarum A B. A C. æquantur duplo quadratorum ab ipsis B D. A D. Quod demonstrandum erat. 47. primi.

SCHOLIVM.

Sic demonstratur hac propositio à Pappo lib. 7. propo. 122. Duo tamen alij casus considerari possunt. Primus, cùm latera A B. A C. sunt aqualia, ac per consequens linea A D. est perpendicularis ad basim; & tunc quia quadrati laterum A B. A C. aquantur quadratis segmentorum B D. D C. & duplo quadrati ipsius A D. at quadrati ipsarum B D. D C. aquales sunt, patet quadratos laterum A B. A C. duplos esse quadratorum ab ipsis A D. B D. Quod est propositum.



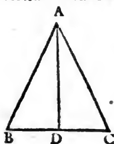


Secundus casus est cùm perpendicularis A E. cadit extra triangulum. Et tunc quia quadrati laterum A B A C. [6] *aquantur quadratis ipsarum B E. C E. & duplo quadrati ipsius A E. & quoniam B C. secta est bifariam in D. & adiecta ei linea C E. ac proinde* [7] *quadrati ipsarum B E. C E. dupli sunt quadratorum ab ipsis B D. D E. patet quadratos laterum A B. A C. duplos esse quadratorum B D. D E. A E. at duplum quadratorum D E. A E. aquatur duplo quadrati ipsius A D. Igitur quadrati laterum A B. A C. dupli sunt quadratorum ab ipsis B D. A D. Ac proinde ex omni parte patet propositum.* 47. primi. 10. secundi.

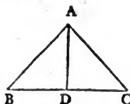
His pramissis sequentia problemata demonstrabimus, omnes triangulorum species persequentes, earum scilicet diuisione tum secundum latera, tum secundum angulos considerata.

PROBLEMA PRIMVM.

Triangulum Isosceles constituere in rationalibus, siue oxygonium, siue amblygonium, vt perpendicularis ab angulo à lateribus æqualibus contento ducta in tertium latus inæquale, sit rationalis.



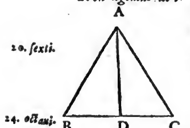
Sit primo constituendum triangulum Isosceles oxygonium A B C. cuius omnia latera sint rationalia, & perpendicularis quoque A D. sit rationalis. Ponatur quodlibet æqualium laterum A B. A C. quilibet numerus, puta 5. & ipsius 5. quadratus 25. diuidatur per octauam secundi Diophanti in duos quadratos, puta 16. & 9. quorum latera 4. & 3. Et quoniam vt constat ex prima parte demonstrationis lemmatis sexti A D. maior est dimidio basis, ponatur A D. 4. D C. 3. erit ergo tota basis B C 6. & factum est quod proponebatur, vt manifestum est.



Deinde sit constituendum triangulum amblygonium Isosceles A B C. cuius omnia latera sint rationalia, & perpendicularis A D. sit rationalis. Ponatur vt prius A B. vel A C. quilibet numerus, puta 5. & ipsius 5. quadratus 25. diuidatur in duos quadratos 16. & 9. quorum latera 4. & 3. Tunc quia per primam partem demonstrationis lemmatis septimi A D. minor est dimidio basis, ponetur A D 3. D C 4. & erit tota basis B C. 8. & factum erit quod requirebatur.

SCHOLIVM.

Non agimus de triangulo æquilatero, quia in eo perfici non potest problema. Sit enim triangulum



æquilaterum A B C. dico si latera illius ponantur rationalia, perpendicularem, A D. esse non posse rationalem quia enim A D. diuidit B C. bifariam, cùm A C. sit dupla ipsius D C. 20. sexti. *' & quadrati sint in ratione duplicata laterum, erit quadratus ipsius A C. quadruplus quadrati ipsius D C. Quare cùm quadrati ipsarum A D. D C. sint æquales quadrato ipsius A C. erit quadratus ipsius A D. $\frac{3}{4}$. quadrati ipsius A C. ac proinde quadratus ipsius A C. ad quadratum ipsius A D. se habebit vt 4. ad 3. Quare si A C. & A D. ponantur rationales 4. ad 3. habebit rationem quadrati ad quadratum,* 24. octaui. *' ac proinde cùm 4. sit quadratus. erit & 3. quadratus. Quod est absurdum. Quamobrem A C. A D. non possunt simul esse rationales, & longitudine commensurabiles.*

Non agimus etiam de triangulo rectangulo Isoscele, ob eandem causam. Etenim si latera A B. A C. ponantur æqualia, & angulus B A C. rectus, erit perpendicularis A D. æqualis dimidio basis D C. vt constat ex prima parte demonstrationis lemmatis quinti. Quare cùm quadratus ex A C. sit quadratis ipsarum A D. D C. æqualis, quadratus ex A C. duplus est quadrati ex A D. & quadratus ex A D ad quadratum ex A C. est vt 1. ad 2. Quare si A D. A C. ponantur rationales habebit 1. ad 2. rationem quadrati ad quadratum, 24. octaui. vltima decimi. *ac proinde cùm 1. sit quadratus ' erit & 2 quadratus. Quod est absurdum. Vel cùm A D. sit latus quadrati, cuius A C. est diameter, ' latus erit commensurabile costæ. Quod est impossibile.*

Porro sic constituto triangulo oxygonio vel amblygonio, non solùm A D. ducta ab angulo à lateribus æqualibus contento, est rationalis, sed & qualibet alia perpendicularis, ducta ab alio angulo, puta B E. vt constat ex Corrollario lemmatis primi. Est enim vt A C. ad B C. sic A D. ad B E. Quare posita A C. 5. B C. 6. A D. 4. inuenietur per regulam trium B E. 4 $\frac{4}{5}$. in triangulo oxygonio. At in amblygonio posita A C. 5. B C. 8. A D. 3. inuenietur rursus per regulam proportionum, B E. 4 $\frac{4}{5}$. Quod semel monuisse sufficiat, vt deinceps quotiescumque constituerimus triangulum quodlibet in rationalibus, & ostenderimus vnam perpendicularium esse rationalem, intelligatur & alias perpendiculares esse rationales. Quod si lubeat & latera omnia trianguli, & perpendiculares exhiberi in numeris integris, oportet omnia multiplicare per communem denominatorem fractionum quæ interueniunt. Vt in dato exemplo, si omnia ducas in 5. fient in oxygonio triangulo A B. A C. 25. B C. 30. A D. 20. B E. 24. At in amblygonio, erit A B. vel A C. 25. B C. 40. A D. 15. B E. 24. Attamen B E. intelligetur cadere extra triangulum.

Potest autem quadrupliciter construi hoc problema. Primo si præscribatur numerus vnius æqualium laterum, vt iam docuimus.

Secundo si præscribatur numerus baseos. Vt si ponatur basis B C. 10. Tunc enim sumpto semisse ipsius 10. puta 5. cuius quadratus 5. quæram pro quadrato perpendicularis, quadratum numerum qui ad 25. additus quadratum faciat. Sed si oxygonium triangulum est constituendum, oportebit huiusmodi quadratum maiorem esse quàm 25. & si vtaris Canone ad vndecimam secundi Diophanti tradito, infinitos tales quadratos reperies. Nam quærendi erunt duo numeri, quorum mutuo ductu fiat 25. ita tamen vt interuallum eorum sit maius quàm 10. quos si arte certa consequi velis, pone minorem 1 N. erit maior $\frac{25}{1N}$. horum interuallum $\frac{25}{1N}$. − 1. N. maior est quàm 10. & omnia ducendo in 1 N. & supplendo defectum, fit tandem 25. maior quàm 1 Q. + 10 N. Quæ æquatione per approximationem resoluta, fit 1 N. non maior quàm 2. sumes ergo pro minore quemlibet numerum qui non excedat 2. quales sunt 1. 1 $\frac{1}{2}$. 1. $\frac{1}{2}$. 2. & infiniti alij. Verbi gratia sume 1. erit maior 25. quorum interuallum 24 cuius semissis 12. erit perpendicularis A D. nam eius quadratus 144. additus quadrato ipsius D C. puta ipsi 25. facit 169. quadratum ipsius A C. Quare A C. vel A B. est 13. B C. 10. A D. 12. Sed si amblygonium triangulum constituendum est, posita vt prius B C. 10. quærendus erit quadratus minor quàm 25. qui ad 25. additus quadratum faciat. Sunt ergo inueniendi duo numeri quorum mutuo ductu fiat 25. ita vt eorum interuallum sit minus quàm 10. quos si ponas vt prius 1 N. & $\frac{25}{1N}$. fiet tandem 25. minor quàm

1 Q. + 10 N. vnde fit 1 N. non minor quàm 2 $\frac{1}{4}$. sumes ergo pro minore quemlibet numerum maiorem quàm 2 $\frac{1}{4}$, dum is sit minor quàm 5. nam si poneretur maior quàm 5. non esset iam minor duorum quæsitorum, sed maior vt euidens est. Sume igitur verbi gratia 2 $\frac{1}{2}$. pro minore, erit maior 10. horum interuallum 7 $\frac{1}{2}$. cuius semissis 3. $\frac{3}{4}$. erit perpendicularis A D. nam eius quadratus $\frac{225}{16}$. additus ad 25. quadratum ipsius D C. facit $\frac{625}{16}$ quadratum ipsius A C. Quare A C. vel A B. est 6 $\frac{1}{4}$. B C. 10. A D. 3 $\frac{3}{4}$. & ducendo omnia in 4. fiet A C vel A B. 25. B C. 40. A D. 15.

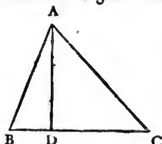
Tertiò, præscribi potest numerus perpendicularis A D. *vt si ponatur 12. tuncque quærendus erit quadratus, pro quadrato ipsius* D C. *qui ad 144. additus quadratum faciat; sed si lubeat oxygonium facere triangulum, quæremus quadratum minorem quàm ipse 144. sin autem amblygonium constituendum sit triangulum, quæremus quadratum maiorem quàm 144. Quod vtrumque, vt prius, perficietur.*

Quartò, denique præscribi potest, numerus perpendicularis B E. *vt pote 24. & tunc sumo hypotenusam cuiuslibet trianguli rectanguli, puta 5. & statuo in Numeris, ponoque quodlibet æqualium laterum* A B. A C. *5 N. & si oportet facere triangulum oxygonium pono semissem basis puta* D C. *minus laterum circa rectum, puta 3 N. erit ergo tota basis 6 N. Quamobrem* [a] *cùm sit vt* B C. *6 N. ad* A C. *5 N. sic* B E. *24. ad* A D. *inuenietur* A D. *20. cuius quadratus 400. cui addendo 9 Q. quadratum ipsius* D C. *fit vtique 400 + 9. Q. æqualis quadrato ipsius* A C. *at idem quadratus est 25. Q. ergo 25. Q. æquantur 400. + 9. Q. & tandem 16 Q. æquantur 400. & fit 1 N. 5. est ergo* A B. *vel* A C. *25.* B C. *30* A D. *20. Sed si constituendum est triangulum amblygonium, posita* A C. *vel* A B. *5 N. vt prius, pono* D C. *maius laterum circa rectum, puta 4 N. ergo tota* B C. *est 8 N. Tunc facio vt 8 N. ad 5. N. ita 24. ad aliud, & fit* A D. *15. cuius quadratus 225. cui addendo 16. Q quadratum ipsius* D C *fit 225 + 16 Q. æqualis 25 Q. quadrato scilicet ipsius* A C. *& tandem 225. æquantur 9 Q. vnde fit 1 N. 5. est ergo* A C. *vel* A B. *25.* B C. *40.* A D. *15. intelligendum tamen* B E *cadere extra triangulum.* *Lemma primum.*

Cæterùm non agimus de segmentis basis à perpendiculari factis, quia cùm triangulum est rationale, & segmenta illa sunt rationalia per corollarium secundi lemmatis.

PROBLEMA SECVNDVM.

Triangulum oxygonium scalenum constituere in rationalibus, vt perpendicularis ab angulo acuto demissa sit rationalis.



Ponatur latus A C. quilibet numerus, vt pote 10. cuius quadratus 100. diuidatur in duos quadratos, vt pote in 64. & 36. quorum latera 8. & 6. & ponatur A D maius horum laterum, puta 8. & D C. minus puta 6. & esto B D. 1 N. quadrati ergo ipsarum B D. A D. puta 1 Q. + 64. æquantur quadrato ipsius A B. Quare vt A B. sit rationalis, oportet 1 Q. + 64. æquari quadrato. Quoniam verò angulus A ponitur acutus [a] est ratio D C ad A D minor ratione A D. ad B D. ac proinde productus ex B D. in D C. puta 6 N. minor est quadrato ipsius A D. qui est 64. vt ostendit Clauius ad vigesimam septimi. Ergo cùm diuidendo 64. per 6. fiat 10. $\frac{2}{3}$. patet 1 N. minorem esse debere quàm 10 $\frac{2}{3}$. Aliter reperietur Numeri determinatio, hac arte scilicet. Quia vt trianguli omnes anguli sint acuti, [b] oportet quadratum cuiuslibet lateris minorem esse aggregato quadratorum ab alijs lateribus. Hoc autem vt sit, oportet quadratum cuiuslibet lateris minorem esse semisse aggregati quadratorum à singulis lateribus, sumo aggregatũ quadratorũ à singulis lateribus, est autem quadratus A C. 100. quadratus B C. 1 Q. + 36 + 12 N. quadratus A B 1 Q. + 64. quorum summa 2 Q. + 200 + 12 N. cuius semissis 1 Q. + 100. + 6 N. quem euidens est maiorem esse tum quadrato ipsius A C. 100. tum quadrato ipsius A B 1 Q. + 64. Restat vt etiam 1 Q. + 100 + 6 N. sit maior quam 1 Q. + 36 + 12 N. Quare ablatis vtrimque æqualibus, oportet vt 64. sit maior quàm 6 N. Quare diuiso 64. per 6. fit 1 N. minor quàm 10. $\frac{2}{3}$. vt prius. Itaque quoniam fingentes latus quadrati 1 Q. + 64. ponemus illud 8. − tot numeris, à quorum quadrato auferendo 1. per residuum diuidatur sedecuplum ipsorum numerorum, oportebit hunc quotientem minorem esse quàm 10 $\frac{2}{3}$. Ponatur ergo numerus Numerorum 1 N. fiet $\frac{16 N}{1 Q - 1}$. minor quàm 10 $\frac{2}{3}$. & omnia ducendo in 1 Q. − 1. & rursus in 3. fient tandem 48 N. + 32. minores quàm 32 Q. seu 3 N. + 2. minores quàm 2 Q. qua æquatione resoluta cùm fiat 1 N. 2. patet fingendum latus quadrati 8. − tot Numeris qui excedant 2. Ponatur 8. − 5 N. fiet 1 N. 3 $\frac{1}{3}$. tanta erit B D. Quare A B est 8 $\frac{2}{3}$. A C 10. B C. 9 $\frac{1}{3}$. A D. 8. *Lemma tertium.* *13. secundi.*

SCHOLIVM.

Hìc etiam loco vnius laterum, præscribi posset ipsa perpendicularis A D. *vt puta 12. Tunc ergo quære duos quadratos qui additi ad 144. quadratum ipsius 12. faciant quadratum, hac tamen lege vt vel vtriusque quæsitorum latus sit minus quàm 12. vel si alterum sit maius alterum minus, maioris ad 12. sit minor ratio, quàm ipsius 12. ad minus vt videlicet constituatur triangulum oxygonium. Quadrati quorum latera minora sunt quàm 12. sunto 81. & 25. Posita ergo* A D *12. erit* B D. *5.* D C. *9. atque adeo tota* B C.

14. At A B. fiet 13. A C. 15. Quadrati verò 256. & 25. ſi ſumantur, quia minor eſt ratio 16. ad 12. quàm 12. ad 5. Ritè ſtatuetur B D. 5. D C. 16. ac proinde tota B C. 21. erit autem A B. 13. A C. 20.

PROBLEMA TERTIVM.

Triangulum amblygonium ſcalenum conſtituere in rationalibus, vt perpendicularis ab angulo obtuſo demiſſa ſit rationalis.

Ponatur A C. vt ſuprà quilibet numerus 10. cuius quadrato in duos quadratos diuiſo, ponatur D C. alterum latus 6. & A D. alterum 8. & ſit B D 1 N. fiet ergo vt prius 1 Q. + 64. æquandus

Lemma tertium. A

B D C

quadrato. Sed quia ob angulum obtuſum maior eſt ratio B D ad A D. quàm A D. ad D C. productus ex B D. in D C. puta 6 N. maior eſſe debet quadrato ipſius A D. 64. Quare 1 N. debet eſſe maior quem $10\frac{2}{3}$. ſi ergo quæras vt ſuprà determinationem numeri Numerorum in latere fictitio ponendorum, inuenies fingendum eſſe latus illud 8. − tot Numeris qui ſint minus quàm 2. ſed oportet etiam vt ſint plus quàm 1. vt videlicet eorum quadratus excedat 1 Q. Pone ergo 8. − $1\frac{1}{2}$ N. fiet 1 N. $19\frac{1}{5}$. tanta erit B D. ergo tota B C. $25\frac{1}{5}$. A B. $20\frac{4}{5}$. A C. 10. A D. 8.

Vel ponatur A D. quilibet numerus vtpote 12. & quærantur duo quadrati, vt quilibet additus ad 144. quadratum ipſius 12. faciat quadratum, ita tamen vt cujuſlibet quæſitorum quadratorum latus ſit maius quàm 12. vel ſi alterum ſit maius, alterum minus, maius ad 12. maiorem habeat rationem, quàm 12. ad minus, ad hoc vt angulus B A C. conſtituatur obtuſus per lemma tertium, ſumi poſſunt maiora latera 35. & 16. nam addito quadrato ex 35. ad quadratum ex 12. fit quadratus ex 37. & eidem addendo quadratum ex 16. fit quadratus ex 20. Poſita ergo A D. 12. erit B D. 16. D C. 35. tota B C. 51. A B. 20. A C. 37. ſi autem ſumantur latera 35. & 9. quia maior eſt ratio 35. ad 12. quàm 12. ad 9. erit B D. 9. D C. 35. tota B C. 44. A C. 37. A B. 15. Vel denique ſi ſumas latera 35. & 5. quia etiam maior eſt ratio 35. ad 12. quàm 12. ad 5. fiet B D. 5. D C. 35. tota B C. 40. A C. 37. A B. 13.

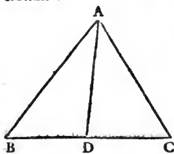
SCHOLIVM.

Animaduerſione dignum eſt, poſita perpendiculari 12. formari poſſe ſex diuerſa triangula in integris, quorum duo ſunt oxygonia quæ in ſcholio præcedentis expoſuimus, nimirum 15. 14. 13. & 21. 20. 13. tria ſunt amblygonia quæ hic attulimus, primum 51. 37. 20. ſecundum 44. 37. 15. tertium 40. 37. 13. Reſtat vnum rectangulum, cuius latera 25. 20. 15. ſi videlicet ſegmenta hypotenuſæ ponantur 9. & 16. inter quæ perpendicularis 12. eſt media proportionalis per octauam ſexti.

Cæterùm non propoſuimus inuenire triangulum rectangulum ſcalenum in rationalibus, vt perpendicularis ab angulo recto demiſſa ſit rationalis. Quia id accidit cuicunque triangulo rectangulo rationali, vt conſtat ex Corollario lemmatis primi, vim ſuam mutuante à quarta parte demonſtrationis ipſius lemmatis.

PROBLEMA QVARTVM.

Triangulum ſcalenum, oxygonium, vel amblygonium conſtituere in rationalibus, vt ab angulo acuto, vel obtuſo ducta linea diuidens baſim bifariam, ſit rationalis.

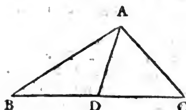


Lemma ſextum.
Lemma octauũ.

Sit triangulum oxygonium A B C. in quo ducta ſit A D. diuidens baſim B C. bifariam. Sume quemlibet numerum ex duobus quadratis compoſitum, vt 13. compoſitum ex 9. & 4. quorum latera 3. & 2. & minus latus 2. tribue dimidio baſis D C. maius verò 3. tribue lineæ A D. quia ſcilicet ob angulum acutum A D. debet eſſe maior quàm D C. Tum verò quia quadrati ipſarum A B. A C. ſunt dupli quadratorum ab ipſis A D. D C. cùm ſumma quadratorum ab ipſis A D. D C. ponatur 13. erit ſumma quadratorum ab ipſis A B. A C. 26. Porrò quia 13. componitur ex duobus quadratis, quorum latera 3. & 2. duplum ipſius 13. puta 26. componetur etiam

7. 2. poriſ. ex duobus quadratis, quorum latera 5. & 1. æqualia ſcilicet tum ſummæ, tum interuallo laterum quadratorum ex quibus 13. componitur. Sed ſi tribuas 5. ipſi A B. & 1. ipſi A C. manifeſtum ſequetur abſurdum. Quia enim A B. ponitur ſumma ipſorum 3. & 2. & A C. eorundem interuallum. At B C ponitur duplum minoris 2. puta 4. patet addendo duplo minoris interuallum numerorum,

20. primi. fieri ſummam numerorum, ac proinde latera A C. B C. ſimul æqualia fore reliquo A B. Quod eſt abſurdum. Supereſt ergo vt numerum 26. compoſitum ex duobus quadratis 25. & 1. rurſus diuidamus in duos alios quadratos per decimam ſecundi Diophanti. Ponatur alterum latus 5 − 1 N. alterum 1 + 2 N. fiet ſumma quadratorum 26 + 5 Q. − 6 N. æqualis 26. vnde fiet 1 N. $\frac{6}{5}$. ſunt ergo quæſita latera $3\frac{4}{5}$. & $3\frac{2}{5}$. Poſita igitur A D. 3. erit A B. $3\frac{4}{5}$. A C. $3\frac{2}{5}$. & B C. 4. vel omnia ducendo in 5. fiet A B. 19. A C. 17. B C. 20. ipſa A D. 15.



Contraria ratione in triangulo amblygonio A B C. statuemus D C. 3 & A D. 2. [1] quia A D. minor est quàm D C. Tum vt prius quia quadrati ipsarum A D. D C. ponuntur 13. [2] erunt quadrati ipsarum A B. A C. 26. qui cùm sit duplus numeri ex duobus quadratis compositi, [3] componetur & ipse ex duobus quadratis, sed maius latus 5. est summa ipsarum A D. B C. & minus latus est interuallum earundem, puta 1. Quare si A B ponas 5. A C. 1. cùm maioris duarum A D. D C. dupla sit B C. si aggregato earundem A D. D C. puta ipsi A B. addas earundem interuallum A C. fiet aggregatum ipsarum A B. A C. [4] æquale ipsi B D. [5] Quod est absurdum. Quare rursus 26. diuidendus est in duos alios quadratos, vt factum est suprà, sint ergo eorum latera $\frac{19}{5}$. & $\frac{17}{5}$. Posita ergo A D. 2. fiet B C. 6. A B. $\frac{19}{5}$. A C $\frac{17}{5}$. vel omnia ducendo in 5. erit A B. 19. A C. 17. B C. 30. A D. 12.

Lemma septimũ. *Lemma octauum.* *7. 2. poris.* *23. 1. poris.* *20. primi.*

SCHOLIVM.

Euidens est tam in oxygonio, quàm in amblygonio ipsas A D. D C. poni posse in qualibet proportione, dum semper habeatur ratio lemmatum 6. & 7.

Deinde sicut prius præscribuntur ipsæ A D. D C. ita possunt prius ipsæ A B. A C. præscribi, vt ex ipsis indagentur A D. D C. verbi gratia ponatur A B. 3. A C. 1. erit summa quadratorum 10. cuius semissis 5. [6] æquatur quadratis ipsarum A D. D C. sed & ipse 5. componitur ex duobus quadratis, [7] quia est semissis numeri ex duobus quadratis compositi, sed latera ipsorum non possunt applicari ipsis A D. D C. ob causas suprà allatas. Quare oportet rursus diuidere 5. in duos alios quadratos, ponantur eorum latera 1 + 7 N. & 2 − 5 N. fiet summa quadratorum 5 + 74 Q. − 6 N. æqualis 5. vnde erit 1 N. $\frac{3}{37}$. Sunt ergo latera quadratorum 1 $\frac{21}{37}$. & 1 $\frac{22}{37}$. Quare posita A B. 3. A C. 1. si libet facere triangulum oxygonium, pones A D. 1 $\frac{22}{37}$. B D. 1. $\frac{21}{37}$. vnde tota B C. fiet 3. $\frac{1}{37}$. At si velis constituere amblygonium, pones A D. 1 $\frac{22}{37}$. B D. 1 $\frac{21}{37}$. totam B C. 3 $\frac{7}{37}$.

Lemma octauũ. *6. 2. poris.*

Moneo tamen si absque vlla cautione numeri ex duobus quadratis compositi, rursus diuidantur in alios duos quadratos per solum artificium decimæ secundi Diophanti, accidere posse vt in idem absurdum incidatur, ad quod vitandum huiusmodi subdiuisio instituitur, vt scilicet inueniantur latera quadratorum quæ minimè possint applicari lateribus trianguli. Quare tutius erit huiusmodi numeros diuidere per artificium duodecimæ quinti, in duos quadratos, quorum exiguum sit interuallum, sic enim in tale incommodum nunquam incurretur.

Cæterùm proposui triangulum scalenum, non autem Isosceles inuenire, quia cùm in triangulo Isoscele linea diuidens basim bifariam, sit perpendicularis ad basim, non differret huiusmodi problema à primo.

Non proposui etiam de triangulo rectangulo scaleno, quia in omni triangulo rectangulo rationali problema perficitur, cùm linea diuidens hypotenusam bifariam sit semper æqualis dimidio hypotenusæ per lemma quintum.

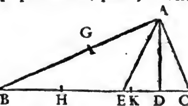
Supersunt elegantissima duo problemata quibus quæritur triangulum tum oxygonium, tum amblygonium, vt acuto vel obtuso angulo bifariam scisso, numerus angulum secantis sit rationalis; quæ sanè magis accedunt ad quæstionem Diophanti, quamuis sint longè subtiliora.

PROBLEMA QVINTVM.

Triangulum oxygonium inuenire in rationalibus, vt numerus angulum acutum bifariam secantis sit rationalis.

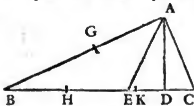
Esto triangulum oxygonium A B C. & ducta perpendicularis A D. & linea A E. secans angulum B A C. bifariam, oportet facere omnia latera trianguli rationalia, & lineam A E. rationalem. Sumatur segmento C D. æquale D K. vt K B. sit interuallum segmentorum à perpendiculari factorum. Item segmento C E. sumatur æquale E H. vt H B. sit interuallum segmentorum à secante angulum factorum. Denique sumatur A G. æqualis ipsi A C. vt B G. sit interuallum laterum A B. A C. Quoniam ergo [8] vt est B K ad B G. sic est B G. ad B H. sumantur tres quicunque numeri proportionales, puta 25. 20. 16. & ponatur B K. 25. B G. 20. B H. 16. & statuatur A C. seu A G. 1 N. erit ergo tota A B 1 N. + 20. ac proinde interuallum quadratorum ab ipsis A B. A C. est 40 N. + 400. quo diuiso per interuallum segmentorum basis à perpendiculari factorum, puta per 25. [9] prodit tota basis B C. $\frac{8}{5}$ N. + 16. cui si addatur & adimatur interuallum segmentorum, puta 25. semissis summæ & residui ostendet ipsa segmenta. Fiet ergo minus segmentum D C. $\frac{4}{5}$ N. − $\frac{9}{2}$. cuius quadratus $\frac{16}{25}$ Q. + $\frac{81}{4}$. − $\frac{36}{5}$ N. qui si auferatur à quadrato lateris A C. puta ab 1 Q. remanet quadratus ipsius perpendicularis. A D. nimirum $\frac{9}{25}$ Q. + $\frac{36}{5}$ N. − $\frac{81}{4}$. cui si addatur quadratus ipsius E D. puta $\frac{81}{4}$. (etenim E D est semissis ipsius H K.

Lemma quartũ. *Lemma secundũ.*



interualli interuallorum BK. BH. vt constat ex Corollario lemmatis quarti. Quare cùm interuallum ipsorum 25. & 16. sit 9. cuius semissis est $\frac{9}{2}$. tanta erit E D. & eius quadratus $\frac{81}{4}$.) fiet quadratus lineæ A E. nimirum $\frac{9}{25}$. Q. + $\frac{36}{5}$. N. Quamobrem vt A E. sit rationalis oportet $\frac{9}{25}$. Q. + $\frac{36}{5}$. æquari quadrato, & omnia in 25. ducantur, tum diuidantur per 9. fit 1 Q. + 20 N. æquandus quadrato, & facilis quidem est æquationis ratio, sed oportet prius determinare de Numero.

13. *secundi.*



Quia enim volumus triangulum A B C. esse oxygonium, necesse est quadratum cuiuslibet lateris, minorem esse aggregato quadratorum à reliquis duobus lateribus, seu quod idem est, oportet semissem aggregati quadratorum à singulis lateribus, maiorem esse quadrato cuiuslibet lateris. Cùm ergo sint tria latera 1 N. 1 N. + 20. $\frac{8}{5}$ N. + 16. erit aggregatum quadratorum à singulis $\frac{114}{25}$ Q. + $\frac{456}{5}$ N. + 656. cuius semissis est $\frac{57}{25}$ Q + $\frac{228}{5}$ N. + 328. qui quidem vt apparet maior est quadrato primi lateris, sed de aliis duobus non statim apparet. Oportet ergo vt $\frac{57}{25}$ Q. + $\frac{228}{5}$ + 328. sit maior quàm 1 Q. + 40 N. + 400. quâ æquatione resoluta fit 1 N. maior quàm $\frac{45}{8}$. Rursus oportet vt $\frac{57}{25}$ Q + $\frac{228}{5}$ N. + 328. sit maior quàm $\frac{64}{25}$ Q. + $\frac{256}{5}$ N. + 256. qua æquatione resoluta, fit 1 N. minor quàm $\frac{63}{7}$. Oportet ergo ita fingere latus quadrati 1 Q. + 20 N. vt fiat 1 N. maior quàm $\frac{45}{8}$. minor quàm $\frac{63}{7}$ Porrò fiet valor Numeri si à quodam quadrato auferatur 1. & per residuum diuidatur 20. Ponatur ergo quadratus quæsitus quo cum instituenda est æquatio 1 Q. fiet $\frac{20}{1 Q - 1}$. maior quàm $\frac{45}{8}$. minor quàm $\frac{63}{7}$. Quare vtraque æquatione resoluta constat quadratum quæsitum maiorem esse debere quàm 3 $\frac{2}{9}$. minorem quàm 4 $\frac{5}{9}$. Ponatur verbi gratia 4. & sint 1 Q. + 20 N. æquales 4 Q. fiet 1 N. $\frac{20}{3}$. latus scilicet A C. erit autem A B $\frac{80}{3}$. B C item $\frac{80}{3}$. segmenta B D. D C. fient $\frac{155}{6}$. & $\frac{5}{6}$. segmenta verò B E. E C. erunt $\frac{64}{3}$ & $\frac{16}{3}$. Ipsa E D $\frac{9}{2}$. Quamobrem à quadrato ipsius A C. hoc est à $\frac{400}{9}$. auferendo quadratum ipsius D C. puta $\frac{25}{36}$. remanet $\frac{1575}{36}$. quadratus perpendicularis A D. cui si addas quadratum ipsius E D. puta sub eadem denominatione $\frac{729}{36}$. fit $\frac{2304}{36}$. seu 64. quadratus lineæ A E. Ac proinde ipsa linea A E. est 8. & rationalis vt requirebatur. Quod si omnia latera per 3. multiplices, habebis omnia in integris, eritque A B. 80. A C. 20. B C. 80. A E. 24.

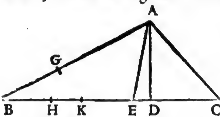
SCHOLIVM.

Non curamus vtrum perpendicularis A D. sit rationalis, an non; cum sufficiat latera trianguli vnà cum linea A E. facere rationalia.

Porrò infinita reperiri possunt hac arte triangula, & quorum latera diuersas seruent rationes, tum quia pro interuallis B K. BG. B H. sumi possunt tres proportionales diuersi ab ipsis 25. 20. 16. & in diuersa ratione, vnde diuersæ contingent solutiones, tum etiam quia quadratus 1 Q. + 20. N. diuersis quadratis æquari potest, cùm inter 3 $\frac{2}{9}$. & 4 $\frac{5}{9}$. infiniti sumi possint quadrati. Verbi gratia si æques 1 Q. + 20. N. cum $\frac{361}{100}$. Q. fiet 1 N. $\frac{2000}{261}$. & si sumas minima similium fiet A B 1805. A C. 500. B C. 1844. A E. 570. segmentum B E. 1444. segmentum E C. 400. & sic de alijs.

PROBLEMA SEXTVM.

Triangulum amblygonium constituere in rationalibus, vt obtuso angulo bifariam scisso, numerus angulum secantis sit rationalis.



Esto triangulum amblygonium A B C. perpendicularis A D. angulum secans A E. interuallum segmentorum B D. D C. à perpendiculari factorum sit B K. interuallum autem segmentorum B E. E C. à secante angulum factorum esto B H. ac denique interuallum laterum A B. A C. sit B G. igitur ob demonstrata lemmate quarto sumemus, vt suprà tres numeros proportionales, vt 25. 20. 16. & statuemus B K. 25. B G. 20. B H. 16. tum posito A C. 1 N. fiet vt prius A B. 1 N. + 20. & B C. $\frac{8}{5}$ N. + 16. Quare tandem inuenietur quadratus ipsius A E $\frac{9}{25}$ Q. + $\frac{36}{5}$. N. Quare omnia ducendo in 25. tum diuidendo per 9. fiet 1 Q. + 20 N. æquandus quadrato. Quoniam verò volumus angulum B A C. esse obtusum, oportet vt quadrati simul, laterum A B. A C. sint minores quadrato baseos B C. Quare 2 Q. + 40 N. + 400. minus esse debet quàm $\frac{64}{25}$ Q. + $\frac{256}{5}$ N. + 256. vnde tandem 144. minor esse debet quàm $\frac{14}{25}$ Q. + $\frac{56}{5}$ N. & re in integris ad minimos deducta fit 1800. minor quàm 7 Q. + 140 N. Qua æquatione vt decet, resoluta, fit 1 N. maior quàm 9. Oportet igitur æquantes quadrato 1 Q. + 20 N. efficere 1 N. maiorem quàm 9. Quamobrem cùm fiat 1 N. quodam quadrato vnitate mulctato, & per residuum diuidendo 20. si ponatur quæsitus quadratus 1 Q. fiet $\frac{20}{1 Q - 1}$. maior quàm 9. & tandem 29. maior quàm 9 Q. Quare oportet quæsitum quadratum, minorem esse quàm 3 $\frac{2}{9}$ Ponatur $\frac{25}{16}$. ergo 1 Q. + 20 N. æquatur $\frac{25}{16}$. Q. & fit 1 N. $\frac{320}{9}$. latus scilicet A C. Quare A B. est $\frac{500}{9}$. B C. $\frac{656}{9}$. segmenta B D. D C. $\frac{881}{18}$ & $\frac{431}{18}$.

At ſegmenta B E. E C. $\frac{400}{9}$ & $\frac{256}{9}$. denique A E fit $\frac{240}{9}$ & ſi ſumas minimos ſimilium, fiet A B. 125. A C. 80. B C. 164. A E. 60.

SCHOLIVM.

Hic etiam perpendicularis curam non agimus, quæ ferè ſemper irrationalis reperitur. Cæterùm ſolutiones diuerſæ totidem modis dari poſſunt, quot in præcedente, & eaſdem prorſus ob cauſas. Sed animaduerſione dignum eſt, plerumque contingere vt linea A E. reperiatur æqualis ipſi lateri minori A C. cùm ſcilicet E D. D C. ſunt æquales, tunc enim, vt patet, triangulum A E D, eſt æquangulum & æquale triangulo A D C. Verbi gratia ſi ponas 1 Q. + 20. N. æquari $\frac{25}{9}$ Q. fiet 1 N. $\frac{45}{4}$. latus ſcilicet A C. & ſi ſumas minima ſimilium, erit A B 125. A C 45. B C. 136. ſegmenta B D. D C. 118. & 18. At ſegmenta B E. E C. 100. & 36. Ipſa denique A E. 45. æqualis ſcilicet lateri A C. Interdum contingit A E. æquari ipſi E C. vt ſi ponas 1 Q. + 20 N. æquari $\frac{16}{9}$ Q. fiet enim 1 N. $\frac{180}{7}$. latus ſcilicet A C. & ſumendo minima ſimilium erit A B. 640. A C. 360 B C. 800. ſegmenta B D. D C. 575. & 225. At ſegmenta B E. E C. 512. & 288. Ipſa denique A E 288. æqualis ſegmento E C.

A

B E D C

Verùm hæc de his dixiſſe ſufficiat, & ſubtilis non minus quàm iucundæ ſpeculationis hic finis eſto. Ad Diophantum redeamus.

QVÆSTIO XIX.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt areæ numerus cum hypotenuſæ numero faciat quadratum, at circumferentiæ numerus ſit cubus. Ponatur areæ numerus 1 N. hypotenuſa verò ſtatuatur vnitatum aliquot quadratarum cum defectu 1 N. Eſto 16 − 1 N. cùm ergo poſuerimus aream 1 N. qui fit ex lateribus circa rectum erit 2 N. Atqui 2 N. producuntur ex 1 N. in 2. ſi ergo alterum circa rectum ſtatuamus 2. erit alterum 1 N. & fiet circumferentia 18. qui non eſt cubus. At 18. ortus eſt è quodam quadrato, & vnitatibus 2. Oportet itaque inuenire quadratum aliquem, qui binario adiecto cubum faciat; ita vt cubus quadratum ſuperet binario. Ponatur igitur quadrati latus 1 N. + 1. At cubi latus 1 N. − 1. fit quadratus quidem 1 Q + 2 N. + 1. At cubus 1 C. + 3 N. − 3 Q. − 1. volo ergo cubum ſuperare quadratum binario. Quare quadratus cum binario, puta 1 Q. + 2 N. + 3. æqualis eſt 1 C + 3 N. − 3 Q. − 1. vnde inuenitur 1 N. 4. eſt igitur quadrati latus 5. cubi vero 3. ipſe quadratus 25. cubus 27. Transmuto itaque rectangulum, & ponens aream illius 1 N. ſtatuo hypotenuſam 25. − 1 N. Manet autem baſis 2. & cathetus 1 N. Reſtat vt

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ, ποιῇ τετράγωνον. ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ κύβος. τετάχθω ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ἀριθμοῦ α. ὁ δὲ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ αὐτοῦ μονάδων τινῶν τετραγωνικῶν λείψει ἀριθμοῦ α. ἔστω μονάδων ις λείψει ἀριθμοῦ α. ἀλλ' ἐπεὶ ὑπεθέμεθα τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ εἶναι ἀριθμοῦ α. ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ γίνεται ἀριθμῶν β. ἀλλὰ ἀριθμοὶ β. περιέχονται ὑπὸ ἀριθμοῦ α. μονάδων β, ἐὰν οὖν τάξωμεν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν μονάδων β. ἔσται ἡ ἑτέρα ἀριθμοῦ α. καὶ γίνεται ἡ περίμετρος μο ιη. καὶ οὐκ ἔστι κύβος. ὁ δὲ ιη. γέγονεν ἔκ τινος τετραγώνου, καὶ μονάδων β. δεήσει ἄρα εὑρεῖν τετράγωνόν τινα, ὃς προσλαβὼν μονάδας β. ποιεῖ κύβον. ὥστε κύβον τετραγώνου ὑπερέχειν μονάσι β. τετάχθω οὖν ἡ μὲν τοῦ τετραγώνου πλευρὰ ς α. μο α. ἡ δὲ τοῦ κύβου ἀριθμοῦ α. λείψει μο α. γίνεται ὁ μὲν τετράγωνος δυ α ςς β μο α. ὁ δὲ κύβος κυ α ςς γ ↑ δυ γ μο α. θέλω οὖν τὸν κύβον τὸν τετράγωνον ὑπερέχειν δυάδι. ὁ ἄρα τετράγωνος μετὰ δυάδος τουτέστι δυ α. ςς β. μο γ. ἴσος ἐστὶ κυ α. ςς γ. ↑ δυ γ. μο α. ὅθεν ὁ ς εὑρίσκεται μο δ. ἔσται οὖν ἡ μὲν τοῦ τετραγώνου πλευρὰ μο ε. ἡ δὲ τοῦ κύβου μο γ. αὐτοὶ ἄρα, ὁ μὲν τετράγωνος μο κε. ὁ δὲ κύβος μο κζ. μεθυφίσταμαι οὖν τὸ ὀρθογώνιον, καὶ τάξας αὐτοῦ τὸ ἐμβαδὸν ἀριθμοῦ α. τάσσω τὴν ὑποτείνουσαν μο κε. λείψει ἀριθμοῦ α. μένει δὲ καὶ ἡ βάσις μο β. ἡ δὲ κάθετος ἀριθμοῦ α. λοιπόν ἐστι τὸν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης

ἴσον εἶναι τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν. γίνεται δὲ Δ^Υ ᾱ. Μ° χκε ⋔ ςς ν̄. ἔσται ἴση Δ^Υ α. Μ° δ̄. ὅθεν γίνεται ὁ ς° Μ° χκα / ν. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. καὶ μένει.

quadratus hypotenusæ æqualis sit quadratis laterum circa rectum. Fit ergo 1 Q. + 625 − 50 N. æqualis 1 Q. + 4. vnde fit $\frac{621}{50}$. Ad positiones. & constat.

OBSERVATIO D. P. F.

AN autem alius in integris quadratus præter ipsum 25. inueniatur qui adsumpto binario cubum faciat. Id sanè difficilis primo obtutu videtur disquisitionis. Certissimâ tamen demonstratione probare possum nullum alium quadratum præter 25. in integris adiecto binario facere cubum. In fractis ex methodo Bacheti supetunt infiniti, sed doctrinam de numeris integris quæ sanè pulcherrima & subtilissima est, nec Bachetus nec alius quiuis cuius scripta ad me peruenerint, hactenus calluit.

IN QVAESTIONEM XIX.

TRIA hic postulantur. Primò vt exhibeatur triangulum rectangulum in numeris rationalibus. Secundò vt area cum hypotenusa faciat quadratum. Tertiò vt ambitus trianguli, hoc est summa trium laterum, sit numerus cubus. Primùm autem, vltimum est quod curat Diophantus, æquando quadratos laterum circa rectum, quadrato hypotenusæ. Reliqua duo postulata præstat ipsis positionibus ingeniosè factis. Nam vt area cum hypotenusa faciat quadratum, posita area 1 N. ponit hypotenusam quadratum aliquem numerum vnitatum cum defectu 1. N. puta 16 − 1 N. Tum verò quia area est semissis plani sub lateribus circa rectum contenti, sequitur planum sub lateribus circa rectum esse 2 N. Quare vt habeantur ipsa latera circa rectum, sumendi duo numeri quorum, mutuo ductu fiant 2 N. Ex infinitis autem huiusmodi numeris seliguntur 1 N. & 2. quia in hypotenusa positus est 1 N. cum signo defectus, ac proinde addendo simul tria latera, eliduntur Numeri, & manet summa laterum, solus vnitatum Numerus, compositus scilicet ex quadrato illo qui positus est in hypotenusa, & ex binario qui ponitur pro altero laterum circa rectum. Cùm ergo summa hæc debeat conficere cubum, apparet necessitas secundæ positionis, qua inuestigatur quadratus qui adsumpto binario cubum creet.

Hoc sanè loco deuoluimur in æquationem complexam, in qua duæ species, duabus speciebus æquales sunt. Cùm enim 1 Q. + 2 N. + 3. æquentur 1. C. + 3 N. − 3 Q. − 1. fiunt tandem 1 C. + 1 N. æquales 4 Q. + 4. Nec verò sciri potest qua ratione huiusmodi æquationem resoluat Diophantus, cùm in libris eius qui extant, nusquam id docuerit. Certè regula generalis & perfecta hactenus ignoratur. Particularis autem quæ in hoc casu locum habet, traditur à multis, & est huiusmodi. Si 1 C. + 1 N. æquentur cuilibet Quadratorum & vnitatum numero, quorum tamen multitudo sit æqualis, fit 1 N. ipse Quadratorum, vel vnitatum numerus. Quod facilè demonstratur. Etenim vt se habet cubus ad quadratum, sic Numerus ad vnitatem. Quare & duo antecedentes simul nempe 1 C. + 1 N. se habebunt, ad consequentes simul, nempe ad 1 Q. + 1 sicut 1 N. ad 1. Quare si quatuor proportionalium sumantur secundi & quarti æquè multiplices, verbi gratia quadruplices, erit & 1 C. + 1 N. ad 4 Q. + 4. sicut 1 N. ad 4. Ac proinde si 1 C. + 1 N. ponantur æquales 4 Q. + 4. erit & 1 N. æqualis 4. Quod erat propositum.

Eadem de causa si 1 C. + 1 Q. æquentur certo Numerorum & vnitatum numero erit 1 Q. æqualis ipsi numero Numerorum vel vnitatum, ac proinde si numerus ille sit quadratus, erit solutio rationalis. Vt si 1 C. + 1 Q. ponantur æquales 9 N. + 9. fiet 1 Q. 9. & 1 N. 3. & ratio est quia 1 C. ad 1 N. se habet vt 1 Q. ad 1.

Necesse igitur fuit tam aptè fingere latus quadrati, & latus cubi, vt tandem prodirent 1 C. + 1 N. æquales quadratis & vnitatibus multitudine æqualibus, vt pote 4 Q. + 4. sed qui ratione certa id fecerit Diophantus, ita vt modus ab illo vsurpatus alijs huiusmodi quæstionibus applicari possit, non constat ex eius verbis, & verò perdifficile arbitror id diuinare. Sit enim propositum quærere quadratum, cui addendo 4. fiat cubus, quomodo quæso fingenda sunt latera quadrati & cubi, vt commoda proueniat æquatio, & solutio sit rationalis? Fateor equidem me ignorare & ei qui tale quid docuerit, non paruam habebo gratiam. Sanè quod propositum est, non est prorsus impossibile, nam non vnus, sed plures quadrati quæstioni satisfacientes possunt inueniri, quales sunt 4. & 121. quorum vtrique si adiicias 4. fiunt cubi 8. & 125. fortuita ergo videtur Diophanti operatio, nisi quis firmiora ad eam fulciendam ponat fundamenta. Et hac ratione operando vnica tantum reperitur solutio, cùm tamen quæstio sit de earum genere quæ plures solutiones admittunt.

Huic

Huic autem vltimo incommodo nostra subueniet industria, tali expedito lemmate.

Dato quadrato qui adsumpto dato numero, cubum faciat, inuenietur alius quadratus idem præstans.

Sit datus quadratus 25. qui adsumpto 2. cubum facit, puta 27. inueniendus est alius quadratus, qui præstet idem. Fingatur eius latus 5 − 1 N. fiet quadratus 25. − 10 N. + 1 Q. cui addendo 2. fit 27. − 10 N. + 1 Q æquandus cubo. Cuius latus fingo 3 − tot Numeris, vt ducti in triplum quadrati ipsius 3. nempe in 27. efficiant 10. habebo autem talem Numerorum numerum diuidendo 10. per 27. estque $\frac{10}{27}$. fingatur ergo latus cubi 3 − $\frac{10}{27}$ N. fiet cubus 27 − 10 N. + $\frac{900}{729}$. Q. − $\frac{1000}{19683}$. C. æqualis 27 − 10 N. + 1 Q. Quare tandem $\frac{19}{81}$. Q. æquantur $\frac{1000}{19683}$. C. & fit 1 N. 4 $\frac{49977}{81000}$. est ergo latus quæsiti quadrati $\frac{31023}{81000}$. ipse quadratus $\frac{962426529}{6561000000}$. cui adiiciendo binarium fit cubus $\frac{14084426529}{6561000000}$. vel in minimis $\frac{2146689}{1000000}$. cuius latus $\frac{129}{100}$.

Simili ratione si datus sit quadratus 4. cui adiiciendo 4. fit cubus 8. inuenietur alius quadratus idem præstans. Etenim pone latus quadrati 2 + 1 N. fiet quadratus auctus quaternario 8 + 4 N. + 1 Q. æquandus cubo. Cuius latus fingatur 2 + tot Numeris, vt ducti in triplum quadrati ipsius 2. puta in 12. faciant 4. erit ergo numerorum numerus $\frac{1}{3}$. & fingatur latus cubi 2 + $\frac{1}{3}$ N. fietque cubus 8 + 4 N. + $\frac{2}{3}$. Q. + $\frac{1}{27}$ C. æqualis 8 + 4 N. + 1 Q. & tandem $\frac{1}{3}$ Q. æquatur $\frac{1}{27}$ C. & fit 1 N. 9. Est ergo latus quadrati 11. ipse quadratus 121. qui adsumpto 4. facit cubum 125.

Hic autem posui latus quadrati 2 + 1 N. non autem 2 − 1 N. quia si posuissem 2 − 1 N. oportuisset latus cubi poni 2 − $\frac{1}{3}$ N. Tuncque in cubo tam Numerorum quàm cuborum numeri affecti fuissent signo minoris. Quare vt in præcedenti exemplo, vnitates quidem & Numeri se mutuo elisissent. At $\frac{1}{27}$ C. in alteram æquationis partem concessisset ob appositum signum defectus. Quamobrem 1 Q. + $\frac{1}{27}$ C. mansissent æquales $\frac{2}{3}$ Q. Quod est impossibile, quia 1 Q. maior est quàm $\frac{2}{3}$ Q. Ad simile vitandum incommodum contraria ratione positiones institui in superiore exemplo, quia videlicet 1 Q. minor erat quàm $\frac{900}{729}$ Q. vnde etiam si dato quadrato 121. alium quæreremus qui adsumpto 4. faceret cubum, poneremus latus quadrati 11 − 1 N. & cubi 5 − $\frac{22}{75}$ N. & inueniremus adhuc alium quadratum diuersum ab ipsis 4. & 121.

Porrò examen operationis Diophanti tale est, fit 1 N. $\frac{371}{30}$. Ergo sit hypotenusa quæsiti trianguli 12. $\frac{19}{30}$. basis 2. cathetus 12 $\frac{11}{30}$. Estque summa laterum cubus 27. At hypotenusa cum area quæ est 12. $\frac{11}{30}$. facit quadratum 25.

QVAESTIO XX.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adscito numero hypotenusæ faciat cubum; At numerus circumferentiæ sit quadratus. Si perinde vt in præcedente areæ numerum constituamus 1 N. numerum vero hypotenusæ vnitatum aliquot cubicarum − 1 N. eò deuenitur vt quærendum sit quis cubus adscito binario faciat quadratum. Ponatur cubi latus 1 N. − 1. fit cubus adiecto binario 1 C. + 3 N. + 1 − 3 Q. æquandus quadrato. Esto quadrato à latere 1 $\frac{1}{2}$ N. + 1. & fit 1 N. $\frac{21}{4}$. erit igitur cubi latus $\frac{17}{4}$. Ipse verò cubus $\frac{4913}{64}$. Pono rursus areæ numerum 1 N. Hypotenusam verò $\frac{4913}{64}$ − 1 N. Habemus autem & basim 2. cathetum verò 1 N. & si æquemus quadratum hypotenusæ, quadraris laterum circa rectum, inueniemus numerum rationalem.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ, ποιῇ κύβον, ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ τετράγωνος. ἐὰν δὴ ὁμοίως τῷ πρὸ τούτου τάξωμεν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ἀριθμοῦ α̅ τὸν δὲ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ μονάδων κυβικῶν λεῖψει ἀριθμοῦ α̅. ἔρχεται ζητεῖν τίς κύβος μετὰ μονάδων β̅. ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ ἀριθμοῦ α. λείψει μονάδος α̅. ὁ κύβος γίνεται μετὰ μονάδων β̅ κύβου α̅. ςς γ. μο α̅. λείψει δυ γ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς α̅. α̅ ∠. μο α̅. καὶ γίνεται ὁ ς μο κα δ. ἔσται ἄρα ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ ιζ δ. αὐτὸς ἄρα ἔσται δϡιγ ξδ. τάσσω πάλιν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ς α̅. τὴν δὲ ὑποτείνουσαν μο δϡιγ ξδ. λείψει ς α̅. ἔχομεν δὲ καὶ τὴν βάσιν μο β̅, τὴν δὲ κάθετον ς α̅. καὶ ἐὰν ἰσώσωμεν τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τετραγώνοις, εὑρήσομεν τὸν ἀριθμὸν ῥητόν.

IN QVAESTIONEM XX.

PARVM differt huius quæſtionis tractatio, à præcedentis tractatione, vt ſatis indicant ipſa Diophanti verba. Pendet itaque ſolutio à lemmate illo, quo quæritur cubus qui adiecto binario, quadratum faciat. Vbi ſubtili ſanè artificio ponitur cubi latus 1 N. — 1. vt in cubo reperiatur — 1. cui adiiciendo binarium fit + 1. Aliter enim, niſi in cubo binario aucto numerus vnitatum eſſet quadratus, non poſſet æquari quadrato. Ponitur autem latus quadrati 1 + tot numeris qui ſint dimidium Numerorum in cubo contentorum, puta $\frac{3}{2}$ N. dimidium de 3. N. vt ſcilicet duplum illorum æquet Numeros in cubo contentos, ſic cùm & vnitates & Numeri multitudine æquales vtrimque ſe mutuo elidant, manet æqualitas inter cubos & Quadratos, puta inter 1 C. & $\frac{13}{4}$ Q. Porrò accidit vt cubo adiiciendo binarium, fiat quadratus, quia 2. componitur ex cubo & ex quadrato. Quare licet pulchrum problema vniuerſaliter proponere.

Dato quouis numero compoſito ex cubo, & ex quadrato, reperietur cubus qui adſumpto dato numero, quadratum faciat.

Sit datus 17. compoſitus ex cubo 8. & ex quadrato 9. quæro cubum qui adſumpto 17. faciat quadratum. Ponatur latus cubi 1 N. — 2. fiet cubus 1 C. + 12 N. — 6 Q. — 8. cui adiiciendo 17. fit 1 C + 12 N. — 6 Q. + 9. æquandus quadrato, cuius latus, pono 3 + tot numeris quorum duplum per 3. multiplicatum, hoc eſt quorum ſextuplum æquet 12 N. in cubo contentos. Fingetur ergo latus quadrati 3 + 2 N. fiet quadratus 9 + 12 N. + 4 Q. æqualis 1 C. + 12 N. — 6 Q. + 9. & fit 1 N. 10. Eſt ergo cubi latus 8. cubus 512. cui adiiciendo 17. fit 529. quadratus à latere 23. Idemque in ſimilibus eadem ſemper ratione perficietur. Nam ſemper latus cubi ponetur 1 N. — latere cubi, ex quo datus numerus componitur, & ſic in cubo huiuſmodi binomij reperietur earumdem vnitatum cubus affectus ſigno minoris, cui addendo datum numerum, fiet vnitatum numerus æqualis quadrato, ex quibus datus numerus componitur.

Poſſet autem lemma Diophanti mutata paulum operatione æquè benè ſolui. Ponatur latus quadrati 1 N. + 1. erit ipſe quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. vnde auferendo binarium, manet 1 Q. + 2 N. — 1. æquandus cubo, cuius latus fingam à tot Numeris — 1. vt eorum triplum æquet 2 N. poſitos in quadrato. Fingam ergo latus cubi $\frac{2}{3}$ N. — 1. & fiet 1 N. $\frac{63}{8}$. Quare latus quadrati vt prius erit $\frac{71}{8}$. latus cubi $\frac{17}{4}$. ſupereſt vt integram quæſtionis ſolutionem exhibeamus, quam omiſit Diophantus ob moleſtas fractiones. Quadratus hypotenuſæ fit $\frac{24137569}{4096}$. + 1 Q. — $\frac{4913}{32}$. N. æqualis quadratis laterum circa rectum, puta 1 Q. + 4. Quare tandem manent $\frac{4913}{32}$. N. æquales $\frac{24121185}{4096}$ Q. & fit 1 N. $\frac{628864}{24121185}$. æqualis areæ, itemque vni laterum circa rectum, alterum verò eſt 2. hypotenuſa denique $\frac{[illegible]}{1543755840}$. quæ addita areæ facit cubum $\frac{4913}{64}$. At ſumma laterum eſt $\frac{5041}{64}$ quadratus à latere $\frac{71}{8}$.

QVÆSTIO XXI.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τετράγωνον. ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ κύβος. τετάχθω τὸ ὀρθογώνιον ἀπὸ ς^ο^ ἰνδὸς ἀορίστου καὶ ἀπὸ τοῦ μονάδι μείζονος αὐτοῦ, ἔστω δὲ ἀπὸ ς^ο^ α. καὶ ἀπὸ ς^ο^ α. μ^ο^ α, ἔσται ἄρα ἡ μὲν κάθετος ςς β. μ^ο^ α. ἡ δὲ βάσις δ^υ^ β. ςς β. ἡ δὲ ὑποτείνουσα δ^υ^ β. ςς β. μ^ο^ α. λοιπόν ἐστι τὴν περίμετρον εἶναι κύβον. τὸν δὲ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μετὰ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ ἡ μὲν περίμετρος δ^υ^ δ ςς ϛ. μ^ο^ β. ἴση κύβῳ. καὶ ἔστι σύνθετος ἀριθμός. περιέχεται γὰρ ἀπὸ ςς δ. μ^ο^ β. καὶ ς^ο^ α. μ^ο^ α. ἐὰν οὖν ἑκάστην πλευρὰν μερίσωμεν παρὰ ς^ο^ α. μ^ο^ α. ἕξομεν τὴν περίμετρον αὐτοῦ ςς δ. μ^ο^ β. ἴσην κύβῳ, λοιπὸν ἄρα τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ μετὰ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιεῖν τετρά-

INVENIRE triangulum rectangulum; vt numerus areæ adſcito vno laterum circa rectum, faciat quadratum, at circumferentiæ numerus ſit cubus. Statuatur triangulum ab aliquo numero indefinito, & ab alio qui eum vnitate ſuperet. Eſto itaque ab 1 N. & ab 1 N. + 1. Erit igitur cathetus 2 N. + 1. Baſis 2 Q. + 2 N. hypotenuſa 2 Q. + 2 N. + 1. Reſtat vt circumferentia ſit cubus, & numerus areæ cum vno laterum circa rectum faciat quadratum. Fit autem circumferentia 4 Q. + 6 N. + 2. æqualis cubo. Et eſt numerus compoſitus quem metitur 4 N. + 2. per 1 N. + 1. ſi ergo vnumquodque latus partiamur per 1 N. + 1. habebimus circumferentiam 4 N. + 2. æqualem cubo. Reſtat igitur vt areæ numerus adſcito vno laterum circa rectum faciat qua-

dratum. Fit autem areæ numerus 2 C. + 3 Q. + 1 N. sub denominatione partis 1 Q. + 2 N. + 1. vnum verò laterum circa rectum 2 N. + 1. sub denominatione partis 1 N. + 1. & si hæc duo ad eiusdem denominationis partem reducamus, fiunt 2 C. + 5 Q. + 4 N. + 1. sub denominatione partis 1 Q. + 2 N. + 1. & si partiamur in denominatorem partis fiunt 2 N. + 1. Ita vt duo hæc composita faciant 2 N. + 1. æqualia quadrato. Quærebamus autem etiam 4 N. + 2. æqualia cubo. Igitur eô deducta res est, vt inueniamus cubum quadrati duplum. Est autem 8. respectu 4. sint igitur 4 N. + 2. æquales 8. & fit 1 N. 1 $\frac{1}{2}$. Erit ergo rectangulum $\frac{8}{5}$. $\frac{15}{5}$. $\frac{17}{5}$. & manet.

γωνον. γίνεται δὲ ὁ μὲν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ κ^υ β̄. δ^υ γ̄. ς^ο ᾱ. ἐν μορίῳ δ^υ ᾱ. ςς β̄. μ^ο ᾱ. ἡ δὲ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ςς β̄ μ^ο ᾱ ἐν μορίῳ ς^ο ᾱ μ^ο ᾱ, καὶ ἐὰν ποιήσωμεν τὰ δύο εἰς τὸ αὐτὸ μόριον γίνονται κ^υ β̄. δ^υ ε̄. ςς^οι δ̄. μ^ο ᾱ. ἐν μορίῳ δ^υ ᾱ ςς β̄ μ^ο ᾱ. ἐὰν δὲ μερίσωμεν παρὰ τὸ μόριον, γίνεται ςς^οι β̄ μ^ο ᾱ. ὥστε τὰ δύο συντεθέντα ποιεῖν ςς^ους β̄ μ^ο ᾱ. ἴσα τετραγώνῳ. ἐζητοῦμεν δὲ καὶ ςς^ους δ̄ μ^ο β̄. ἴσους εἶναι κύβῳ. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν κύβον τετραγώνου διπλασίονα. ἔστι δὲ ὁ η̄. μονάδων δ̄. ἔστω ἄρα ςς^οι δ̄ μ^ο β̄. ἴσοι μ^ο η̄. καὶ γίνεται ὁ ς^ο ᾱ. ᾱ^ς. ἔσται ἄρα ὀρθογώνιον η^ε. ιε^ε. ιζ^ε. καὶ μένει.

IN QVAESTIONEM XXI.

PVLCHERRIMVM problema, & raræ subtilitatis, quod vt perfectè explicetur aliqua sunt supponenda, nimirum.

Primò datis duobus numeris planus bis sub ipsis contentus, summa quadratorum, & interuallum eorundem, æquantur simul producto ex duplo summæ numerorum in maiorem numerum.

C 14.
A 3. B 4.
D 9. E 16.
F 25. G 7.
H 24.

Sint dati duo numeri A minor B maior, & duplum summæ illorum esto C. at quadrati eorundem D. E. quorum summa F. interuallum G. Ac demum sit H. duplum plani sub A. B. contenti. Dico tres numeros F. G. H. simul, æquari producto ex C in B. Quoniam enim F est summa duorum D E. & G eorundem interuallum, [a] erunt F G simul æquales duplo maioris E. Cùm ergo ex B in seipsum fiat E, patet ex B. in duplum sui, fieri numerum æqualem ipsis F G. simul. At ex eodem B. in duplum ipsius A fit H. Ergo ex B. in duplum summæ ipsorum A B. hoc est in C. fit numerus æqualis tribus F. G. H. simul. Quod erat intentum. *a 23. 1. perism.*

Secundò. Datis duobus numeris vnitate distantibus, interuallum quadratorum ab ipsis æquatur summæ datorum numerorum. Etenim [b] ex interuallo numerorum, in summam ipsorum, fit interuallum quadratorum. Quamobrem si interuallum numerorum sit vnitas, patet ex vnitate in summam numerorum, produci summam ipsam numerorum, pro interuallo quadratorum. *b 4. 2. perism.*

Tertiò. Datis duobus numeris vnitate distantibus, si maiori eorum addatur planus sub ipsis contentus, fiet quadratus maioris.

A . . . B. C.

Sint enim duo numeri A B. A C. quorum interuallum sit vnitas B C. dico si plano sub A B. A C. addatur A C. produci quadratum ipsius A C. Etenim [c] quadratus ipsius A C. æquatur planis sub A C. A B. & sub A C. B C. contentis. At planus sub A C. & sub vnitate B C. æquatur ipsi A C. ergo A C. cum plano sub A C. A B. æquatur quadrato ipsius A C. Quod erat demonstrandum. *c 2. secundi.*

Quartò. In similibus triangulis si area primi multiplicetur per quadratum denominatoris proportionis laterum, producitur area secundi. Etenim [d] areæ sunt in duplicata ratione laterum sed denominator rationis quæ alterius sit duplicata, est quadratus denominatoris prioris rationis, [e] quoniam & quadrati sunt in ratione duplicata laterum. Igitur patet propositum. *d 3. perism.* *e 11. octaui.*

His positis nullo negotio explicatur operatio Diophanti. Nam fingatur triangulum ab 1 N. & 1 N. + 1. est hypotenusa summa quadratorum, nimirum 2 Q. + 2 N. + 1. Alterum latus est interuallum eorundem quadratorum, nempe 2 N. + 1 Alterum denique est duplum producti, puta 2 Q. + 2 N. Quorum summa fit 4 Q. + 6 N. + 2. quæ si diuidatur per 1 N. + 1. maiorem numerorum à quibus effictum est triangulum, fiet quotiens duplum summæ numerorum, puta 4 N. + 2. per primum suppositum. Vt igitur numerus æquandus cubo sit simplicior, & expeditior æquatio, ab inuento triangulo formatur aliud simile, diuidendo scilicet singula illius latera per 1 N. + 1. sic enim summa trium laterum fit 4 N. + 2. æquanda cubo.

Area verò per quartum suppositum, fiet si area prioris trianguli puta 2 C. + 3 Q. + 1 N. diuidatur per quadratum ipsius 1 N. + 1. videlicet per 1 Q. + 2 N. + 1. hinc est quod huiusmodi aream esse ait Diophantus $\frac{2C. + 3Q. + 1N.}{1Q. + 2N. + 1.}$ cui vt addatur alterum latus, nempe $\frac{2N. + 1.}{1N. + 1.}$ omnia facienda eiusdem denominationis, ducendo scilicet 2 N. + 1. in 1 N. + 1. vnde fit 2 Q. + 3 N. + 1. quo ad-

dito supradictæ areæ sub denominatione eiusdem partis, fit $\frac{2\ C. + 5\ Q. + 4\ N. + 1}{1\ Q. + 2\ N. + 1}$. Hæc autem fractio reducitur ad integros, quia denominator metitur numeratorem. Quod ita probo. Numerator componitur ex duobus numeris, puta ex 2 C. + 3 Q. + 1 N. area prioris trianguli, & ex 2 Q. + 3 N. + 1. qui factus est ex 2 N. + 1. in 1 N. + 1. Prior itaque numerus, nempe area prioris trianguli, fit ex interuallo quadratorum à numeris à quibus formatum est triangulum, in planum sub ipsis numeris contentum, hoc est ex 2 N. + 1. in 1 Q. + 1 N. Posterior verò numerus fit ex eodem interuallo quadratorum 2 N. + 1. in maiorem numerorum à quibus effictum est triangulum, puta in 1 N. + 1. fiet ergo totus numerator ex 2 N. + 1. in summam ipsorum 1 Q. + 1 N. & 1 N. + 1. At cùm 1 Q. + 1 N. sit planus contentus sub numeris vnitate distantibus, & horum maior sit 1 N. + 1. patet per tertium suppositum, horum summam æquari quadrato ipsius maioris, puta 1 Q. + 2 N. + 1. Quamobrem constat supradictum numeratorem produci ex 2 N. + 1. in ipsum denominatorem 1 Q. + 2 N. + 1 Quare diuiso numeratore per denominatorem, fiet quotiens 2 N. + 1. æquandus vtique quadrato, est autem hic quotiens subduplus ad priorem quotientem 4 N. + 2. qui æquandus est cubo. Etenim 4 N. + 2. vt suprà ostensum est, est duplum summæ numerorum 1 N. & 1 N. + 1. at 2 N. + 1. est interuallum quadratorum ab ipsis. Porrò interuallum quadratorum æquatur summæ numerorum per secundùm suppositum, quia numeri vnitate differunt. Ergo duplum summæ numerorum est duplum interualli quadratorum.

Iam igitur cùm habeamus 4 N. + 2. æquandum cubo, & 2 N. + 1. æquandum quadrato, patet quærendum esse cubum quadrati duplum, cuiusmodi infinitos reperiri posse docuimus ad primam huius. Sumit Diophantus cubum 8. & quadratum 4. æquatque 4 N. + 2 ipsi 8. vel 2 N. + 1. ipsi 4. & fit vtrobique 1 N. $\frac{3}{2}$. Quare latera prioris trianguli fiunt $\frac{17}{2}$. $\frac{15}{2}$. $\frac{8}{2}$. sed cùm omnia diuidi debeant per 1 N. + 1. puta per $\frac{5}{2}$. fiunt vtique quæsiti latera trianguli $\frac{17}{5}$. $\frac{15}{5}$. $\frac{8}{5}$. estque area $\frac{12}{5}$. cui addendo latus $\frac{8}{5}$. fit quadratus $\frac{20}{5}$. seu 4. At circumferentia est $\frac{40}{5}$. seu 8. cubus.

Cæterùm posset prius triangulum fingi etiam à 2 N. & 2 N. + 1. vel à 3 N. & 3 N. + 1. & sic à quolibet Numerorum numero, & altero, vnitate illum superante. Sed eadem semper solutio continget, si cubus & quadratus quibus cum vltima æquatio instituitur, iidem semper sumantur. Possunt autem alij cubi & quadrati infiniti reperiri in eadem ratione 2. ad 1. per Canonem traditum ad primam huius, dum obseruetur, cubum maiorem esse debere quàm 2. & quadratum maiorem esse oportere quàm 1. quia scilicet cubus æquandus est 4 N. + 2. & quadratus æqualis faciendus 2 N. + 1. Id autem contingit, si operando per dictum Canonem, sumatur quilibet cubus minor vnitate, per quem diuidatur 2. denominator rationis datæ. Verbi gratia si sumas $\frac{1}{8}$. & per eum diuidas 2. fiet 16. latus quadrati quæsiti, nam quadratus est 256. cuius duplum 512. est cubus. Vnde apparet ex hoc capite quæstionem infinitas recipere solutiones. Nam si loco ipsorum 8. & 4. sumas 512. & 256. fiet 1 N. $\frac{255}{2}$. & diuersa continget solutio, vt potes experiri.

QVÆSTIO XXII.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ᾖ κύβος, ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ τετράγωνος. πάλιν ἐὰν τῇ αὐτῇ ἀγωγῇ χρησώμεθα τῇ πρὸ τούτου ἀπάγεται εἰς τὸ ς οἱ δ. μ° β. ποιεῖν ἴσα τετραγώνῳ, καὶ ς οἱ β. μ° α. ἴσα κύβῳ. καὶ γίνεται ζητεῖν τετράγωνον κύβου διπλασίονα. ἔστιν ις. καὶ η. καὶ πάλιν ἰσάζομεν μ° ις. ἀριθμοῖς δ. μ° β. καὶ γίνεται ὁ ς μ° γ. α΄ ∟΄. ἔσται ἄρα τὸ ὀρθογώνιον. ις θ^ων. ξγ θ^ων. ξε θ^ων.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adscito vno laterum circa rectum, sit cubus, at circumferentiæ numerus sit quadratus. Si rursus eodem vtamur ductu quo in præcedente eo res deueniet, vt 4 N. + 2. æquanda sint quadrato, & 2 N. + 1. æquanda cubo. Et oportet inuenire quadratum cubi duplum. Est autem 16. respectu 8. Et rursum æquabimus 16. & 4 N. + 2. & fit 1 N. 3 $\frac{1}{2}$. Erit ergo rectangulum $\frac{16}{9}$. $\frac{63}{9}$. $\frac{65}{9}$.

IN QVAESTIONEM XXII.

OMNIA ex dictis ad præcedentem sunt manifesta. Et vti potes Canone ad primam huius tradito ad inueniendum cubos infinitos quadrati subduplos, diuidendo scilicet $\frac{1}{2}$ denominatorem rationis subduplæ per aliquem cubum habebis latus quadrati quæsiti. Obseruandum autem hîc est, vt cubus per quem diuidetur $\frac{1}{2}$. sit minor vnitate, vt proueniat quadratus maior binario. Verbi gratia si diuidas $\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{8}$. fiet quotiens 4. latus quæsiti quadrati 16. quo vtitur Diophantus. Quod si diuidas $\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{27}$. fiet quotiens $\frac{27}{2}$. cuius quadratus $\frac{729}{4}$. duplus est cubi $\frac{729}{8}$. & sic de alijs.

Cæterum tam hæc quæstio, quàm præcedens extendi potest ad quaslibet duas species proximas, vel etiam ad non proximas, dum non sint quadratæ, quia vt monuimus ad secundam huius, datis duabus speciebus non quadratis, licet vnam reperire alterius duplam. Itaque poterunt eadem facilitate solui problemata quæ sequuntur.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius sit cubus, area verò cum altero laterum circa rectum faciat quadratoquadratum. vel è conuerso, vt ambitus sit quadratoquadratus, area verò cum altero laterum faciat cubum.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius sit quadratoquadratus, area verò cum altero laterum, faciat quadratocubum. vel è conuerso.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius sit quadratocubus, area verò cum altero laterum faciat cubocubum. vel è conuerso.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius sit quadratus, area verò cum altero laterum faciat quadratocubum. vel è conuerso.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius sit cubus, area verò cum altero laterum faciat quadratocubum. vel è conuerso.

Et sic de alijs.

QVÆSTIO XXIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt circumferentiæ numerus sit quadratus, & adsumens areæ numerum, faciat cubum. Fingatur rectangulum ab 1 N. & 1. fiet vnum laterum circa rectum 2 N. alterum 1 Q. − 1. hypotenusa verò 1 Q. + 1. Et oportet quærere 2 Q. + 2 N. æquales quadrato. & 1 C + 2 Q. + 1 N. æquales cubo. Et sanè 2 Q. + 2 N. conficere quadratum, facile est. Nam si binarium diuiseris per quadratum binario multatum, inuenies 1 N. Oportet autem eum talem inueniri, vt compositus ex cubo ipsius, duplo quadrati eiusdem, & ipsomet numero, faciat cubum. Est ergo 1 N. ex binario diuiso per 1 Q − 2. At cubus fit 8. sub denominatione partis quæ sit cubus à latere 1 Q. − 2. & duo quadrati fiunt 8. sub denominatione partis quæ quadratus est à latere 1 Q. − 2. Ipse verò numerus est 2. sub denominatione partis 1 Q. − 2. & si omnia ad eandem partem reducantur, fiunt 2 QQ. sub denominatione partis, quæ est cubus à latere 1 Q. − 2. Et est pars cubica. Oportet ergo vt & 2 QQ. æquentur cubo. & omnia per 1 C. diuidantur, fiunt 2 N. æquales cubo. Et si ponamus æquales vnitatibus cubicis, inuenietur 1 N. cubi alicuius dimi-

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ τετράγωνος, καὶ προσλαβὼν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, ποιῇ κύβον. πεπλάσθω τὸ ὀρθογώνιον ἀπὸ ςο α μο α. γίνεται μία μὲν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ςς β. ἡ δὲ ἑτέρα δυ α ⋔ μο α. ἡ δὲ ὑποτείνουσα δυ α. μο α καὶ γίνεται ζητεῖν δυ β ςςοὶ β. ἴσους τετραγώνῳ, καὶ κυ α δυ β ςςὶ α. ἴσα κύβῳ. καὶ τὸ μὲν δυ β ςςοὶ β. κατασκευάζειν τετράγωνον ῥᾴδιόν ἐστιν. ἐὰν γὰρ δυάδα μερίσῃς εἰς τετράγωνον παρὰ δυάδα, εὑρήσεις τὸν ςν α. ἀλλὰ δεῖ τοιοῦτον εὑρίσκεσθαι, ὥστε τὸν ἀπ' αὐτοῦ κύβον, καὶ δύο τοὺς ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνους, καὶ αὐτὸν συντιθέμενον, ποιεῖν κύβον. ἔστιν οὖν ὁ ςος ἐκ δυάδος μερισθείσης ἐπὶ δύναμιν α ⋔ μο β. ὁ δὲ κύβος γίνεται μο η ἐν μορίῳ τοῦ ἀπὸ δυ α. λείψει μο β κύβῳ, καὶ οἱ δύο ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνοι, γίνονται μο η. ἐν μορίῳ τοῦ ἀπὸ δυ α λείψει μο β τετραγώνῳ. αὐτὸς δὲ μο β ἐν μορίῳ δυνάμεως α λείψει μο β. καὶ πάντα ἐπὶ τὸ αὐτὸ μόριον, γίνονται δυδυ β ἐν μορίῳ τῷ ἀπὸ δυ α ⋔ μο β κύβῳ. καὶ ἔστι τὸ μόριον κυβικόν. ἔστω οὖν καὶ δυδυ β. ἴση κύβῳ. καὶ πάντα παρὰ κύβον α. γίνονται ςςοὶ β. ἴσοι κύβῳ. καὶ ἐὰν τάξωμεν ἴσα μονάσι κυβικαῖς, εὑρίσκεται ὁ ςος κύβου τινὸς τὸ ἥμισυ. ἔστω ὁ κύβος μο η. γίνεται ἄρα ὁ ςος τούτου τὸ ἥμισυ μο δ. καὶ ὁ τετράγωνός ἐστι μο ις.

τάσσω ἐν δυνάμεσι, καὶ γίνονται δυ ιϛ. ἴσαι δυ β̄ ςς οῖ β̄. καὶ γίνεται ὁ ς α ζ. ὁ δὲ τετράγωνος γίνεται α μθ. καὶ δεῖ ἀπὸ τούτου ἀφελεῖν μο α. ἐπειδήπερ ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἐστι δυ α λείψει μο α. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ ζητῆσαι κύβον, ὅπως τὸ τέταρτον τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου μεῖζον μὲν ᾖ μο β̄. ἐλάσσων δὲ μο δ̄. καὶ ἐὰν τάξωμεν αὐτὸν κυ α. ζητήσομεν κυβοκύβου α δ. μείζονα μὲν μονάδων β̄. ἐλάσσονα δὲ μο δ̄. ὁ ἄρα κυβόκυβος μείζων μέν μο η̄. ἐλάσσων δὲ μο ιϛ. ἔστι δὲ τὰ ψκθ ξδ. ὥστε ὁ κύβος κζ η. τάσσω οὖν ςς οῖ β̄. ἴσους μο κζ η. καὶ γίνεται ὁ ς κζ ιϛ. ἡ δύναμις ψκθ σνϛ. καὶ ἐὰν δυάδα μερίσωμεν εἰς τὸν τούτου δυάδι ἐλάσσονα, εὑρήσομεν τὸν ς φιβ σιζ. καὶ ἔχομεν ἀπὸ τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου, ἆραι μονάδα α.

dium. Esto cubus 8. Fit ergo 1 N. huius dimidium, nempè 4. cuius quadratus est 16. Statuo in quadratis, & fiunt 16 Q. æquales 2 Q. + 2 N. & fit 1 N. $\frac{1}{7}$. At quadratus fit $\frac{1}{49}$. Et oportet ab hoc auferre 1. Quandoquidem vnum laterum circa rectum est 1 Q. − 1. Quamobrem res eò deducitur, vt quærere opus sit cubum, vt quadrans quadrati qui ab eo fit maior sit quàm 2. minor quàm 4. Et si eum ponamus 1 C. quæremus $\frac{1}{4}$ C C. maiorem quidem quàm 2. minorem verò quàm 4. Ergo 1 C C. maior est quàm 8. minor quàm 16. Talis est $\frac{729}{64}$. Ergo cubus $\frac{27}{8}$. Pono ergo 2 N. æquales $\frac{27}{8}$ & fit 1 N. $\frac{27}{16}$. Quadratus $\frac{729}{256}$. Et si binarium diuidamus per hunc binario multatum, inueniemus 1 N. $\frac{512}{217}$. & poterit ab illius quadrato vnitas auferri.

IN QVAESTIONEM XXIII.

TOTA operatio Diophanti sic habet. Fingatur triangulum ab 1 N. & ab 1. erit hypotenusa 1 Q. + 1. alterum laterum 1 Q. − 1. alterum verò 2 N. Quare ambitus siue summa trium laterum, erit 2 Q. + 2 N. æquanda quadrato. Area verò est 1 C. − 1 N. cui si adiiciatur ambitus, fit 1 C. + 2 Q. + 1 N. æquandus cubo. Et quidem facilè est æquare quadrato 2 Q. + 2 N. si ad hoc solùm respiciamus, nam poterit æquari cuilibet quadratorum numero quadrato maiori quàm 2. & fiet valor Numeri, ab huiusmodi quadrato auferendo 2. & per residuum diuidendo 2. Talis autem debet esse valor Numeri, vt per eum resoluendo hypostases 1 C. + 2 Q. + 1 N. inueniatur cubus. Quare apparet necessitas secundæ operationis, qua quæritur quadratus, qui multatus binario, & diuidens binarium, det quotientem, cui adiiciendo suum cubum, & duplum sui quadrati, fiat cubus.

In secunda igitur operatione, ponitur quadratus quæsitus 1 Q. vnde auferendo 2. & per residuum diuidendo 2. fit $\frac{2}{1Q.-2}$ cuius cubus est $\frac{8}{1CC.-6QQ.+12Q.-8}$ duplum autem quadrati eiusdem est $\frac{8}{1QQ.-4Q.+4}$. Quare vt hæc omnia simul addantur reducantur ad maiorem denominationem, & $\frac{2}{1Q.-2}$ fiet $\frac{2QQ.-8Q.+8}{1CC.-6QQ.+12Q.-8}$. At $\frac{8}{1QQ.-4Q.+4}$ fiet $\frac{8Q.-16}{1CC.-6QQ.+12Q.-8}$. Tum omnia simul conficient $\frac{2QQ.}{1CC.-6QQ.+12Q.-8}$ æquandus cubo, & cùm denominator sit cubus, vt constat ex ipsa constructione, restat vt æquemus cubo numeratorem, puta 2 Q Q. Quod facilè fiet, nam æquari potest cuilibet numero cuborum cubico, eritque simplex æquatio, cùm sint duæ species proximæ, quæ reducetur ad primam simplicium, diuidendo omnia per 1 C. vt innuit Diophantus. Erit itaque valor Numeri in hac secunda operatione, semissis alicuius cubi, cuius vtique quadratus æquabitur 2 Q. + 2 N. At hîc duo curanda sunt. Primùm, vt huiusmodi quadratus sit maior quàm 2. vt euidens est. Secundum, vt idem quadratus talis sit, vt multatus binario, & diuidens 2. det quotientem maiorem vnitate, vt scilicet 1 Q. sit etiam maior quàm 1. eò quod vnum laterum circa rectum positum est 1 Q. − 1. vt autem in diuisione prodeat quotiens maior vnitate, oportet diuisorem minorem esse diuidendo. Igitur 1 Q. − 2. debet esse minor quàm 2. & addendo vtrimque 2. 1 Q. debet esse minor quàm 4. Constat ergo, quod ait Diophantus, quadratum esse debere maiorem quàm 2. minorem quàm 4. Cùm autem quadrati huius latus sit semissis alicuius cubi, vt dictum est, & quadratus semissis alicuius numeri, sit quadrans quadrati totius numeri, rectè infert Diophantus, quærendum esse cubum, vt quadrans quadrati qui ab eo fit maior sit quàm 2. minor quàm 4. & ideo tertiam instituit operationem.

In tertia operatione ponit cubum quæsitum 1 C. cuius quadratus 1 C C. cuius quadrans $\frac{1}{4}$ C C. debet esse maior binario, minor quaternario. Quare 1 C C. debet esse maior quàm 8. minor quàm 16. Quomodo autem inueniri possint tales quot quis voluerit, cubocubi, constare potest ex iis quæ in simili adnotauimus ad secundum huius. Reducantur enim 8. & 16. ad fractionem cubocubicam, puta ad eam cuius denominator 64. fient $\frac{512}{64}$. & $\frac{1024}{64}$. inter quos cùm cadat cubocubus $\frac{729}{64}$. is optimè satisfaciet proposito. Porro eius latus quadratum, puta $\frac{27}{8}$. est cubus quæsitus, æquandus

2 N. vnde fit in ſecunda operatione 1 N. $\frac{27}{16}$. cuius quadratus $\frac{729}{256}$. nota quadrati inſignitus æquabitur in prima operatione cum 2 Q. + 2 N. Reliquam operationem omiſit Diophantus moleſtiam ſubterfugiens, nos in gratiam ſtudioſorum, eam perſequemur 2 Q. + 2 N. æquantur $\frac{729}{256}$ Q. & fit 1 N. $\frac{512}{217}$. per quem reſoluendo primas hypoſtaſes, fiunt latera quæſiti trianguli hæc $\frac{309233}{94178}$. $\frac{325055}{47089}$. $\frac{222208}{47089}$. vel $\frac{1024}{217}$. Area eſt $\frac{447810560}{10218313}$. ſumma trium laterum eſt $\frac{746496}{47089}$. quadratus à latere $\frac{864}{217}$. & ipſi ſummæ laterum ſi addas aream, fit cubus $\frac{609800192}{10218313}$. cuius latus $\frac{848}{217}$.

Cæterùm tota ratio diuerſitatis in ſolutione, pendet ex eo quod 2 N. qui debet æquari cubo, poteſt diuerſis æquari cubis, cùm infiniti reperiri poſſint ad hoc idonei. Nam quod attinet ad primas poſitiones, vix reor eas aliter inſtitui poſſe, ita vt in commodam incidamus æquationem.

QVÆSTIO XXIV.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus circumferentiæ ſit cubus, & adſcito areæ numero, faciat quadratum. Primùm inſpicere oportet datis duobus numeris, quomodo inueniatur triangulum rectangulum, vt circumferentia quidem æquetur vni datorum numerorum, area verò æquetur alteri. Sunto duo numeri 12. & 7. & iniunctum ſit ipſum 12. æquari circumferentiæ, ipſum verò 7. areæ. Qui fit ergo ex mutuo ductu laterum circa rectum, erit 14. Et ſi ponamus ipſorum alterum $\frac{1}{N}$ erit alterum 14 N. Eſt autem circumferentia 12. Quamobrem hypotenuſa erit 12 − $\frac{1}{N}$ − 14. N. Reſtat vt huius quadratum, quod quod eſt $\frac{1}{Q}$ + 196 Q. + 172 − $\frac{24}{N}$ − 336 N. æquetur quadratis laterum circa rectum, hoc eſt, $\frac{1}{Q}$ + 196 Q. Communis addatur defectus, & à ſimilibus auferantur ſimilia, & omnia in 1 N. ducantur, fiunt 172 N. æquales 336 Q. + 24. & non poſſibile eſt hanc æquationem abſolui, niſi dimidium numerorum in ſeipſum, detracto producto ex quadratis in vnitates, faciat quadratum. Et ſunt numeri quidem compoſiti ex quadrato circumferentiæ, & ex quadruplo areæ; productum vero ex quadratis in vnitates, fit ex octuplo quadrati circumferentiæ in aream ducto. Quamobrem ſi huiuſmodi dentur numeri, ſoluetur quæſtio. Eſto numerus areæ 1 N. circumferentiæ verò numerus cubus ſimul & quadratus, putà 64. Et vt conſtituatur triangulum, oportet vt dimidium compoſiti ex quadrato ipſius 64. & ex 4. N. ducentes in ſeipſum, auferamus inde quod fit octies ex quadrato circumferentiæ in 1 N. & reliquum quæramus æquale quadrato. Fiunt 4 Q + 4194304 − 24576 N. & omnium quadrans, fit 1 Q. + 1048576 − 6144 N. æquale qua-

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ κύβος, προσλαβὼν δὲ τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, ποιῇ τετράγωνον. πρότερον δεῖ ἐπισκέψασθαι δύο ἀριθμῶν δοθέντων εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ μὲν ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ἴσος ᾖ ἑνὶ τῶν δοθέντων, ὁ δὲ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ τῷ ἑτέρῳ. ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅ τε ιβ. καὶ ὁ ζ. καὶ ἐπιτετάχθω τὸν μὲν ιβ. εἶναι τὸν ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ. τὸν δὲ ζ. τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ. ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ ἔσται μο ιδ. καὶ ἐὰν τάξωμεν μίαν αὐτῶν α ἀριθμοστοῦ. ἡ ἑτέρα ἔσται ςς ιδ. ἔστι δὲ καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ μο ιβ. ἡ ἄρα ὑποτείνουσα ἔσται μο ιβ. λείψει α ἀριθμοστοῦ. ςς ιδ. λοιπόν ἐστι τὸν ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον, ὅπερ ἐστὶ α δυναμοστοῦ. δυ ρϙϛ. μο ροβ. λείψει κδ ἀριθμοστῶν. ςς τλϛ. ἰσῶσαι τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τετραγώνοις, τουτέστι α δυναμοστῷ. δυ ρϙϛ. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, καὶ πάντα ἐπὶ ἀριθμόν, γίνονται ςς οἱ ροβ. ἴσοι δυ τλϛ. μο κδ. καὶ οὐ πάντοτε δυνατόν ἐστιν, εἰ μὴ τὸ ἥμισυ τῶν ςς ἐφ' ἑαυτὸ λεῖψαν τὰς δυνάμεις ἐπὶ τὰς μονάδας, ποιῇ τετράγωνον. καὶ εἰσὶν οἱ μὲν ςς οἱ ἐκ τοῦ ἀπὸ τῆς περιμέτρου, καὶ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ. αἱ δὲ δυνάμεις ἐπὶ τὰς μονάδας, ἐκ τοῦ ὀκτάκις ἀπὸ τῆς περιμέτρου ἐπὶ τὸ ἐμβαδόν. ὥστε ἐὰν τοιοῦτοι δοθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ λύσεται τὸ ζητούμενον, ἔστω ὁ μὲν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ἀριθμοῦ α. ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος μο ξδ. καὶ ἵνα συσταθῇ τὸ τρίγωνον δεῖ τοῦ ἀπὸ μο ξδ. τετραγώνου, καὶ ἀριθμῶν δ. τὸ ἥμισυ ποιήσαντα ἐφ' ἑαυτὸ ἀφελεῖν τὸν ὀκτάκις ἀπὸ τῆς περιμέτρου εἰς ἀριθμὸν α. καὶ ζητῆσαι τὰ λοιπὰ ἴσα τετραγώνῳ. γίνονται δυ δ. μο υιθ. ͵δτδ. λείψει ἀριθμῶν β. ͵δφοϛ. καὶ πάντων τὸ τέταρτον, γίνεται δυ

ᾱ. μ° ρδ. ,ηφος. λείψει ἀριθμῶν ,ςφμδ. ἴσαι τετραγώνῳ. ἔτι δὲ καὶ ἀριθμὸς ᾱ. μ° ξδ. ἴσα τετραγώνῳ, καὶ ἐξισώσθω σοι ἀριθμοί, καὶ ἡ ὑπεροχή, καὶ ἡ μέτρησις, καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα.

drato. Porro autem & 1 N + 64. æquatur quadrato. Et exæquentur tibi numeri; & excessus, & mensuratio, & reliqua sunt dilucida.

IN QVAESTIONEM XXIV.

OPERATIO Diophanti subtilis est, quam ipse compendiosè persequitur. Nos autem vt omnia fiant dilucida, eam fusius explicabimus. Data circumferentia trianguli 12. & area 7. constat productum ex lateribus circa rectum esse 14. sit ergo alterum latus 14. N. alterum $\frac{1}{1N}$. vt eorum mutuo ductu fiat 14. vtroque igitur de summa laterum 12. detracto, relinquitur hypotenusa 12 − $\frac{1}{1N}$ − 14 N. Quare vt triangulum exhibeatur in rationalibus, oportet huius quadratum, æquari quadratis reliquorum laterum simul iunctis. Vt autem habeamus quadratum de 12 − $\frac{1}{1N}$ − 14 N. sumemus quadratos partium, & quod fit bis ex qualibet parte in quamlibet ex alijs, per primam secundi porismatum, fietque totus quadratus $\frac{1}{1Q}$ + 196 Q. + 172 − $\frac{24}{1N}$. − 336 N. æqualis quadratis laterum circa rectum, puta $\frac{1}{1Q}$ + 196 Q. Quare tandem 172. æquatur $\frac{24}{1N}$ + 336 N. & ducendo omnia in 1 N. fiunt 172 N. æquales 24 + 336 Q. Quæ est tertia compositarum. Quamobrem operando more Diophanti, vt docuimus ad trigesimam tertiam primi, oportet ducere vnitates in quadratos, hoc est 24. in 336. & productum 8064. auferre à quadrato numeri 86. qui est semissis numeri Numerorum 172. hoc est à 7396. Quod fieri nequit, quia 7396. minor est quàm 8064. Hæc igitur æquatio est impossibilis. Itaque inspiciendum est vnde prouenerint 172 N. itemque 24. & 336 Q. Quod si consideres qua ratione sumptus sit quadratus de 12 − $\frac{1}{1N}$. − 14 N. facile omnia consequeris. Nam 172. fit ad 144. quadratum de 12. addendo 28. duplum ipsius 14. Quare cùm 14. sit duplum areæ 7. ac proinde 28. eiusdem quadruplum. Rectè dixit Diophantus 172. numerum Numerorum, componi ex quadrato circumferentiæ, & ex quadruplo areæ. At 24. est duplum circumferentiæ 12. & 336. est numerus qui fit bis ex 12. in 14. hoc est ex duplo ipsius 12. in 14. Atqui 14. est duplum areæ, & quod fit ex duplo vnius numeri in duplum alterius, idem est atque id quod fit ex quadruplo vnius in alterum. Igitur 336 fit ex quadruplo circumferentiæ 12. in aream 7. Constat ergo vnitates 24. esse duplum circumferentiæ, & numerum quadratorum 336. esse productum ex quadruplo circumferentiæ in aream. Proinde ducere vnitates in quadratos, idem est ac ducere duplum circumferentiæ in quadruplum ipsius circumferentiæ, & productum in aream. At ex duplo alicuius numeri, in quadruplum eiusdem, fit octuplum quadrati ipsius numeri. Rectè igitur infert Diophantus numerum qui fit ex quadratis in vnitates, produci ex octuplo quadrati circumferentiæ in aream.

Corrigenda igitur est prima operatio, & tales ponendi numeri areæ & circumferentiæ, vt à quadrato semissis compositi, è quadrato circumferentiæ, & ex quadruplo areæ, auferendo octuplum producti ex quadrato circumferentiæ in aream, supersit quadratus. Idcirco ponit aream Diophantus 1 N. circumferentiam numerum cubum, puta 64. quia id requirit lex problematis, quem vult præterea esse quadratum, ob causam quam infra explicabimus. Est ergo ipsius 64. quadratus 4096. cui addendo quadruplum areæ fit 4096 + 4 N. cuius semissis 2048 + 2 N. cuius quadratus est 4 Q. + 4194304. + 8192 N. vnde si auferas octuplum ex quadrato ipsius 64. in 1 N. nempe 32768 N. superest 4 Q. + 4194304. − 24576 N. æquandus quadrato, & sumendo quadrantem more Diophanti 1 Q. + 1048576 − 6144 N. æquandus quadrato. Quoniam verò requiritur, vt & circumferentia adsumens aream, faciat quadratum, oportet etiam 1 N. + 64. æquari quadrato. Quare in duplicatam incidimus æqualitatem. Quæ vt resolui possit, imitando artificium decimæ octauæ tertij, exæquandæ prius sunt vnitates, vt tangit Diophantus. Quod quidem facilè præstari potest, quia vterque 1048576. & 64. quadratus est, vnde patet cur 64. voluerit esse quadratum, nam aliter non posset 64. ad quadratum 1048576. habere rationem quadrati ad quadratum. Necessario autem 1048576. quadratus reperitur, quia quadrans est quadrati de 2048. vt ex constructione manifestum est. Itaque quoniam denominator rationis 64. ad 1048576. est quadratus 16384. ducto hoc quadrato in 1 N. + 64. fiet hinc 16384 N. + 1048576. æquandus quadrato. Inde vt prius 1 Q. + 1048576. − 6144 N. æquandus quoque quadrato. Quia verò vterque & quadratorum & vnitatum numerus quadratus est, duplici via resolui potest duplicata æqualitas. Primo enim respiciendo ad 1 Q. sumo interuallum Numerorum quadrato æquandorum, quod est 22528 N. − 1 Q. quod mutuo ductu conficiunt 22528 − 1 N. & 1 N. (hi soli apti sunt æquationi resoluendæ, vt constat ex iis quæ passim libro tertio docuimus, vt scilicet in semisse interualli eorum reperiatur 1 N. latus 1 Q.) Horum summa est 22528. cuius semissis quadratus 126877696. æquatur 16384 N. + 1048576. vnde fit 1 N. 7680. numerus scilicet areæ, cùm circumferentia sit 64. sed omnino impossibile est triangulum constituere cuius area sit 7680. circumferentia 64. Quia ex 64. fieri nequeunt tres partes, quarum duæ inuicem ductæ efficiant 15360. duplum scilicet areæ, cùm 64. neque in duas partes diuidi possit quæ

quæ id præstent: siquidem quadratus semissis ipsius 64. puta 1024. maior est producto multiplicationis duarum quarumlibet inæqualium partium, in quas secari possit 64. per quintam secundi Euclidis. Quod si primam operationem repetendo quæras triangulum cuius area 7680. circumferentia 64. inuenies sanè à quadrato semissis compositi è quadrato circumferentiæ 64. & ex quadruplo areæ 7680. non posse subduci octuplum producti ex quadrato circumferentiæ in aream. Denique si per valorem Numeri 7680. resoluas primas hypostases, inuenies hypotenusam longè minorem nihilo, cùm vnum laterum circa rectum, fiat multo maius tota circumferentia.

Aliam igitur inire viam cogimur, qua respiciendo ad vnitates, sumo interuallum numerorum quadrato æquandorum 1 Q. − 22528 N. Tum quæro duos numeros, quorum mutuo ductu id fiat. Ita tamen vt in semisse summæ illorum, vel interualli, reperiantur vnitates 1024. quod est latus ipsius 1048576. Sunt ergo huiusmodi numeri 11 N. & $\frac{1}{11}$ N. − 2048. horum interuallum 2048 + 10 $\frac{10}{11}$. cuius semissis 1024. + 5 $\frac{5}{11}$ N. cuius quadratus 1048576. + $\frac{122880}{11}$. N. + $\frac{3600}{121}$ Q. æquatur 1048576 + 16384 N. vnde fit 1 N. 175. $\frac{49}{225}$. Area scilicet quæsiti trianguli. Redeo ergo ad propositam initio quæstionem, & quæro triangulum, cuius ambitus sit 64. area 175 $\frac{49}{225}$. Pono vnum laterum circa rectum $\frac{1}{1N}$. alterum $\frac{39424}{225}$ N. fit hypotenusa 64 − $\frac{1}{1N}$. − $\frac{39424}{225}$ N. cuius quadratum si facias æqualem quadratis laterum circa rectum, fiunt tandem $\frac{1079296}{225}$. æquales $\frac{128}{1N}$ + $\frac{10092544}{225}$ N. & ducendo omnia in 1 N. tum in 225. fiunt 1079296 N. æquales 28800. + 10092544 Q. & rursus diuidendo omnia per 128. vt in minimis exhibeantur, habes 8432 N. æquales 225 + 78848 Q. Quare fit 1 N. $\frac{4400}{78848}$ vel $\frac{4032}{78848}$. seu in minimis $\frac{275}{4928}$. vel $\frac{9}{176}$. Et si per vtrumlibet valorem Numeri resoluas hypostases, fiunt vtroque modo latera circa rectum 19 $\frac{5}{9}$ & 17 $\frac{253}{275}$. Est ergo hypotenusa 26 $\frac{1298}{2475}$ ambitus 64. cui addendo aream, puta 175 $\frac{49}{225}$. fit quadratus $\frac{53824}{225}$. cuius latus $\frac{232}{15}$. Hæc ad omnium pulcherrimi subtilissimique problematis explicationem adnotasse sufficiat.

Quoniam verò in his libris Diophantus diuersimodè vtitur duplicata æqualitate, non abs re me facturum arbitror, si omnes quos vsurpat modos sigillatim recenseam, & vnum in locum quæ sparsim à nobis adnotata sunt, collecta coniiciam, vt sic tota duplicatæ æqualitatis doctrina discentium animis firmius inhæreat. Nec solas Diophanti hypotheses afferemus, sed & alias plerúmque exhibebimus, quibus varia huiusmodi æquationum symptomata declarentur, nouamque insuper quam excogitauimus æquationis rationem, quamque ad quadragesimam quintam quarti explicauimus, alijs adiiciemus.

OBSERVATIO D. P. F.

Vbi non sufficiunt duplicatæ æqualitates vel διπλοισότητες, recurrendum ad τριπλοισότητας, seu triplicatas, æqualitates quæ est nostra inuentio ad plurima problemata pulcherrima præuiam facem præferens. Æquentur videlicet quadrato
1 N + 4 oritur triplicata æqualitas cuius solutio per medium duplicatæ æqua-
2 N + 4 litatis est in promptu. Si ponatur loco 1 N. numerus vna cum 4 quadra-
5 N + 4 tum conficiens v. g. 1 Q + 4. N. fiet primus numerorum æquandorum quadrato 1 Q. + 4 N. + 4 secundus igitur erit 2 Q + 8 N. + 4. tertius 5 Q + 20 N + 4. primus autem ex constructione est quadratus, ergo debent æquari quadrato 2 Q + 8 N + 4 & 5 Q + 20 N + 4 & oritur duplicata æqualitas quæ vnicam certè exhibebit solutionem, sed eâ exhibitâ prodibit rursum noua, & à secunda tertia deducetur & in infinitum. Quod opus ita procedet vt inuento valore 1 N. rursus ponatur 1 N. esse 1 N + numerus qui primum ipsi 1 N. inuentus est æqualis. Hac enim viâ infinitæ prioribus solutionibus solutiones accedunt & postrema semper deriuabitur à proxime antecedenti. Huius inuentionis beneficio infinita triangula eiusdem areæ possumus exhibere, quod ipsum videtur latuisse Diophantum, vt patet ex quæstione octaua lib. 5. in quâ tria tantum triangula æqualis areæ inuestigat vt sequentem quæstionem in tribus numeris construat quæ ad infinitos ex iisque nos primi deteximus, recipit extensionem.

Primus Modus vtendi duplicata æqualitate est, quando vterque numerus quadrato æquandus componitur ex Numeris & ex vnitatibus, & numerus Numerorum idem est vtrobique. Et hîc quatuor casus considerari possunt. Primus casus est, cùm vterque numerus & vnitatum & Numerorum afficitur signo pluris, vt accidit duodecima secundi, vbi æquandi erant quadrato 1 N. + 2. & 1 N. + 3. Itemque decima quarta tertij vbi æquandi erant quadrato 10 N. + 6. & 10 N. + 54. Et hîc facilis est æquationis ratio. Nam inueniendi sunt duo quadrati, quorum idem sit interuallum

atque ipſarum vnitatum quæ reperiuntur in numeris quadrato æquandis , hac tamen lege vt maior quæſitorum quadratorum excedat maiorem vnitatum numerum , minor quadratus excedat minorem vnitatum numerum. Vt cùm æquantur quadrato 1 N. + 2. & 1 N. + 3. quorum interuallum 1. quæremus duos quadratos ,quorum interuallum ſit 1. ita vt maior quadratorum excedat 3. minor excedat 2. idcirco ſumi non poſſunt $\frac{25}{16}$. & $\frac{9}{16}$. neque $\frac{25}{9}$ & $\frac{16}{9}$. ſed ſumpſit Diophantus $\frac{289}{64}$ & $\frac{225}{64}$. Similiter cùm æquandi ſunt quadraro 10 N. + 6. & 10 N. + 54. quorum interuallum 48. ſumit Diophantus quadratos 16. & 64. quia 16. excedit 6. & 64. excedit 54. non potuerunt autem ſumi 1. & 49. ob defectum conditionis adiectæ.

Secundus caſus eſt , cùm vnitatum numeri afficiuntur vtrobique ſigno minoris , vt accidit decima quarta ſecundi , vbi æquandi fuere quadrato 1 N. – 6 & 1 N. – 7. & in hoc caſu abſque vlla conditione ſufficit inuenire duos quadratos , quorum interuallum æquet interuallum propoſitorum numerorum , vt in data hypotheſi , quia interuallum eſt 1. duo quicunque quadrati vnitate diſtantes , ſatisfacient propoſito , ſumpſit Diophantus $\frac{9}{16}$ & $\frac{25}{16}$. & ſumere potuiſſet $\frac{16}{9}$ & $\frac{25}{9}$. vel alios quoſcumque quorum interuallum ſit vnitas.

Tertius caſus eſt. Cùm Numerorum numeri afficiuntur vtrobique ſigno minoris , quod nuſquam accidit in Diophanto, ſed nobis decimam tertiam ſecundi per duplicatam æqualitatem ſoluentibus,in hunc caſum cõtingit incidiſſe,æquantibus quadrato tum 9 – 1 N. tum 21 – 1 N. Hîc autem inueniendi ſunt duo quadrati eodem interuallo diſtantes,quo & propoſiti numeri,ea tamen lege vt maior ipſorum ſit minor vnitatibus maioris propoſitorũ numerorum;minor autem ſit minor vnitatibus minoris. Vt in data hypotheſi , quia propoſitorum numerorum interuallum eſt 12. Quærendi ſunt duo quadrati , quorum interuallum ſit 12. ita tamen vt maior quæſitorum quadratorum ſit minor quàm 21. minor autem ſit minor quàm 9. quales ſumpſimus 4. & 16.

Quartus caſus eſt. Cùm in vno propoſitorum numerorum , vnitatum numerus afficitur ſigno pluris , in altero afficitur ſigno minoris, vt ſi ſint æquandi quadrato 1 N. + 8. & 1 N. – 12. Tuncque inueniendi ſunt duo quadrati quorum interuallum ſit idem , atque propoſitorum numerorum, abſque vlla conditione. Sic in data hypotheſi , quia propoſitorum numerorum interuallum eſt 20. ſumam duos quadratos , quorum interuallum ſit 20. quales ſunt 36. & 16. Itaque in his omnibus caſibus , manifeſtum eſt propoſitam quamcunque duplicatam æqualitatem infinitis modis explicari poſſe.

Secundus Modus vtendi duplicata æqualitate eſt , quando rurſus vterque propoſitorum numerorum componitur ex Numeris & vnitatibus , & Numerorum numeri ſunt inæquales , ſed vnitatum numerus vtrimque quadratus eſt. Et hîc duplex caſus conſiderari poteſt. Primus caſus eſt , cùm idem quadratus numerus vnitatum vtrimque reperitur , vt accidit in prima operatione quadrageſimæ quintæ quarti vbi æquantur quadrato 8 N. + 4. & 6 N. + 4. & in hoc caſu cùm interuallum propoſitorum numerorum conſtet ex ſolis Numeris (vt vides in data hypotheſi huiuſmodi interuallum eſſe 2 N.) quærendi ſunt duo numeri , quorum mutuo ductu fiat dictum interuallum , ea lege vt in ſumma eorum contineatur duplum lateris quadrati , qui eſt in vtroque propoſitorum numerorum , vt in dato exemplo cùm latus quadrati 4. ſit 2. cuius duplum 4. deligendi ſunt duo numeri quorum mutuo ductu fiant 2 N. ita vt in ſemiſſe ſummæ illorum reperiantur 4. vnitates, vnde patet alios deligi non poſſe quàm $\frac{1}{2}$ N. & 4. quorum ſummæ ſemiſſis quadratum ſi æques maiori 8 N. + 4. vel eorundem interualli ſemiſſis quadratum æques minori 6 N. + 4. fit vtrobique 1 N. 112. vnde liquet in hoc caſu vnicam tantum dari poſſe ſolutionem. Reducitur tamen hîc caſus ad quartum modum , vt infrà oſtendemus , qua ratione infinitis modis reſolui poteſt.

Secundus caſus eſt , cùm in propoſitis numeris , inæquales vnitatum numeri quadrati continentur , vt accidit decima ſeptima tertij , vbi æquantur quadrato 10 N. + 9. & 5 N. + 4. quorum interuallum cùm componatur ex Numeris & vnitatibus , eſt quippe 5 N. + 5. tales ſunt deligendi duo numeri quorum mutuo ductu id fiat , vt in eorum ſumma reperiatur duplum lateris maioris quadrati , & in eorum interuallo reperiatur duplum lateris minoris quadrati , hoc eſt vt in ſumma reperiatur 6. in interuallo 4. Quare per Canonem primæ primi facilè reperientur huiuſmodi numeri puta 5. & 1. Aliter eoſdem numeros reperies , ſi capias ſummam & interuallum laterum quadratorum 9. & 4. hoc eſt ſummam & interuallum ipſorum 3. & 2. fient enim vt prius 5. & 1. Quia igitur ad conficiendum interuallum 5 N. + 5. ſumendi ſunt duo numeri , in quorum altero ſint vnitates 5. in altero 1. Patet nonniſi duobus modis tales numeros ſumi poſſe,puta vel 5 N. + 5. & 1.vel 1 N. + 1. & 5. vnde liquet in hoc caſu contingere poſſe vt duæ ſolutiones exhibeantur , dico contingere poſſe quia plerumque vnica prouenit ſolutio , vt in data hypotheſi , non enim ſumendo 5 N. + 5. & 1. ſolui poteſt quæſtio , quia horum ſummæ ſemiſſis quadratus , puta $\frac{25}{4}$ Q. + 15 N. + 9. maior eſt omnino quàm 10 N. + 9. ac proinde illi æquari nequit. Contingit autem duplex ſolutio ſi proponantur æquandi quadrato 36 N. + 49. & 12 N. + 1. quia enim horum interuallum eſt 24 N. + 48. conſtat ex tradita regula produci poſſe huiuſmodi interuallum , ſiue ex 6. in 4 N. + 8. ſiue ex 8. in 3 N. + 6. Vnde fit 1 N. vel 2. vel $\frac{20}{3}$.

Porro in hoc secundo casu potest accidere vt vterque vel alter numerus Numerorum afficiatur signo minoris. Vt si sint æquandi quadrato 36 − 6 N. & 16 − 1 N. quorum interuallum 20 − 5 N. Quod si ponatur fieri ex 2. in 10 − $\frac{5}{2}$ N. optimè resoluetur æquatio, & fiet 1 N $\frac{144}{25}$. Rursus si sint æquandi quadrato 36 − 1 N. & 16 + 9 N. quorum interuallum 20 − 10 N. hoc si ponatur fieri ex 2. in 10 − 5 N. vel etiam ex 10 in 2 − 1 N. duobus modis resoluetur æquatio, & fiet 1 N. vel $\frac{116}{25}$. vel 20. Attamen vtrumlibet horum accidat, sæpè continget æquationem resolui nullatenus posse, vt si sint æquandi quadrato 36 − 1 N. & 16 − 6 N. quorum interuallum 20 + 5 N. Etenim si per regulam traditam sumantur numeri, quorum mutuo ductu fiat 20 + 5 N. horum summæ semissis quadratus semper erit maior quàm 36 − 1 N. quia omnes illius partes afficientur signo Pluris. Quare quotiescunque minor Numerorum defectus se tenebit ex parte maioris quadrati, erit impossibilis æquationis duplicatæ resolutio. Sed etsi minor defectus iungatur minori quadrato, non semper resolui poterit æquatio, vt si sint æquandi quadrato 9 − 8 N. & 4 − 6 N. Cùm enim horum interuallum sit 5 − 2 N. siue ponas illud produci ex 1. in 5 − 2 N. siue ex 5. in 1 − $\frac{2}{5}$ N. nil ages, nam horum summæ semissis quadratus semper erit maior quàm 9 − 8 N. Similiter cùm numeri ex vna tantum parte deficiunt, potest impossibilis esse æquationis resolutio, vt si sint æquandi quadrato 36 + 3 N. & 16 − 9 N. Cùm enim horum interuallum sit 20 + 12 N. non potest id fieri nisi ex 2. in 10 + 6 N. vel ex 10. in 2. + $\frac{6}{5}$ N. sed vtroque modo, illorum summæ semissis quadratus maior est quàm 36 + 3 N. Quia vero & casus iste secundus cum omnibus suis symptomatis reduci potest ad Quartum modum, vt infrà docebimus, semper huiusmodi æquationes non vna ratione resolui poterunt.

TERTIVS MODVS est, cùm rursus propositi numeri componuntur ex Numeris & vnitatibus inæqualibus multitudine, & vnitatum numeri quadrati non sunt, sed Numerorum numeri sunt plani similes. Vt accidit decima octaua & decima nona tertij. Itemque trigesima quinta quarti. Et reducitur hic modus ad primum, faciendo numeros Numerorum æquales. Nam interdum minor ducitur in denominatorem rationis quàm habet ad eum maior, & sic fit æqualis maiori, vt trigesima quinta quarti, vbi cùm æquandi sint quadrato 65 − 6 N. & 65 − 24 N. quia 24. ad 6. est ratio quadrupla ducitur 4. in 65 − 6 N. & fit 260 − 24 N. Iam ergo si æques quadrato 260 − 24 N. & 65 − 24 N. id perages per ea quæ dicta sunt de tertio casu primi modi. Interdum verò ad vitandas fractiones sumuntur quadrati duo in eadem ratione quam habent inter se propositi Numerorum numeri, quique habeant partes propositis fractionibus expressas, & maior ducitur in minorem, & minor in maiorem, vnde productorum existit æqualitas ob identitatem proportionis. Sic decima octaua tertij cùm æquandi sint quadrato 5 $\frac{1}{5}$ N. + 4 $\frac{1}{5}$ & $\frac{13}{10}$ N + $\frac{3}{10}$. Quamuis Numerorum inter se sit ratio quadrupla, non ducitur tamen 4. in minorem, quia sic non tollerentur fractiones, sed sumuntur duo quadrati 100. & 25. in eadem ratione, quique habeant partes fractionibus expressas, puta $\frac{1}{5}$. & $\frac{1}{10}$. ductoque maiore 100. in minorem $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$. & minore 25. in maiorem 5 $\frac{1}{5}$ N. + 4 $\frac{1}{5}$. fiunt iam æquandi quadrato 130 N. + 30. & 130 N. + 105. qui est primus casus primi modi. Rursus decima nona tertij, cùm sint æquandi quadrato 2 $\frac{1}{2}$ N. − 3 $\frac{1}{2}$ & $\frac{5}{8}$ N. − $\frac{13}{8}$. vbi etiam numeri Numerorum sunt quadrupli, sumuntur quadrati 4. & 16. in eadem ratione qui habent partes fractionibus expressas, puta $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{8}$. Factaque decussatim multiplicatione fiunt æquandi quadrato 10 N. − 26. & 10 N. − 14. qui est secundus casus primi modi. Cæterùm aduerte simili prorsus artificio casum secundum secundi modi reduci posse ad primum. Sint enim æquandi quadrato 9 N. + 16. & 7 N. + 4. Quia 16. ad 4. est in ratione quadrupla, si ducas 4. in 7 N. + 4. fient iam æquandi quadrato 28 N. + 16. & 9 N. + 16. qui est primus casus secundi modi. Quod si vnitates quadratæ in propositis numeris contentæ, sint minimi in suis rationibus numeri, tunc ad vitandas fractiones, commodius erit quemlibet propositorum numerorum viciſsim multiplicare per vnitates alterius, vt in hypothesi decimæ septimæ tertij, vbi æquandi sunt quadrato 10 N. + 9. & 5 N. + 4. duces 4. in 10 N. + 9. & duces 9. in 5 N. + 4. fientque quadrato æquandi 40 N. + 36. & 45 N. + 36. Et in vniuersum quoties rationis quadratorum talis est denominator, vt eo ducto in illum propositorum numerorum, in quo continetur minor quadratus, non fiat integer numerus Numerorum, sumptis similiter minimis in ratione quadratorum eorundem, per eos decussatim multiplicabis propositos numeros, vt si sint æquandi quadrato, 10 N. + 36. & 5 N. + 16. sumes minimos in ratione 36 ad 16. puta 9. & 4. & per eos facta decussatim multiplicatione, fient iam æquandi quadrato 40 N. + 144. & 45 N. + 144. qui est vtique primus casus secundi modi.

QVARTVS MODVS est, cùm propositi Numeri quadrato æquandi constant ex Numeris & vnitatibus, & vnitatum numerus quadratus est, & idem vtrimque, vt in primo casu secundi modi. Sed cùm per secundum modum vix vna aut altera contingat solutio, per hunc quartum modum infinitæ possunt exhiberi solutiones, etiamsi requiratur vt valor Numeri consistat intra præscriptos limites. Sic Diophantus quadragesima quinta quarti æquauit quadrato 8 N. + 4. & 6 N. + 4. volens valorem numeri minorem esse quàm 2. Cùm per secundum modum, valor Numeri necessario fiat 112. & hic triplex casus considerari potest.

Primus casus est, quando vterque propositorum numerorum, continet Numeros affectos signo

pluris. Sic in hypothesi Diophanti, vbi in vtroque numero Numeri afficiuntur signo pluris, procedet æquatio si considerentur tres numeri 8 N. + 4. 6 N. + 4. & 4. Nam cùm maiorum interuallum sit 2 N. minorum 6 N. quærendi sunt duo quadrati, quorum interuallum sit triens interualli, quo minor illorum superabit 4. Ponatur minoris latus 1 N. + 2. fiet quadratus 1 Q. + 4 N. + 4. qui cùm excedat 4. numero 1 Q. + 4 N. cuius triens $\frac{1}{3}$ Q. + 1 $\frac{1}{3}$ N. hoc addito, ipsi quadrato, fiet maior quadratus 1 $\frac{1}{3}$ Q. + 5 $\frac{1}{3}$ N. + 4. Hic ergo æquandus est quadrato, & ad tollendas fractiones omnia ducendo in 9. tum vt æquatio reducatur ad minimos, omnia diuidendo per 4. fit 3 Q. + 12 N. + 9. æquandus quadrato, cuius latus vt patet infinitis modis fingi potest, & cum qualibet data Numeri determinatione, fingatur cum Diophanto 5 N. − 3. fiet 1 N. $\frac{21}{11}$. Erunt ergo latera quadratorum $\frac{48}{11}$ & $\frac{43}{11}$. ipsi quadrati $\frac{2304}{121}$. $\frac{1849}{121}$. quorum priorem si æques 8 N. + 4. vel posteriorem 6 N. + 4. fit vtrobique 1 N. $\frac{455}{242}$.

Secundus casus est. Quando vterque numerus Numerorum afficitur signo minoris, vt si sint æquandi quadrato 16. − 1 N. & 16 − 5 N. Tuncque considero tres Numeros 16. 16 − 1 N. 16 − 5 N. & quia maiorum interuallum est 1 N. minorum 4 N. vnde interuallorum ratio est quadrupla, quæro duos quadratos, quorum interuallum sit quadruplum interualli, quo maior superabitur à 16. Ponatur latus maioris 4 − 1 N. fiet quadratus 16 − 8 N. + 1 Q. qui superatur à 16. interuallo 8 N. − 1 Q. cuius quadruplum 32 N. − 4 Q. Quod si auferas à prædicto quadrato, manet minor quadratus 16 − 40 N. + 5 Q. cuius latus ita finges, vt 1 N. sit minor quàm $\frac{16}{5}$. ob numerum 16 − 5 N. Pone illud 4 − 6 N. fiet 1 N. $\frac{4}{11}$. Ergo latera quadratorum sunt $\frac{40}{11}$ & $\frac{16}{11}$. ipsi quadrati $\frac{1600}{121}$. $\frac{256}{121}$. quorum maiorem si æques 16 − 1 N. minorem verò 16 − 5 N. fiet vtrobique valor Numeri $\frac{336}{121}$.

Tertius casus est, cùm in maiore propositorum numerorum Numeri afficiuntur signo pluris, in minore verò afficiuntur signo minoris, vt si quadrato æquandi sint 16 + 6 N. & 16 − 2 N. Tuncque considerans tres numeros 16 + 6 N. 16. & 16 − 2 N. vbi maiorum interuallum 6 N. triplum est interualli minorum 2 N. quæro duos quadratos, vt interuallum maioris super 16. sit triplum interualli quo 16. superabit minorem. Esto latus minoris 4 − 1 N. fit quadratus 16 − 8 N. + 1 Q. qui superatur à 16. interuallo 8 N. − 1 Q. cuius triplum 24 N. − 3 Q. quod addito ad 16. fit maior quadratus 16 + 24 N. − 3 Q. cuius latus ita fingendum, vt 1 N. sit maior quàm 4. quia latus minoris quadrati ponitur 4 − 1 N. Ponatur 5 N. − 4 fiet 1 N. $\frac{16}{7}$. eruntque quadratorum latera $\frac{52}{7}$. & $\frac{12}{7}$. quadrati $\frac{2704}{49}$. $\frac{144}{49}$. quorum maior si fiat æqualis 16 + 6 N. vel minor æquetur 16 − 2 N. fiet vtrobique valor Numeri $\frac{320}{49}$.

Itaque quoniam vt suprà docuimus secundus casus secundi modi semper reduci potest ad primum, ac per consequens ad aliquem horum trium casuum, & in quolibet horum trium casuum solutiones infinitæ reperiri possunt, constat vtique & secundum casum secundi modi cum omnibus suis symptomatis semper infinitis modis resolui posse.

QVINTVS MODVS quem ipsi commenti sumus est. Quando vterque propositorum numerorum quadrato æquandorum componitur ex Numeris & vnitatibus, & numeri Numerorum sunt inæquales, nec habent inter se rationem quadrati ad quadratum, nec etiam vnitatum numeri sint quadrati. Quoniam verò modum hunc, & duplicem illius casum fusè ad quadragesimam quintam quarti explicauimus, non est cur ibidem adnotata hîc reponantur, ne inani eiusdem rei repetitione commentarios nostros augere velle videamur.

SEXTVS MODVS est. Quando propositi numeri diuersimodè componuntur ex quadratis, Numeris & vnitatibus, & hîc pro omni casu qui excogitari possit, duæ regulæ sunt obseruandæ, vt æquatio sit explicabilis. Primo enim oportet, vt vel quadratorum, vel vnitatum numerus quadratus sit. Deinde oportet interuallum propositorum numerorum, ex vna vel ex duabus speciebus tantùm componi. Cæterùm casus omnes possibiles explicare nobis non est propositum, sed eos omnes in quos incidit Diophantus subiicere satis habebimus, cùm ex iis colligi possit quomodo in aliis sit procedendum.

Primò ergo accidit vtrumque propositorum Numerorum componi ex tribus speciebus supradictis, & eorum interuallum vnica tantùm constare specie, vt vigesima tertij, vbi æquantur quadrato 4 Q. + 3 N. − 1. & 4 Q. + 4 N. − 1. quorum interuallum 1 N. ad quod conficiendum mutuo ductu deligi possunt soli $\frac{1}{4}$. & 4 N. vt in eorum summa reperiantur 4 N. duplum scilicet 2 N. lateris quadrati 4 Q. Quare vnica contingit solutio. Sic etiam vigesima prima tertij, æquantur quadrato 4 Q. + 3 N. − 1. & 4 Q. − 1 N. − 1. quorum interuallum 4 N. quod mutuo ductu conficiunt 1. & 4 N. ob causam suprà allatam. Et vnica tantùm contingit solutio.

Secundò accidit vtrumque propositorum numerorum ex duabus componi speciebus, alterum scilicet ex quadratis & vnitatibus, alterum ex Numeris & vnitatibus, interuallum autem illorum constare ex quadratis & Numeris. Sic prima quinti æquantur quadrato 1 Q. − 12. & 6 $\frac{1}{2}$ N. − 12. quorum interuallum 1 Q. − 6 $\frac{1}{2}$ N. Quare tales deligendi numeri quorum mutuo ductu id fiat, vt in eorum summa reperiantur 2 N. duplum lateris quadrati 1 Q. Igitur alij sumi non possunt quàm 1 N. & 1 N. − 6 $\frac{1}{2}$. Sic rursus secunda quinti æquantur quadrato 1 Q. + 20. & 4 N. + 20. quorum

interuallum 1 Q. − 4 N. quod fit ex 1 N. in 1. N. − 4. Sic denique sexta sexti, æquantur quadrato 1 Q. + 1. & 14 N. + 1. quorum interuallum 1 Q. − 14. N. quod fit ex 1 N. in 1 N. − 14.

Tertiò accidit alterum propositorum numerorum componi ex quadratis, Numeris, & vnitatibus. Alterum ex quadratis & Numeris, vt decima quinta tertij, vbi æquantur quadrato 4 Q. − 1 N. − 4. & 4 Q. + 15 N. quorum interuallum 16 N. + 4. ad quod conficiendum deligendi numeri, in quorum summa reperiantur 4 N. ac proinde soli 4. & 4 N. + 1. deligi possunt.

Quarto accidit alterum propositorum numerorum componi ex quadratis Numeris, & vnitatibus, alterum ex quadratis & vnitatibus. Sic vigesima quarta quarti, æquantur quadrato 1 Q. + 1 N. − 1 & 1. Q. − 1. quorum interuallum 1 N. quod fit ex ½. in 2 N. Sic rursus octaua sexti, æquantur quadrato 1 Q. + 14 N. + 1. & 1 Q. + 1. quorum interuallum 14 N. quod fit ex 2 N. in 7. Posset etiam in hoc casu interuallum numerorum componi ex Numeris & vnitatibus, vt nobis accidit vigesimam tertiam quarti, per duplicatam æqualitatem soluentibus, æquauimus enim quadrato 1 Q. + 1 − 1 N. & 1 Q. − 1. quorum interuallum 2 − 1 N. quod fit ex ½. in 4 − 2 N.

Quintò denique accidit alterum propositorum numerorum componi ex quadratis, Numeris, & vnitatibus, alterum verò ex Numeris & vnitatibus, vt propositione hac vigesima quarta libri huius, vbi 1 Q. + 1048576 − 6144 N. & 1 N. + 64. æquantur quadrato. Quo casu vt interuallum ex duabus tantùm speciebus componatur, necesse est vel vnitates, vel Numeros vtrobique æquales multitudine reperiri, vel saltem inter eos esse rationem quadrati ad quadratum, quò possint ad æqualitatem reduci, vt in data hypothesi, quia vnitates 1048576. & 64. sunt in ratione quadrati ad quadratum, cùm vterque numerus sit quadratus, reducuntur ad æqualitatem ducendo 1 N. + 64. in 16384. denominatorem rationis quam habet 1048576. ad 64. & fit 16384 N. + 1048576. æquandus quadrato, vnà cum ipso 1 Q. + 1048576 − 6144 N. Quare horum interuallum, iam ex duabus tantùm constat speciebus, est enim 22528 N. − 1 Q. vel contrà 1 Q. − 22528 N. & duobus modis resolui potest æquatio, quia tam quadratorum quàm vnitatum numerus quadratus est, vt suprà satis superque docuimus.

OBSERVATIO D. P. F.

Huic de duplicatis æqualitatibus tractatui multa possemus adiungere quæ nec veteres nec noui detexerunt. Sufficit nunc, vt methodi nostræ dignitatem & vsum asseramus, vt quæstionem sequentem quæ sane difficillima est resoluamus. Inuenire triangulum rectangulum numero, cuius hypotenusa sit quadratus, & pariter summa laterum circa rectum. Triangulum quæsitum repræsentant tres numeri sequentes 4687298610289. 4565486027761. 1061652293520. Formatus autem à duobus numeris sequentibus 2150905. 246792. Aliâ autem methodo sequentis quæstionis solutionem deteximus. Inuenire triangulum rectangulum numero eâ conditione vt quadratum differentiæ laterum circa rectum minus duplo quadrati à minore latere conficiat quadratum. Vnum ex triangulis quæ huic quæstioni aptantur est id quod sequitur 1525. 1517. 156. formatur à numeris 2. 9. & 2.

Imo confidenter adiungimus duo triangula rectangula quæ iam exposuimus ad solutionem duarum propositarum quæstionum esse minima omnium in integris quæstiones adimplentium.

Methodus nostra hæc est. Quæratur quæstio proposita secundum methodum vulgarem, si non succedat solutio post absolutam operationem quia nempè valor numeri notâ defectus insignitur & ideo minor esse nihilo intelligitur, non tamen despondendum animum confidenter pronuntiamus (quæ oscitantia, vt loquitur Vieta, fuit & ipsius & veterum analystarum.) Sed iterum quæstionem tentemus & pro valore radicis ponamus 1 N. − numero quem sub signo defectus æquari radici incognitæ in prima operatione inuenimus, prodibit noua haud dubiè æquatio quæ per veros numeros solutionem quæstionis repræsentabit. Et hac via superiores duas quæstiones alioquin difficillimas resoluimus, demonstrauimus pariter & construximus numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos diuidi posse, sed hoc per iteratam ter aliquando operationem. Sæpius enim contingit vt veritas quæsita ad multiplices operationum iterationes solertem & industrium necessario adigat analystam vt facillimè experiendo deprehendes.

QVÆSTIO XXV.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ᾖ ἄλλος τετράγωνος, καὶ πλευρά, καὶ μερισθεὶς παρὰ τὸν ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ποιῇ κύβον, καὶ πλευράν. τετάχθω ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ς° α. ἡ δὲ ἑτέρα δ^υ α. καὶ μένει ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ὢν τετράγωνος, καὶ πλευρά. καὶ μερισθεὶς παρὰ τὸν ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ποιεῖ κύβον καὶ πλευράν. λοιπόν ἐστι δ^υ δ^υ α. δ^υ α. ἰσῶσαι τετραγώνῳ, καὶ πάντα παρὰ δύναμιν. γίνεται δύναμις α μ° α. ἴση τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς° α. ⋔ μ° β. ὅθεν ὁ ς° γίνεται μ° γ^δ. καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt quadratus hypotenusæ sit alius quadratus, & latus; & diuisus per vnum laterum circa rectum, faciat cubum & latus. Statuatur vnum laterum circa rectum 1 N. alterum verò 1 Q. & manet quadratus hypotenusæ æqualis quadrato aucto suo latere, idemquè diuisus per vnum laterum circa rectum, facit cubum cum suo latere. Restat vt 1 QQ. + 1 Q. æquetur quadrato. Et omnia per 1 Q. diuidantur, fit 1 Q. + 1. æqualis quadrato. Esto quadrato à latere 1 N. − 2. fit 1 N. $\frac{3}{4}$. & reliqua sunt manifesta.

IN QVAESTIONEM XXV.

NESCIO quid somniat hîc Xilander de quadrilatero regulari, & de numero 80. Sanè in codice manu exarato sic habebatur, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ᾖ ἄλλος τετράγωνος καὶ π̄. Quare cùm passim hoc libro vox πλευρὰ exprimatur vnico π cum λ. superscripto, hac ratione π^λ. satis colligi poterat, veram lectionem esse, ᾖ ἄλλος τετράγωνος, καὶ πλευρά.

Cæterùm artificiosè Diophantus per ipsas positiones, duabus propositi partibus satisfacit, nam quadratus hypotenusæ fit 1 QQ. + 1 Q. qui est quadratus cum suo latere, & idem quadratus hypotenusæ diuisus per alterum laterum circa rectum, puta per 1 N. dat quotientem 1 C. + 1 N. cubum scilicet cum suo latere. Quamobrem superest solùm, vt quadratus hypotenusæ, nempe 1 QQ. + 1 Q. æquetur quadrato. Et diuidendo per 1 Q. fit 1 Q. + 1. æquandus quadrato, cuius latus poni potest 1 N. − quotlibet vnitatibus quarum quadratus superet 1. Ponit Diophantus 1 N. − 2. vnde fit 1 N. $\frac{3}{4}$. suntque trianguli quæsiti latera $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{16}$. $\frac{15}{16}$. Quadratus hypotenusæ est $\frac{225}{256}$. qui continet quadratum $\frac{81}{256}$. & eius latus $\frac{9}{16}$. seu $\frac{144}{256}$. & diuidendo eundem quadratum hypotenusæ per latus $\frac{3}{4}$. fit $\frac{900}{768}$. seu $\frac{75}{64}$. qui continet cubum $\frac{27}{64}$. & eius latus $\frac{3}{4}$. seu $\frac{48}{64}$. Non solùm autem inuenti hac arte numeri præstant ea quæ requirit Diophantus, sed præterea summa laterum circa rectum est quadratus cum suo latere, vt patet tum ex positionibus, nam summa laterum circa rectum posita est 1 Q. + 1 N. tum ex ipsa solutione, nam $\frac{3}{4}$. est latus quadratum de $\frac{9}{16}$.

Hîc etiam formari poterit expeditus Canon.

Quemlibet quadratum vnitate multatum, diuide per duplum sui lateris, velè conuerso, vter volueris quotientum erit alterum laterum circa rectum, & eius quadratus erit alterum latus. Horum autem quadrati simul conficient hypotenusæ quadratum.

Verbi gratia aufer 1. à quadrato 9. & residuum 8. diuide per 6. duplum lateris ipsius 9. vel contrà diuide 6. per 8. quotiens $\frac{4}{3}$. vel $\frac{3}{4}$. alterum laterum circa rectum. Ergo alterum erit $\frac{16}{9}$. vel $\frac{9}{16}$ & hypotenusa $\frac{20}{9}$. vel $\frac{15}{16}$. Quare vnica operatione duplex reperitur solutio, cuius rei ratio est, quia contingit 1 Q. + 1. æquari quadrato, & quia tam 1 Q. quàm 1. quadratus est, potest latus illius fingi vel 1 N. − quotlibet vnitatibus, vel 1 − quotlibet Numeris, puta, vel 1 N. − 3. vel 1 − 3 N.

QVÆSTIO XXVI.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ᾖ κύβος, ὁ δὲ ἐν τῇ ἑτέρᾳ κύβος παρὰ πλευράν, ὁ δὲ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ κύβος καὶ πλευρά. τετάχθω ὁ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ κ^υ ᾱ. ἀριθμοῦ α. ὁ δὲ ἐν μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν κ^υ ᾱ. λεῖψει ἀριθμοῦ α. ὁ ἄρα ἐν τῇ ἑτέρᾳ ἔσται δυνάμεων

INVENIRE triangulum rectangulum, vt vnum laterum circa rectum sit cubus; alterum verò sit cubus suo multatus latere, hypotenusa denique sit cubus auctus suo latere. Statuatur hypotenusa 1 C. + 1 N. vnum verò laterum circa rectum 1 C. − 1 N. Reliquum ergo latus erit

2 Q. Restat vt 2 Q. æquentur cubo. Esto 1 C. & fit 1 N. 2. Ad positiones. Erit triangulum 6. 8. 10. & constat.

β. λοιπόν ἐστι δυνάμεις β̄. ἰσῶσαι κύβῳ· ἔστω κ^υ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ο β̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται τὸ τρίγωνον ς̄. η̄. ῑ. καὶ φανερόν.

IN QVAESTIONEM XXVI.

Hic duo maximè notanda sunt. Primum non sine arte poni hypotenusam 1 C. + 1 N. & alterum laterum 1 C. − 1 N. Nam hac ratione satisfit duabus postulati partibus, siquidem hypotenusa est cubus eum suo latere, & alterum laterum est cubus suo latere multatus. Deinde cùm vt habeamus tertium latus, oporteat à quadrato hypotenusæ, nempe ab 1 C C. + 2 Q Q. + 1 Q. auferre quadratum lateris secundi, puta 1 C C. − 2 Q Q. + 1 Q. & quod superest, nempe 4 Q Q. sit quadratus tertij lateris, res optimè succedit, eo quod 4 Q Q. est quadratus, ac proinde latus eius 2 Q. est tertium latus. Et simile semper eueniet si hypotenusa ponatur quilibet cuborum numerus cubicus, plus suo latere, & secundum latus ponatur idem cubus, minus suo latere. Nam interuallum quadratorum, erit semper certus quadratoquadratorum numerus, qui sit quater ex cubo in suum latus, quandoquidem hi quadrati sunt omnino similes, nisi quod in quadrato hypotenusæ continetur duplum producti ex cubo in suum latus cum signo pluris, & in quadrato lateris secundi, continetur idem duplum producti ex cubo in suum latus cum signo minoris. Proinde quadratorum interuallum aliud non est quàm quadruplum producti ex cubo in suum latus. Igitur quadruplum hoc semper esse quadratum demonstrandum est. Non solùm autem hoc ostendemus, sed quod vniuersalius est, ducto quolibet quadrato in aliquem numerum, & producto in cubum eiusdem numeri multiplicato, produci quadratum, vt non de quadruplo tantùm, sed etiam de noncuplo, sedecuplo, &c. idem constet.

D 9. E 3. F 1.
A 2. B 4. C 8.
G 18. H 12.

Esto quilibet numerus A. cuius quadratus B. & cubus C. & sumatur quilibet quadratus D. quo ducto in A. fiat G. dico si G ducatur in cubum C. fieri quadratum. Sumatur enim E. latus quadrati D. & sit F vnitas, ductoque E in B producatur H. Patet igitur per ea quæ ad definitionem quartam primi, demonstrata sunt, tam tres A B C. quàm tres D E F. esse proportionales. Quare cùm ex primo D in primum A. fiat G. & ex secundo E in secundum B fiat H. ac denique ex tertio F in tertium C. fiat ipse C. ' erunt & tres G. H. C. proportionales. ' Quare ex G in C. fiet quadratus ipsius H. Quod erat propositum.

Hinc euidens est dupliciter variari posse solutionem & positiones. Nam primò licet ponere pro hypotenusa quemlibet cuborum numerum cubicum, plus latere ipsius cubi, & pro altero laterum, eundem cubum minus suo latere. Deinde tertium latus quod semper reperitur certus quadratorum numerus, potest æquari diuersimodè alicui cuborum numero cubico, vt in hypothesi Diophanti 2 Q. possunt æquari $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{27}$ C. $\frac{1}{64}$ C. &c. vt si ponas 2 Q. æquales $\frac{1}{8}$ C. fiet quæsitum triangulum 4112. 4080. 512. Necesse est autem hîc 2 Q. æquari alicui cuborum numero cubico minori quàm 2. quia cùm alterum latus positum sit 1 C. − 1 N. oportet vt 1 C. sit maior suo latere, quod accidet si 1 N. sit maior vnitate. Id autem continget si 2 Q. æquentur cuilibet cubo minori quàm 2. vt euidens est, quia valor Numeri reperitur diuidendo 2. per aliquem cubum. Si ergo cubus ille sit minor quàm 2. fiet vtique quotiens maior vnitate.

Hic etiam formabitur huiusmodi Canon.

Per quemlibet cubum minorem binario, diuide binarium, quotientem adde suo cubo, & deme à suo cubo, habebis hypotenusam, & vnum laterum. Tertium verò latus erit duplum quadrati quotientis eiusdem.

Sed & simili prorsus artificio licebit soluere huiusmodi quæstiones.

Inuenire triangulum rectangulum, vt vnum laterum circa rectum, sit quadratus, alterum quadratus absque latere: hypotenusa quadratus cum latere.

Esto hypotenusa 1 Q. + 1 N. vnum latus 1 Q. − 1 N. ergo à quadrato hypotenusæ auferendo lateris quadratum, manet tertij lateris quadratus 4 C. quod quia volumus esse quadratum, oportet vt quadratus ipsius sit quadratoquadratus. Igitur 4 C. æquantur quadratoquadrato. Esto 1 Q Q. fit igitur 1 N. 4. estque triangulum 20. 12. 16. vbi etiam necesse est 4 C. æquari alicui quadratoquadrato minori quàm 4. ob causam suprà explicatam. Et si ponas 4 C. æquari $\frac{1}{16}$ Q Q. fiet 1 N. 64. eritque triangulum 4160. 4032. 1024.

Hic finem impositurus eram nostris commentariis in hosce Diophanti Arithmeticorum libros, cùm venit in mentem, multa alia, eaque non iniucunda proponi posse de triangulis rectangulis problemata, quæ huic libro subiicere non abs re visum est, ab illis sumentes exordium quæ determinationes varias de lateribus, vel de ipsa trianguli area docent.

PROBLEMA PRIMVM.

Dato ambitu trianguli, inuenire terminos intra quos consistere debet hypotenusa. Datus ambitus esto 10.

Primum certum est hypotenusam, minorem esse debere semisse dati ambitus, eò quod cuiuslibet trianguli latus, minus est duobus reliquis simul. Quare maior quæsitorum terminorum est 5. exclusiuè. Vt autem habeatur minor terminus, ponatur hypotenusa 1 N. ergo reliqua latera simul erunt 10 – 1 N. Quare vt fiat triangulum rectangulum, oportet diuidere 10 – 1 N. in duos numeros, quorum quadrati simul conficiant 1 Q. Quod vt fieri possit per Canonem trigesimæ primi, constat oportere, vt duplum summæ quadratorum, putà 2 Q. superet quadratum summæ duorum numerorum, nempè 100 – 20 N. + 1 Q. Quare sublatis vtrimque æqualibus, & addito defectu, fit 1 Q. + 20 N. maior quàm 100. ex hac autem æquatione fit 1 N. ℞ 200 – 10. Ergo certum est hypotenusam, non posse esse minorem quàm ℞ 200 – 10. Quapropter ℞. 200 – 10. est minor terminus inclusiuè. Dico inclusiuè, quia hypotenusa poni potest ℞ 200 – 10. si videlicet latera circa rectum ponantur æqualia. Nam conditio ad trigesimam primam primi apposita, eatenus locum habet, quatenus inæquales numeri quæruntur, vt ibi adnotauimus. Ex his igitur elici potest huiusmodi Canon.

Semissis dati ambitus est maior terminus exclusiuè. Et si sumas duplum quadrati eiusdem ambitus, & ab illius latere auferas ipsum ambitum, residuum erit minor terminus inclusiuè.

Itaque si in rationalibus numeris ipsum minorem terminum exhiberi cupias, id fiet per approximationem hac arte. Quia vt constat ex suprà dato Canone, minor terminus hypotenusæ respectu ambitus, est ℞ 2 Q. – 1 N. sume latus proximum de 2 Q. putà $\frac{99}{70}$ N. & hinc aufer 1 N. restat $\frac{29}{70}$ N. Quare talem habeto regulam.

Ducito datum ambitum in 29. productum diuide per 70. orietur minor terminus quæsitus.

Vt data circumferentia 10. ducito 10 in 29. fit 290. quem diuide per 70. fit minor terminus quæsitus 4 $\frac{1}{7}$. Quare dices dato ambitu 10. hypotenusam fore minorem quàm 5. non minorem quàm 4 $\frac{1}{7}$.

PROBLEMA II.

Dato ambitu trianguli rectanguli, inuenire terminos summæ laterum circa rectum.

Ex præcedente pendet hæc quæstio, quia enim summa laterum circa rectum, vna cum hypotenusa, conficit totum ambitum, patet terminos summæ laterum circa rectum respondere terminis hypotenusæ, ita vt ab ambitu trianguli auferendo sigillatim terminos hypotenusæ, relinquantur termini summæ laterum. Sic posito ambitu 10. cùm per præcedentem fiant termini hypotenusæ, 5. & 1. ℞ 200 – 10. si vtrumque auferas à toto ambitu 10. remanebunt termini summæ laterum circa rectum, nimirum minor exclusiuè 5. inclusiuè 20 – ℞ 200.

Vnde Canon.

Semissis dati ambitus est minor terminus exclusiuè, & si à duplo ambitus, auferas latus dupli quadrati ipsius ambitus, residuum erit maior terminus inclusiuè.

Fiet igitur terminus respectu ambitus 2 N. – ℞ 2 Q. seu per approximationem $\frac{41}{70}$ N. vnde regula.

Ducito datum ambitum in 41. productum diuide per 70. orietur maior terminus quæsitus.

Vt dato ambitu 10. ducito 10. in 41. fit 410. quem diuide per 70. fit maior terminus quæsitus 5 $\frac{6}{7}$. Oportet ergo summam laterum circa rectum cadere inter 5. & 5 $\frac{6}{7}$.

PROBLEMA III.

Dato ambitu, inuenire terminos aggregati ex hypotenusa, & ex altero laterum. Ambitus esto 12.

Primo patet maiorem terminum exclusiuè esse ipsum ambitum 12. potest enim aggregatum hypotenusæ & alterius lateris, statui quilibet numerus infrà 12. & quantumuis exiguus numerus relinquatur pro tertio latere, perfici poterit triangulum. Minor vero terminus est 6. semissis ipsius 12. Quod sic probatur. Quia quadratus ipsius ambitus 12. [1] æquatur duplo producti ex aggregato hypotenusæ & baseos, in aggregatum hypotenusæ & perpendiculi, semissis eiusdem quadrati, puta 72. æquabitur producto ex aggregato eodem in idem aggregatum. At 72. fit vt patet, ex 12. in suum semissem 6. Quare si 72. diuidatur per 6. fit quotiens 12. & si 72. diuidatur per numerum minorem quàm 6. fit quotiens maior quam 12. Euidens ergo est aggregatum hypotenusæ & baseos non posse esse 6. vel minorem quàm 6. alioquin sequeretur aggregatum hypotenusæ & perpendiculi esse 12. vel maius quàm 12. Quod est impossibilè cùm totus ambitus ponatur 12. Itaque fiet breuissimus Canon.

[1] 19. 3. poris.

Ipse ambitus, & eius semissis sunt quæsiti termini exclusiuè.

PROBLEMA

PROBLEMA IV.

Dato ambitu inuenire maximum areæ terminum.

Datus ambitus esto 10.

Inueniatur per secundam harum maximus terminus summæ laterum circa rectum, puta 20 − ℞ 200. & huius quadratus esto 600 − ℞ 320000. cuius octaua pars fit 75. − ℞ 5000. dico hunc esse maximum areæ terminum; quia enim octaua pars alicuius quadrati æquatur semissi quadrati à latere subduplo lateris propositi quadrati, erit 75 − ℞ 500. semissis quadrati à semisse ipsius 20 − ℞ 200. puta semissis quadrati ipsius 10 − ℞ 50. Itaque quoniam quadratus semissis alicuius numeri [a] maior est producto duarum quarumlibet inæqualium partium eiusdem numeri, erit quadratus ipsius 10 − ℞ 50. maior producto duarum quarumlibet inæqualium partium, in quas secari possit 20 − ℞ 200. quare cùm area trianguli sit semissis producti duorum laterum, quorum summa 20 − ℞ 200. non poterit area maior esse semisse quadrati ipsius 10 − ℞ 50. hoc est non poterit esse maior quàm 75 − ℞ 500. Hinc ergo fiet huiusmodi Canon. a. 2. porism.

A dodrante quadrati dati ambitus, aufer latus quadratum semissis quadratoquadrati eiusdem ambitus, residuum erit quæsitus terminus.

Proinde si libet in rationalibus quæsitum terminum præscribere, cùm ex dato Canone area respectu ambitus sit $\frac{3}{4}$ Q. − ℞ $\frac{1}{2}$ QQ. sume proximum latus de $\frac{1}{2}$ QQ. nempe $\frac{99}{140}$ Q. quem aufer à $\frac{3}{4}$ Q. superest $\frac{3}{70}$ Q. Hinc ergo formabitur Canon.

Ducito quadratum ambitus in 3. productum diuide per 70. orietur areæ terminus.

Sic in data hypothesi ducito quadratum ipsius 10. puta 100. in 3. fiet 300. quem diuide per 70. fiet 4 $\frac{2}{7}$. quæsitus areæ terminus.

Non præscribitur autem minimus terminus areæ, quia dari non potest. Etenim summa laterum circa rectum, semper diuidi poterit in duos numeros, quorum mutuo ductu fiat quantumlibet exiguus numerus, vt constat ex conditione apposita trigesimæ primi, quæ vt quæstio sit possibilis, requirit tantùm quadratum summæ maiorem esse quadruplo producti. Vnde euidens est, quò minor erit productus, eò magis solui posse quæstionem.

PROBLEMA V.

Data hypotenusa præscribere terminos summæ laterum circa rectum.

Esto hypotenusa 5.

Quoniam ex conditione apposita trigesimæ primæ primi, oportet duplum quadrati hypotenusæ superare, vel saltem æquare quadratum summæ laterum circa rectum, cùm duplum quadrati 5. sit 50. non poterit summa laterum circa rectum excedere ℞ 50. sed eadem summa laterum circa rectum debet superare hypotenusam, vt duo trianguli latera simul sint maiora reliquo. Igitur quæsiti termini sunt 5. exclusiuè, & ℞ 50. inclusiuè. Hinc fiet Canon.

Ipsa hypotenusa est minimus terminus. At latus dupli quadrati hypotenusæ est maximus terminus.

Quia ergo respectu hypotenusæ maximus terminus summæ laterum circa rectum est ℞ 2 Q. & latus proximum de 2 Q. est $\frac{99}{70}$ N. hunc habeto Canonem.

Ducito hypotenusam in 99. productum diuide per 70. orietur quæsitus terminus.

Vt in data hypothesi ducito 5. in 99. fit 495. quem diuide per 70. fit terminus quæsitus 7 $\frac{1}{14}$.

PROBLEMA VI.

Data summa laterum circa rectum præscribere terminos hypotenusæ.

Sit summa laterum circa rectum 6.

Igitur ex dictis ad præcedentem quadratus ipsius 6. puta 36. non debet excedere duplum quadrati hypotenusæ. Quare hypotenusa non potest esse minor quàm ℞ 18. Debet autem eadem esse minor quàm summa laterum 6. Ergo quæsiti termini sunt 6. exclusiuè, & ℞ 18. inclusiuè. Vnde formatur Canon.

Ipsa summa laterum circa rectum est maximus terminus exclusiuè. At latus semissis quadrati eiusdem summæ laterum, est minimus terminus inclusiuè.

Quoniam igitur respectu summæ laterum circa rectum, sit hypotenusæ minimus terminus ℞ $\frac{1}{2}$ Q. cùm proximum latus de $\frac{1}{2}$ Q. sit $\frac{70}{99}$ N. hanc habe regulam.

Ducito summam laterum circa rectum in 70. productum diuide per 99. orietur minimus terminus hypotenusæ.

Vt in data hypothesi ducito 6. in 70. fit 420. quem diuide per 99. fit quæsitus terminus hypotenusæ 4 $\frac{8}{11}$.

PROBLEMA VII.

Data hypotenuſa præſcribere totius ambitus terminos.

Sit data hypotenuſa 5.

Inueniantur per quintam termini laterum circa rectum, puta 5. & ℞ 50. qui addantur ſigillatim ipſi hypotenuſæ 5. fient quæſiti termini 10. excluſiuè, & 5 + ℞ 50. incluſiuè. Vnde Canon.

Duplum ipſius hypotenuſæ eſt minimus terminus excluſiuè. At aggregatum ex hypotenuſa & latere dupli quadrati eiuſdem hypotenuſæ, eſt maximus terminus incluſiuè.

Cùm ergo maximus ambitus terminus reſpectu hypotenuſæ ſit 1 N. + ℞ 2 Q. & ℞ 2 Q. per approximationem ſit $\frac{99}{70}$ N. inuenietur quæſitus terminus in rationalibus hac arte.

Ducito hypotenuſam in 169. productum diuide per 70. orietur maximus circumferentiæ terminus.

Sic in data hypotheſi ducito 5. in 169. fit 845. quem diuide per 70. fiet 12 $\frac{1}{14}$. quæſitus terminus.

PROBLEMA VIII.

Data ſumma laterum circa rectum, præſcribere circumferentiæ terminos.

Sit data ſumma 6.

Inueniantur per ſextam hypotenuſæ termini, puta 6. & ℞ 18. qui addantur ſigillatim datæ ſummæ laterum 6. fient quæſiti circumferentiæ termini, puta 12. excluſiuè & 6 + ℞ 18. incluſiuè. vnde Canon.

Duplum ſummæ laterum circa rectum, eſt maximus terminus excluſiuè. At aggregatum ex ſumma laterum, & ex latere ſemiſsis quadrati eiuſdem ſummæ, eſt mininus terminus incluſiuè.

Cùm ergo minimus circumferentiæ terminus, reſpectu ſummæ laterum circa rectum, ſit 1 N. + ℞ $\frac{1}{2}$ Q. & ℞ $\frac{1}{2}$ Q. per approximationem ſit $\frac{99}{140}$. Inuenietur quæſitus terminus in rationalibus hoc pacto.

Ducito ſummam laterum in 239. productum diuide per 140. orietur minimus circumferentiæ terminus.

Sic in data hypotheſi ducito 6. in 239. fit 1434. quem diuide per 140. fiet quæſitus terminus 10 $\frac{17}{70}$.

PROBLEMA IX.

Data ſumma laterum circa rectum, inuenire maximum areæ terminum.

Eſto data ſumma 4.

Sume quadratum datæ ſummæ, puta 16. huius octaua pars nempe 2. eſt quæſitus areæ terminus, vt demonſtratum eſt quarta harum.

PROBLEMA X.

Data hypotenuſa inuenire maximum areæ terminum.

Data hypotenuſa eſto 6.

Sume quadratum datæ hypotenuſæ, puta 36. huius quarta pars nempe 9. eſt quæſitus areæ terminus. Nam per quintam duplum quadrati hypotenuſæ debet ſuperare, vel ſaltem æquare quadratum ſummæ laterum circa rectum. Quare quadratus ſummæ laterum circa rectum, ad maximum eſt 72. cuius octaua pars per præcedentem eſt maximus areæ terminus. At octaua pars de 72. eſt quarta pars ſemiſſis ipſius 72. puta ipſius 46. Igitur patet propoſitum.

PROBLEMA XI.

Data area inuenire minimum terminum ſummæ laterum circa rectum.

Area eſto 6.

Sume octuplum areæ, puta 48. huius latus nempe ℞ 48. eſt minimus terminus ſummæ laterum circa rectum, vt conſtat ex quarta, & nona.

PROBLEMA XII.

Data area inuenire minimum terminum hypotenuſæ. Area eſto 6.

Sume quadruplum areæ, puta 24. huius latus nimirum ℞ 24. eſt minimus hypotenuſæ terminus, vt conſtat ex quinta, & decima.

PROBLEMA XIII.

Data area præscribere minimum ambitus terminum. Area esto 6.

Sumantur per duas præcedentes minimi termini summæ laterum & hypotenusæ, puta ℞ 48. & ℞ 24. horum summa ℞ 48. + ℞ 24. est quæsitus circumferentiæ terminus, vt euidens est.

PROBLEMA XIV.

Triangulum rectangulum in rationalibus constituere, vt summa laterum circa rectum sit datus numerus.

Summa laterum circa rectum esto 8.

Ponatur vnum latus 1 N. erit alterum 8 − 1 N. cùm ergo horum quadrati simul debeant æquari quadrato hypotenusæ, fiet summa quadratorum 64 − 16 N. + 2 Q. æqualis quadrato, cuius latus ponatur 8 − tot numeris qui excedant 2. vt scilicet fiat 1 N. minor quàm 8. quia latus alterum positum est 8 − 1 N. fingatur ergo latus prædictum 8 − 3 N. fiet quadratus 64 − 48 N. + 9 Q. æquales 64 − 16. N. + 2 Q. vnde fit 1 N. $\frac{32}{7}$. vnum laterum circa rectum, estque alterum $\frac{24}{7}$. ipsa hypotenusa $\frac{40}{7}$ Hinc elicitur facilis Canon.

Sume quemlibet numerum maiorem binario, inde aufer 1. residui duplum ducito in datam summam; productum diuide per quadratum sumpti numeri binario multatum, orietur vnum laterum circa rectum.

PROBLEMA XV.

Inuenire triangulum rectangulum in rationalibus, vt eius ambitus sit datus numerus.

Esto ambitus 20.

Pone latera quæsiti trianguli 3 N. 4 N. 5 N. fit summa 12 N. æqualis 20. est ergo 1 N. $\frac{5}{3}$. & quæsitum triangulum 5. 6 $\frac{2}{3}$. 8 $\frac{1}{3}$. & sic infinitæ reperientur solutiones si loco 3. 4. 5. deligantur alia atque alia triangula non similia. Sed & licebit inuenire triangulum simile cuicunque dato triangulo rectangulo, eodem numero ambitus manente.

Aliter sume semissem quadrati ipsis 20. puta 200. & statue aggregatum hypotenusæ & baseos quemlibet numerum inter 20. & eius semissem 10. ob ea quæ demonstrata sunt tertia harum. Verbi gratia pone tale aggregatum 15. erit ergo perpendiculum 5. At diuidendo 200. per 15. quotiens 13 $\frac{1}{3}$. erit aggregatum hypotenusæ & perpendiculi per decimam nonam tertij porismatum. Quare si inde auferas perpendiculum, puta 5. manebit hypotenusa 8 $\frac{1}{3}$. quam si subtrahas à 15. fiet basis 6 $\frac{2}{3}$.

PROBLEMA XVI.

Dato ambitu, & data area trianguli rectanguli, inuenire triangulum.

Esto ambitus 40. Area 60.

Pone hypotenusam 1 N. ergo latera circa rectum simul sunt 40. − 1 N. cuius quadratus 1600 − 80. N. + 1 Q. ' æquatur quadratis laterum circa rectum, & duplo plani sub ipsis contento, hoc est quadrato hypotenusæ, & quadruplo areæ. Quare 1 Q. + 240. æquantur 1600 − 80 N. + 1 Q. Vnde fit 1 N. 17. Ipsa scilicet hypotenusa. Igitur summa laterum circa rectum est 23. Quamobrem duplici via inueniri possunt ipsa latera, diuidendo scilicet 23. in duas partes, quarum quadrati simul efficiant 289. per trigesimam primam primi, vel in duas partes quarum mutuo ductu fiat 120. per trigesimam primi, & vtroque modo reperientur latera 15. & 8. Hinc fit Canon. *4. secundi.*

A quadrato ambitus aufer quadruplum areæ, residuum diuide per duplum ambitus, orietur hypotenusa.

PROBLEMA XVII.

Dato ambitu, & solido sub tribus lateribus, inuenire triangulum.

Esto ambitus 12. solidus 60.

Pone hypotenusam 1 N. erunt latera circa rectum simul 12 − 1 N. At planus sub iisdem lateribus $\frac{60}{1N}$. Quadratus autem summæ laterum circa rectum est 144. − 24 N. + 1 Q. vnde si auferas quadratos ipsorum laterum, hoc est illis æqualem quadratum hypotenusæ, relinquetur 144 − 24 N. duplum plani sub lateribus. Igitur huius dimidium, puta 72 − 12 N. æquatur $\frac{60}{1N}$. Vnde fit 1 N. 5. hypotenusa scilicet, est ergo summa laterum circa rectum 7. & planus sub ipsis 12. vnde etiam vt suprà duplici via, nimirum per trigesimam vel per trigesimam primam primi inuenies latera 3. & 4. Hinc elicietur facilis Canon.

Diuide datum solidum per datum ambitum, quotientem aufer à quadrato quadrantis ipsius ambitus, residui latus adde eidem quadranti, fiet hypotenusa.

PROBLEMA XVIII.

Dato vno laterum circa rectum, & plano sub altero latere & hypotenusa, inuenire alterum latus & hypotenusam.

Esto alterum latus 4. Planus sub altero & hypotenusa 15. faciat.

Ponatur latus quæsitum 1 N. ergo hypotenusa est $\frac{15}{1N}$. cuius quadratus $\frac{225}{1Q}$. æquatur quadratis laterum, puta 16 + 1 Q. & tandem 1 QQ. + 16 Q. æquantur 225. & fit 1 N 3. quæsitum latus. Est ergo hypotenusa 5. Sic poni potest hypotenusa 1 N. alterum latus $\frac{15}{1N}$. & fiet 1 Q. æqualis 16 + $\frac{225}{1Q}$. & tandem 1 QQ. æquabitur 16 Q. + 225. vnde fiet 1 N. 5. Hinc formatur Canon.

Quadrato dati plani adde quadratum semissis quadrati dati lateris, summæ latus adde vel adime eidem semissi quadrati dati lateris, proueniet hinc quadratus quæsiti lateris, inde quadratus hypotenusæ.

PROBLEMA XIX.

Inuenire triangulum rectangulum, cuius ambitus sit quadratus, & idem ambitus siue adsumpta, siue detracta area quadratum faciat.

Primùm quærere oportet triangulum rectangulum, cuius ambitus sit quadratus numerus, & fiet triangulum, per decimam quintam, cuius ambitus æqualis erit cuilibet dato quadrato. Esto ergo tale triangulum 36. 48. 60. cuius ambitus est quadratus 144. & constituatur in quadratis, sintque quæsiti trianguli latera 36 Q. 48 Q. 60 Q. Superest vt ambitus siue adsumpta siue detracta area faciat quadratum. Quia ergo in quolibet triangulo rectangulo quadratus semissis hypotenusæ siue illi addatur, siue adimatur area facit quadratum, vt ex demonstratis ad vigesimam secundam tertij facilè infertur, sumatur quadratus semissis hypotenusæ, puta 900 QQ. & is statuatur æqualis ambitui, puta 144 Q. fiet ergo 1 N. $\frac{2}{5}$. & erunt quæsiti latera trianguli $\frac{144}{25}$. $\frac{192}{25}$. $\frac{240}{25}$ & constat.

PROBLEMA XX.

Inuenire triangulum rectangulum, cuius area sit datus numerus. Oportet autem vt quadratus areæ duplicatæ additus alicui quadratoquadrato, faciat quadratum.

Sit A datus areæ Numerus, cuius duplum B. cuius quadratus F. quo addito ad quadratoquadratum D. fiat quadratus E. Oportet inuenire triangulum cuius area sit A. sumatur K latus quadratoquadrati D. & sit ipsius K quadratus C. diuisoque A. per K producatur G. cuius duplum esto H. Quia ergo ducto K in G. producitur A. est A ad G sicut K ad vnitatem, sed sicut K ad vnitatem, ita est C ad K. Igitur vt est C ad K. sic A ad G. & permutando vt C ad A. sic K ad G. sed vt A ad B. sic est G ad H cùm vtrobique sit ratio subdupla, ergo ex æquo vt C. ad B. sic est K ad H. sed C B sunt latera circa rectum trianguli rectanguli, cùm eorum quadrati D F simul conficiant quadratum E. Igitur & K H sunt latera circa rectum trianguli rectanguli, cuius vtrique area est A. cùm A producatur ex K in G. semissem ipsius H. Quamobrem constat propositum.

D 81.	E 225.	F 144.
C 9	A 6.	B 12.
K 3.	G 2.	H 4.

t. 3. porism.

Porro conditio adiecta non solùm sufficiens est, sed & necessaria, ita vt dari non possit triangulum rectangulum, quin quadratus areæ duplicatæ additus alicui quadratoquadrato, faciat quadratum. Quod eadem facilitate probatur. Sint enim K H. latera circa rectum trianguli dati, & ipsius H. dimidium sit G quo ducto in K fiat area A. cuius duplum B. cuius quadratus F. dico F. additum alicui quadratoquadrato facere quadratum, sit enim C quadratus ipsius K. & ipsius C. quadratus, hoc est quadratoquadratus ipsius K esto D. Ostendetur vt suprà esse C ad B vt K ad H. Quare cùm K H sint latera circa rectum trianguli rectanguli erunt & C B. latera circa rectum trianguli. Proinde quadrati ipsorum, puta D F. simul component quadratum. Quod erat propositum.

OBSERVATIO D. P. F.

Area trianguli rectanguli in numeris non potest esse quadratus, huius theorematis à nobis inuenti demonstrationem quam & ipsi tandem non sine operosâ &

laborioſâ meditatione deteximus, ſubiungemus. Hoc nempè demonſtrandi genus miros in arithmeticis ſuppeditabit progreſſus, ſi area trianguli eſſet quadratus darentur duo quadratoquadrati quorum differentia eſſet quadratus: Vnde ſequitur dari duo quadrata quorum & ſumma, & differentia eſſet quadratus. Datur itaque numerus compoſitus ex quadrato & duplo quadrati æqualis quadrato, ea conditione vt quadrati eum componentes faciant quadratum. Sed ſi numerus quadratus componitur ex Quadrato & duplo alterius quadrati eius latus ſimiliter componitur ex quadrato & duplo quadrati vt facillime poſſumus demonſtrare.

Vnde concludetur latus illud eſſe ſummam laterum circa rectum trianguli rectanguli & vnum ex quadratis illud componentibus efficere baſem & duplum quadratum æquari perpendiculo.

Illud itaque triangulum rectangulum conficietur à duobus quadratis quorum ſumma & differentiaſ erunt quadrati. At iſti duo quadrati minores probabuntur primis quadratis primò ſuppoſitis quorum tam ſumma quam differentia faciunt quadratũ. Ergo ſi dentur duo quadrata quorum ſumma & differentia faciant quadratum, dabitur in integris ſumma duorum quadratorum eiuſdem naturæ priore minor. Eodem ratiocinio dabitur & minor iſtâ inuenta per viam prioris & ſemper in infinitum minores inuenientur numeri in integris idem præſtantes: Quod impoſſibile eſt, quia dato numero quouis integro non poſſunt dari infiniti in integris illo minores. Demonſtrationem integram & fuſius explicatam inſerere margini vetat ipſius exiguitas.

Hac ratione deprehendimus & demonſtratione confirmauimus nullum numerum triangulum præter vnitatem æquari quadratoquadrato.

SCHOLIVM.

Hinc patet, idem oſtendi poſſe de quadratoquadrato ipſius H quod oſtenſum eſt de quadratoquadrato ipſius K. Quare verum eſt in quolibet triangulo rectangulo quadratum areæ duplicatæ additum quadratoquadrato cuiuſlibet lateris circa rectum efficere quadratũ. Vt in data hypotheſi 144. cum quadratoquadratis ipſorum 3. & 4. puta cum 81. & 256. facit quadratos 225. & 400. ſed & conditionis adiectæ neceſſitas per algebram ſic demonſtrabitur. Data area cuiuſlibet trianguli rectanguli puta 6. ponatur vnum laterum circa rectum 1. N. erit alterum $\frac{12}{N}$. Vt autem ſit triangulum rationale oportet, vt ſumma quadratorum, puta 1 Q. + $\frac{144}{1 Q}$. æquetur quadrato, & omnia ducendo in 1 Q. fiet 1 QQ. + 144. æqualis quadrato. Vnde patet quadratoquadratum cuiuſlibet lateris circa rectum adſcito quadrato areæ duplicatæ, debere conficere quadratum.

Porrò hanc ipſam quæſtionem tractans Franciſcus Vieta Zetetico 16. libri quarti; duas alias ei præfigit conditiones. Prima eſt. Oportet vt area addendo aliquem quadratoquadratum, fiat quadratoquadratus, vel vt ducendo aream in aliquem quadratum, & productum addendo alicui quadratoquadrato, fiat quadratoquadratus. Et hæc conditio, ſufficiens quidem eſt, vt demonſtrat Vieta, ſed an ſit neceſſaria meritò quis ambigat. Sanè arbitror cùm eius neceſſitatem demonſtrare non poſſet ſummi vir ingenij. ſecundam excogitaſſe. Secunda conditio eſt. Oportet vt datus areæ numerus, ſit cubus ſuo multatus latere, vel vt idem per quadratum aliquem multiplicatus, ſit cubus ſuo multatus latere. Et hæc conditio non ſolùm ſufficiens eſt, vt oſtendit Vieta, ſed etiam neceſſaria vt demonſtrabimus, ne tanti viri commentum labare videatur. Quamuis tutius ſit hanc conditionem ita proponere. Oportet vt areæ numerus ſit cubus ſuo multatus latere, latusve ſuo multatum cubo. Vel vt eo per aliquem quadratum multiplicato vel diuiſo, fiat cubus ſuo multatus latere, latusue ſuo multatum cubo. Huius autem rei ratio eſt, quia quodlibet triangulum rectangulum, poteſt concipi ſimile alteri triangulo, quod formatum ſit ab vnitate, & ab alio quouis quadrato, cuius quadrati ſi ponas latus 1 N. fiet trianguli hypotenuſa 1 Q. + 1. alterum laterum circa rectum 2 N. alterum 1 Q. − 1 vel 1 − Q. prout 1 N. ſupponitur maior vel minor vnitate. Quare fit area 1 C. − 1 N. vel 1 N. − 1 C. ita ſi fingas triangulum ab 1. & 4. modo tradito tertia tertij poriſmatum. Fient latera 3. 4. 5. Area verò 6. cubus ſcilicet 8. ſuo multatus latere. At ſi formes triangulum ab 1. & $\frac{1}{4}$. fiet triangulum $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{4}$. $\frac{5}{4}$. cuius area. $\frac{3}{8}$. eſt latus $\frac{1}{2}$ multatum ſuo cubo $\frac{1}{8}$.

Propoſito verò quolibet alio triangulo, cùm per quartam tertij poriſmatum, neceſſe ſit illud formari à duobus planis ſimilibus, hos planos ſumens, & vtrumque per minorem ipſorum ſigillatim diuidens, fient duo quotientes in eadem ratione, quorum minor erit vnitas, à quibus ſi formes triangulum, erit

9. 3. poris. *eius area, cubus suo multatus latere per suprà demonstrata.* [1] *Quia verò à proportionalibus numeris*
2. 3. poris. *formata triangula similia sunt, erit inuentum triangulum primo proposito simile.* [2] *Quare cùm similium triangulorum areæ sint in ratione duplicata laterum, si aream inuenti trianguli ducas in quadratum denominatoris proportionis laterum, fiet area propositi trianguli, & è conuerso diuidendo aream propositi trianguli per eundem quadratum, fiet area inuenti, seu cubus suo multatus latere. Sic proposito triangulo 9. 12. 15. inuenies illud formari à planis similibus 3. & 12. quos diuidendo sigillatim per minorem ipsorum 3. fient in eadem ratione 1. & 4. quorum minor vnitas, à quibus si formes triangulum priori simile, puta 5. 4. 3. erit eius area 6. cubus suo multatus latere per suprà demonstrata. Cùm ergo prioris trianguli latera sint tripla laterum posterioris, erit area areæ noncupla. Quare diuidendo aream 54. per 9. fiet area 6. cubus suo multatus latere. Rursus proposito triangulo 39. 36. 15. cuius area 270. Inuenies formari triangulum à planis similibus 12. & 27. quos si diuidas sigillatim per minorem 12. fient 1. & $\frac{9}{4}$. à quibus finges triangulum priori simile $\frac{13}{4}$. $\frac{12}{4}$. $\frac{5}{4}$. cuius area $\frac{15}{8}$. est cubus $\frac{27}{8}$. suo multatus latere. Quia verò proportio laterum prioris trianguli ad latera posterioris est duodecupla, si per quadratum ipsius 12 puta per 144. diuidas aream 270. fiet vtique $\frac{15}{8}$. cubus suo latere multatus. Quod si inuentis planis similibus à quibus propositum triangulum formatum est, diuidas vtrumque per maiorem ipsorum, fient duo numeri in eadem ratione, quorum maior erit vnitas, à quibus si fingas aliud triangulum erit eius area latus suo multatum cubo, vt constat ex suprà demonstratis.*

Itaque quia diuisio in multiplicationem verti potest, & è conuerso. Nam verbi gratia diuidere 54. per 9. idem est atque multiplicare 54. per $\frac{1}{9}$. ferri potest Vieta limitatio. Et absolutè verùm est aream cuiuslibet trianguli rectanguli esse cubum suo multatum latere, vel inueniri simile triangulum cuius area sit cubus suo latere multatus.

PROBLEMA XXI.

Dato ambitu trianguli rectanguli, & perpendiculari ab angulo recto in hypotenusam demissa, inuenire triangulum.

Sit datus ambitus 60. perpendicularis 12. Ponatur hypotenusa 1 N. erit summa laterum circa re-
4. secundi. ctum 60 − 1 N. cuius quadratus 3600 − 120 N. + 1 Q. [3] æquatur quadratis ipsorum laterum, seu quadrato hypotenusæ, & duplo plani sub lateribus. Igitur 3600 − 120. N. est duplum plani sub late-
19. septimi. ribus, & 1800 − 60 N. est ipse planus sub lateribus. Quoniam verò, vt constat per octauam sexti, vt se habet hypotenusa ad vnum laterum, sic etiam se habet alterum latus ad perpendicularem, [4] erit planus sub hypotenusa, & sub perpendiculari, æqualis plano sub lateribus. At ex hypotenusa in perpendicularem fiunt 12 N. ergo 12 N. æquantur 1800 − 60 N. & fit 1 N. 25. ipsa scilicet hypotenusa. Quare facile est inuenire latera circa rectum, puta 20. & 15.

Hinc elicitur Canon.

Semissem quadrati dati ambitus diuide per aggregatum ex ambitu & ex perpendiculari, orietur hypotenusa.

PROBLEMA XXII.

Data area trianguli rectanguli, & perpendiculari sub angulo recto in hypotenusam demissa, inuenire triangulum.

Esto area 150. Perpendicularis 12. Ponatur vnum laterum circa rectum 1 N. erit ergo alterum $\frac{300}{1N}$.
8. sexti. Quoniam verò [1] vt est perpendicularis 12. ad vnum laterum circa rectum 1 N. sic est alterum $\frac{300}{1N}$. ad hypotenusam. Inuenietur per regulam proportionum hypotenusa 25. & reliqua latera 20. & 15.

Hinc Canon.

Diuide duplum areæ per perpendicularem, orietur hypotenusa.



ADDENDA COMMENTARIIS IN *Definitionem septimam & octauam.*

RETRACTANTI commentaria nostra occurrit mihi definitionem septimam ad mentem Diophanti accommodatius explicari posse, si accipiatur de fractionibus, in quibus superiores potestates per vnitates diuidi intelliguntur. Vt velit Diophantus, verbi gratia, ex $\frac{2}{1N}$. in $\frac{3}{1N}$. produci $\frac{6}{1Q}$. quemadmodum ex 2 N. in 3 N. producuntur 6 Q. & ex $\frac{3}{1N}$ in $\frac{4}{1Q}$ produci $\frac{12}{1C}$. eadem ratione, qua ex 3 N. in 4 Q. Producuntur 12 C. & sic de alijs. Sic enim vtraque definitio, septima scilicet & octaua de iisdem fractionibus accipientur, & tolletur ambiguitas illa, de qua ad definitionem octauam Diophantum criminabamur, semper enim apud Diophantum fractio numerica erit seu *ἀριθμοστὸν*, cùm vnitates per Numeros diuidentur, vt $\frac{3}{1N}$. & fractio Quadratica, seu *δυναμοστὸν*, cùm vnitates per quadratos diuidentur, vt $\frac{4}{1Q}$. & sic de alijs. Et sanè apparet ex reliquo opere ita sensisse Diophantum. Nam vbicumque *ἀριθμοστὸν* vel *δυναμοστὸν* vsurpat, huiusmodi fractiones intelligit. Verum erit nihilominus, quod ad definitionem septimam adnotauimus, nimirum eius demonstrationem, ab iis quæ demonstrauimus ad definitionem quartam, pendere omnino, vt per se manifestum est.

FINIS.

DIOPHANTI ALEXANDRINI

DE MVLTANGVLIS NVMERIS.

PROPOSITIO PRIMA.

QVILIBET numerorum à ternario per vnitatis incrementum progredientium ; multangulus est, primus ab vnitate, & habet tot angulos, quot ipse vnitatibus constat. Latus autem ipsorum est, proximus ab vnitate numerus, puta 2. est autem 3. triangulus. 4 quadratus. 5. quinquangulus, & sic deinceps. Cùm autem de quadratis euidens sit, ita eos constitui, quod nascantur numeri alicuius in seipsum multiplicatione ; exploratum est quemlibet multangulum multiplicatum aliquo numero secundum proportionem multitudinis angulorum eius, & adsumentem quadratum aliquem secundum proportionem multitudinis angulorum eius, apparere quadratum. Atque hoc nos demonstrabimus, ostendentes quomodo dato latere inueniatur qui poscitur multangulus ; & quomodo dato multangulo, latus accipitur. Prius autem ea demõstrabimus quæ ad hanc rem sumuntur.

Ἕκαστος τῶν ἀπὸ τῆς τριάδος ἀριθμῶν αὐξομένων μονάδι, πολύγωνός ἐστι πρῶτος ἀπὸ τῆς μονάδος. καὶ ἔχει γωνίας τοσαύτας, ὅσον ἐστι τὸ πλῆθος τῶν ἐν αὐτῷ μονάδων. πλευρά τε αὐτοῦ ἐστιν ὁ ἑξῆς τῆς μονάδος ἀριθμὸς, ὁ β΄. ἔσται δὲ ὁ μὲν γ΄ τρίγωνος, ὁ δὲ δ΄ τετράγωνος, ὁ δὲ ε΄. πεντάγωνος, καὶ τοῦτο ἑξῆς. Τῶν δὴ τετραγώνων προδήλων ὄντων, ὅτι καθεστήκασι τετράγωνοι διὰ τὸ γεγονέναι αὐτοὺς ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἐφ᾽ ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθέντος, ἐδοκιμάσθη ἕκαστος τῶν πολυγώνων πολλαπλασιαζόμενος ἐπί τινος ἀριθμοῦ κατὰ τὴν ἀναλογίαν τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν αὐτοῦ, καὶ προσλαβόντα τετράγωνόν τινα κατὰ τὴν ἀναλογίαν τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν αὐτοῦ φαίνεσθαι τετράγωνον. ὃ δὴ παραστήσομεν ὑποδείξαντες πῶς ἐκδοθείσῃ πλευρᾷ ὁ ἐπιταχθεὶς πολύγωνος εὑρίσκεται καὶ πῶς δοθέντι πολυγώνῳ ἡ πλευρὰ λαμβάνεται. προδείξομεν δὲ τὰ εἰς αὐτὰ λαμβανόμενα.

In Librum Diophanti de numeris multangulis Commentarij.

LAboriosissimis in libros sex Arithmeticorum commentariis exantlatis, superest nobis de numeris multangulis liber enodandus. In quo restituendo quantum desudauerim coniicere poterunt quotquot in eo percipiendo, vt à Xilandro nobis traditus est, operam aliquam impenderint. Sanè, vt omittam cætera quæ huc contulimus, non paruam à tyronibus gratiam promeriti sumus ob diagrammata singulis ferè propositionibus adjecta, quæ passim imperitus librarius, tanquam ad rem minimè pertinentia, prætermiserat, cùm tamen illorum ope destitutus, vel accerrimo qui sit præditus ingenio, Diophanti demonstrationes vix percipere possit.

IN PROPOSITIONEM PRIMAM.

HÆc propositio definitionis vel petitionis cuiusdam locum obtinet. Per eam enim supponit Diophantus, quemlibet numerum incipiendo à ternario esse polygonum, tot angulos continentem quot vnitatibus constat ipse numerus, verbi gratia 3. esse triangulum, 4. quadratum 5. pentagonum, 6. hexagonum, & sic in infinitum. Cuius rei ratio est, quia vnitates cuiuslibet

numeri æqualibus interuallis ita disponi possunt, vt repræsentent figuram totidem angulorum, & laterum æqualium, vt in apposito diagrammate videre est. Vnde etiam apparet, quod subiicit Diophantus nimirum horum omnium polygonorum latus esse proximum ab vnitate numerum, puta 2. vides enim in quolibet latere cuiuslibet polygoni contineri vnitates 2.

Quoniam vero ipsa vnitas virtualiter est omnis polygonus; est enim & triangulus, & quadratus, & pentagonus, quia horum omnium polygonorum proprietates ipsi vnitati conueniunt, idcirco ait Diophantus quemlibet numerum à ternario, esse polygonum in sua specie primum post vnitatem, verbi gratia 3. est primus triangulus post vnitatem, 4. primus quadratus, 5. primus pentagonus post vnitatem, & sic de alijs.

PROPOSITIO SECVNDA.

ε.....α.........β..δ...γ

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχωσιν, ὁ ὀκτάκις ὑπὸ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ μέσου, προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου τετράγωνον γίνεται τετράγωνος, οὗ ἡ πλευρὰ ἴση τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ μεγίστου καὶ δύο τῶν μέσων. Τρεῖς γὰρ ἀριθμοὶ οἱ αβ. βγ. βδ. τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερεχέτωσαν. δεικτέον ὅτι τὸ ὀκτάκις ὑπὸ αβ. βγ. μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ βδ. τετραγώνου ποιεῖ τετράγωνον οὗ ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῷ τε αβ. καὶ δυσὶ τοῖς βγ. ὅτι οὖν ὁ αβ. ἴσος ἐστὶ τοῖς βγ. γδ. διαιρεῖται ὁ ὀκτάκις ὑπὸ τῶν αβ. βγ. εἴς τε τὸν ὀκτάκις ἀπὸ τοῦ βγ. τετράγωνον καὶ εἰς τὸν ὀκτάκις ὑπὸ βγ. γδ. Καὶ πάλιν διαιρεῖται ἕκαστος τῶν εἰρημένων διχῶς, εἴς τε τὸν τετράκις ὑπὸ αβ. βγ. καὶ εἰς τὸν τετράκις ἀπὸ βγ. τετράγωνον καὶ τὸν τετράκις ὑπὸ βγ. γδ. ὁ δὲ τετράκις ὑπὸ βγ. γδ. μετὰ τοῦ ἀπὸ δβ. τετραγώνου γίνεται τετράγωνος ὁ ἀπὸ αβ. ζητητέον οὖν πῶς ὁ ἀπὸ τοῦ αβ. τετράγωνος, καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ αβ. βγ. καὶ ὁ τετράκις ἀπὸ τοῦ βγ. τετράγωνος συντεθέντες ποιοῦσι τετράγωνον. ἐὰν δὴ θῶμεν τῷ βγ. ἴσον τὸν αε. μεταβησόμεθα τὸν τετράκις ὑπὸ αβ. βγ. εἰς τὸν τετράκις ἀπὸ βα. αε. ὃς μιγεὶς τῷ τετράκις ἀπὸ γβ. τουτέστι τῷ ἀπὸ αε. ποιήσει ἴσον τῷ τετράκις ὑπὸ βε. εα. ὃς μιγεὶς τῷ ἀπὸ τοῦ αβ. τετραγώνῳ, γίνεται ἴσος τῷ ἀπὸ βε. εα. ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ· οἱ δὲ βε. εα. ἴσοι εἰσὶ τῷ τε αβ. καὶ δυσὶ τοῖς αε. τουτέστι δυσὶ τοῖς βγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε.....α.........β..δ...γ

E....A........B..D...G

SI fuerint tres numeri æqualibus interuallis se superantes, qui fit ex maximo in medium octies, adsumens minimi quadratum, facit quadratum, cuius latus æquale est composito ex maximo & medij duplo. sint enim tres numeri AB. BG. BD. æqualib. interuallis se superantes; Ostendendum est eum qui fit octies ex AB. in BG. vna cum quadrato ipsius BD. facere quadratum, cuius latus æquale est ipsi AB. & duobus BG. Quoniam ergo AB. æqualis est ipsis BG. GD. diuidetur qui fit octies ex AB. in BG. in eum qui fit octies ex BG. quadratum, & in eum qui fit octies ex BG. in GD. Et rursus diuiditur vnumquodque prædictorum bifariam, nimirum in eum qui fit quater ex AB. in BG. & in quadratum ex BG. quater, & in eum qui fit quater ex BG. in GE. At qui fit quater ex BG. in GD. vna cum quadrato ex DB. fit quadratus à latere AB. Quærendum igitur est, quomodo quadratus ex AB. & productus ex AB. in BG. quater, & quadratus ex BG. quater, compositi faciant quadratum. Itaque si ponamus ipsi BG. æqualem AE. traiiciemus eum qui fit quater ex AB. in BG. in eum qui fit quater ex BA. in AE. qui mixtus quadruplo quadrati ex GB. seu quadrati ex AE. facit æqualem quadruplo producti ex BE. in AE. qui mixtus quadrato ex AB. fit æqualis quadrato qui ex BE. EA. tanquam vna describitur. At ipsi BE. EA. æquales sunt ipsi AB. & duobus AE. seu duob. BG. quod erat ostendendũ.

E....A........B..D...G

IN SECVNDAM.

IN huius propositionis demonstratione, nulla insignis est difficultas. Tria tamen sunt quæ tyrones fortassis morari queant. Primum est quod ait Diophantus Quadratum ex AB. æquari qua-

E.....A.........B..D...G

druplo producti ex B G. in G D. vna cum quadrato ex B D. Quod ita probatur. Quoniam A B. supponitur æqualis summæ duorum B G. D G. quorum interuallum B D. [1] patet quadruplum producti ex B G. in D G. vnà cum quadrato interualli B D. æquale esse quadrato summæ ipsorum B G. D G. hoc est quadrato ipsius A B. Quinta 2. porif.

Secundum est, quod ait Diophantus quadruplum producti B A. in A E. vnà cum quadruplo quadrati ex A E. æquari quadruplo producti ex toto B E. in A E. Quod euidens est, quia [2] productus ex B E. in E A. æquatur producto ex B A. in A E. vnà cum quadrato ex A E. tertia 2.

Tertium est, quod ait Diophantus, quadruplum producti ex B E in A E, vna cum quadrato ex A B. æquari quadrato compositi ex B E. E A. Quod rursus patet per 5. 2. porismatum cùm A B. sit interuallum ipsorum B E. E A.

Potest autem hæc propositio & vniuersalius concipi, & breuius atque etiam facilius demonstrari, hoc pacto.

Si fuerint tres numeri in medietate arithmetica, octuplum producti ex medio in quemlibet extremorum, adsciscens quadratum alterius extremi, æquatur quadrato compositi ex medij duplo, & ex illo extremo qui in medium octies ductus est.

D 10.
A 2. B 5. C 8.

Sint tres numeri A B C. in medietate arithmetica, & sit D. duplum medij, dico octuplum producti ex B. in vnum extremorum C. vnà cum quadrato alterius extremi A. æquari quadrato compositi ex ipsis D C. Quia enim sunt in medietate arithmetica ipsi A B C. erit duplum medij, puta D. [3] æquale summæ extremorum A C. Quare ipsorum D C. interuallum erit A. Quadratus autem compositi ex ipsis D C. [4] æquatur quadratis ipsorum D C. & duplo producti ex D. in C. seu quadruplo producti ex B. in C. Quadrati autem ipsorum D C. [5] æquantur rursus duplo producti ex D. in C. seu quadruplo producti ex B in C. & quadrato interualli A. Igitur quadratus compositi ex ipsis D. C. æquatur octuplo producti ex B. in C. vnà cum quadrato ipsius A. Quod erat ostendendum. Eodem prorsus argumento probabitur octuplum producti ex B in A. vnà cum quadrato ipsius C. æquari quadrato compositi ex ipsis A D. Igitur ex omni parte constat propositum. quinta 1. porif. quarta 2. quarta 2. porif.

Aliter etiam Franciscus Vieta propositionem hanc demonstrauit lib. 8. variorum de rebus mathematicis responsorum, per ipsam scilicet Algebræ operationem hac arte. Sit minimus trium numerorum arithmeticæ medietatis A. & sit differentia B. erit ergo medius A + B. maximus vero A + B. bis & si ducatur medius A + B. in maximum A + B. bis fit A Quad. + A in B. ter + B Quad. bis. quod si sumatur octies, & producto addatur A Quad. fit vtique A Quad. nouies + A in B quater & vicesies + B Quad. sedecies. Hic autem numerus est quadratus à latere A. ter + B. quater vt euidens est. Et A ter + B quater æquatur composito ex maximo & medij duplo, cùm maximus sit A + B bis, & duplum medij sit A bis + B bis. Ergo constat propositum.

Eodem artificio demonstrabitur altera nostræ propositionis pars. Ducatur enim minimus A in medium A + B octies, & producto addatur quadratus maximi, fiet A Quad. nouies + A in B. duodecies + B Quad. quater qui numerus quadratus est à latere A ter + B bis quod æquatur minimo & medij duplo.

PROPOSITIO TERTIA.

B.A.. G..D.. E

SI sint quotcunque numeri æquali interuallo se superantes, interuallum maximi & minimi, multiplex est interualli ipsorum, secundum numerum vnitate minorem eo qui multitudinem propositorum numerorum exprimit. Sint enim quotlibet numeri A B. B G. B D. B E. æquali se superantes interuallo. Ostendendum est, quod interuallum ipsorum A B. B E. multiplex est interualli ipsorum A B. B G. secundum numerum vnitate minorem multitudine ipsorum. AB. B G. B D. BE. Quoniam enim expositi sunt AB. BG. BD. BE. æquali interuallo se superantes, erunt ipsi

β.α..γ..δ..ε

Ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν πολλαπλασίων ἐστὶ κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν ἐκκειμένων ἀριθμῶν. ἔστωσαν γὰρ ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ αβ. βγ. βδ. βε. ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ. δεικτέον ὅτι ἡ τῶν αβ. βε. ὑπεροχή, τῆς τῶν αβ. βγ. ὑπεροχῆς πολλαπλασίων ἐστὶ κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τῶν αβ. βγ. βδ. βε. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκεινται οἱ αβ. βγ. βδ. βε. ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, οἱ ἄρα αγ. γδ. δε. ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις. ὁ ἄρα εα τοῦ αγ. πολλαπλάσιός ἐστι

κατὰ τὸ πλῆθος τῶν αγ. γδ. δε. τὸ δὲ πλῆθος τῶν αδ. δδ. δε. τοῦ πλήθους τῶν αβ. βγ. βδ. βε. μονάδι ἐλάσσων ἐστίν. ὥστε τὸ εα, τῶν αγ. πολλαπλάσιόν ἐστι κατὰ τὴν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν αβ. βγ. βδ. βε. καὶ ἔστι ὁ μὲν αε. ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, ὁ δὲ αγ. ἐστὶν αὐτῶν μία ὑπεροχή.

A G. G D. D E. æquales inter se. Quamobrem ipse E A. ipsius A G. multiplex est, secundum multitudinem ipsorum A G. G D. D E. Atqui multitudo ipsorum A G. G D. D E. est vnitate minor multitudine ipsorum A B. B G. B D. B E. Igitur E A. ipsius A G. multiplex est secundum numerum vnitate minorem multitudine ipsorum A B. B G. B D. B E. est autem A E. interuallum maximi & minimi, At A G. est vnum interuallum ipsorum numerorum.

IN TERTIAM.

Nihil est hic difficultatis. Nam demonstratio Diophanti breuis est, & dilucida.

PROPOSITIO QVARTA.

Ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος συντεθέντες καὶ πολλαπλασιασθέντες ἐπὶ τὸ πλῆθος αὐτῶν, ποιοῦσιν ἀριθμὸν διπλάσιον τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἐκτεθέντων. ἔστωσαν γὰρ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν. οἱ α. β γ. δ. ε. ζ. ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ. δεικτέον ὅτι συναμφότερος ὁ αζ. πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸ πλῆθος τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. ποιεῖ τινα ἀριθμὸν, ὅς ἐστι διπλασίων τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. τὸ γὰρ πλῆθος τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. ἤ κατὰ ἀρτιόν ἐστιν ἢ περισσόν. ἔστω πρότερον ἄρτιον, καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ ἐκτεθέντες, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ηθ. ἀριθμῷ ὥστε ἄρτιός ἐστιν ὁ ηθ. τετμήσθω δίχως τῷ κ. καὶ διῃρήσθω ὁ κ. εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας κατὰ τὰ λ. μ. Καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει ὁ ζ. τοῦ δ. τούτῳ ὑπερέχει καὶ ὁ γ. τοῦ α. συναμφότερος ἄρα ὁ ζα. συναμφοτέρῳ τῷ γδ. ἴσος ἐστίν. ἀλλὰ συναμφότερος ὁ ζα. ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα. καὶ τοῦ ηλ. ὥστε καὶ ὁ γδ· ἴσος ἔσται τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα. καὶ τοῦ λμ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ συναμφότερος ὁ εβ. ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα. καὶ τοῦ μκ. ὥστε καὶ ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. ἴσος τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα καὶ τοῦ ηκ. τοῦ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα. καὶ τοῦ ηκ. διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα, καὶ τοῦ ηθ. ὥστε καὶ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα καὶ τοῦ ηθ. τουτέστι τοῦ πλήθους τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

α. β. γ. δ. ε. ζ.

η. λ. μ. κ...θ

SI sint quocunque numeri æquali interuallo progredientes, summa maximi & minimi ducta in numerum multitudinis ipsorum, numerum producit duplum summæ expositorum numerorum. Sunto numeri quotcunque A.B. C D.E F. æquali interuallo progredientes. Ostendendum est summam duorum A F. ductam in numerum multitudinis ipsorum A. B. C.D.E.F. producere numerum qui duplus est ad summam ipsorum A. B. C. D. E. F. etenim numerus multitudinis ipsorum A. B.C.D. E.F. vel par est, vel impar. Sit primùm par, & quot sunt expositi numeri, tot vnitates sint in ipso H G. erit ergo H G. par. Quare secetur bifariam in K, & diuidatur H K. in suas vnitates per L. & M. Tunc quia F. superat D. eodem numero, quo C. superat A. erit summa duorum F A. æqualis summæ duorum C D. Atqui summa duorum F A. æqualis est producto ex ipsamet in vnitatem H L. Igitur & summa duorum C D. æquabitur producto ex summa duorum F A. in vnitatem L M. Ob hæc eadem summa duorum E B. æqualis est producto ex summa duorum F A. in vnitatem M K. Quamobrem summa omnium A.B.C. D.E. F. æqualis est producto ex summa duorum F A. in H K. At producti ex summa duorum F A. in H K. duplum est productum ex summa duorum F A. in H G. Igitur & summæ omnium A. B. C. D. E. F. duplum est productum ex vtroque F A. in H G. hoc est in numerum multitudinis ipsorum A. B. C. D. E. F. Quod demonstrandum erat.

A. B. C. D. E. F.

H. L. M. K...G

PROPOSITIO QVINTA.

A. B. C. D. E.
G. M. L. K. .H

IIsdem positis sit multitudo ipsorum A. B. C. D. E. impar, & sint in G H tot vnitates, quot sunt ipsi A. B. C. D. E. Erit ergo impar ipse G H. sumatur in eo vnitas G M. & secetur M H. bifariam in K. & secetur M K. in suas vnitates per L. & quoniam E. superat C. eodem numero quo C. superat A. summa ipsorum E A. dupla est ipsius C. Hoc est producti ex C. in vnitatem K L. Ob hæc eadem summa duorum B D. dupla est producti ex C. in L M. quare summa ipsorum A E B D. dupla est producti ex C. in M K. Atqui ipsius M K. duplus est M H. Igitur summa ipsorum A E B D. æqualis est producto ex C. in M H. sed & ipse C. æqualis est producto ex C. in M G. Quamobrem summa omnium A B C D E. æqualis est producto ex C. in G H. At producti ex C. in G H. duplus est productus ex vtroque A E. in G H. quare summæ omnium A. B. C. D. E. duplus est productus ex vtroque A E. in G H. hoc est in numerum multitudinis expositorum numerorum. Quod oportebat ostendere.

α. β. γ. δ. ε.
ζ. θ. κ. η.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω ὁ τῶν α. β. γ. δ. ε. περισσός. καὶ ἔστωσαν ἐν τῷ ζη. τοσαῦται μονάδες, ὅσοι εἰσὶν οἱ α. β. γ. δ. ε. περισσὸς ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ ζη. κείσθω ἐν αὐτῷ μονὰς ζθ. καὶ τετμήσθω ὁ θη. δίχα τῷ κ. καὶ τετμήσθω ὁ θκ. εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας κατὰ τὸ λ. καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει ὁ ε. τοῦ γ. τούτῳ ὑπερέχει καὶ ὁ γ. τοῦ α. συναμφότερος ἄρα ὁ αε. διπλασίων ἐστὶ τοῦ γ. τουτέστι τοῦ ὑπὸ γ. καὶ κλ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ συναμφότερος ὁ βδ. διπλασίων ἐστὶ τοῦ ὑπὸ γ. καὶ λθ. ὥστε οἱ α. ε. β. δ. διπλασίων εἰσὶ τοῦ ὑπὸ γ. καὶ τοῦ θκ. διπλασίων ἐστὶν ὁ θη. ὥστε καὶ οἱ α. ε. β. δ. ἴσοι εἰσὶ τῷ ὑπὸ γ. καὶ τοῦ θη. ἔστι δὲ καὶ ὁ γ. ἴσος τῷ ὑπὸ τοῦ γ. καὶ τοῦ θζ. ὥστε ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν α. β. γ. δ. ε. ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ. καὶ τοῦ ζη. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν γ. καὶ ζη. διπλάσιόν ἐστιν ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ αε καὶ τοῦ ζη. ὥστε καὶ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν α. β. γ. δ. ε. διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ αε. καὶ τοῦ ζη. τουτέστι τοῦ πλήθους τῶν ἐκτεθέντων, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IN QVARTAM ET QVINTAM.

HÆ quoque demonstrationes faciles sunt, & vnicam tantum propositionem constituunt, vt euidens est, cuius demonstratio pendet omnino à propositione sexta libri primi porismatum, qua ostendimus in medietate arithmetica summam extremorum æquari summæ duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, atque etiam duplo medij, si multitudo terminorum fuerit impar. Ex his porro collige summam quotlibet numerorum progressionis arithmeticæ, æqualem esse producto ex semisse numeri terminorum in summam extremorum, vel è conuerso, producto ex semisse summæ extremorum, in numerum terminorum. Semper enim accidit alterutro horum modorum summam omnium numerorum haberi nullis intercedentibus fractionibus, si enim numerus terminorum sit par, eius dimidium sumi potest absque fractione, si autem multitudo terminorum sit impar, semissis summæ extremorum haberi potest absque fractione, quia tunc summa extremorum est numerus par, quandoquidem est dupla medij termini.

PROPOSITIO SEXTA.

α. κ.. ν... β γ.......... δ ε. λ............... ζ
η. μ —— ξ —— θ
A. K.. N... B G.......... D E. L............... Z
H. M —— X —— T

SI sint ab vnitate quotcunque numeri æquali interuallo progredientes, sum-

Ἐὰν ὦσιν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὁ σύμπας πολλαπλα-

σιασθεὶς ἐπὶ τὸν ὀκταπλασίονα τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ δυάδι ἐλάσσονος τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τετράγωνον, γίνεται τετράγωνος, οὗ ἡ πλευρὰ λιποῦσα δυάδα πολλαπλάσιος ἔσται τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, κατά τινα ἀριθμὸν, ὃς προσλαβὼν μονάδα διπλάσιων ἐστὶ τοῦ πλήθους τῶν ἐκκειμένων πάντων σὺν τῇ μονάδι: ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ οἱ αβ. γδ. εζ. λέγω ὅτι γίνεται τὸ προκείμενον. ὅσοι γὰρ εἰσὶν οἱ ἐκτεθέντες σὺν τῇ μονάδι, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ηθ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ εζ μονάδα, τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ὁ αβ. πολλαπλάσιός ἐστι κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ ηθ. ἐὰν ἄρα θῶμεν ἑκάστην μονάδα τὴν ακ. ελ. ημ. ἕξομεν τὸν λζ. τοῦ κβ. πολλαπλάσιον κατὰ τὸν μθ. ὥστε ὁ λζ. ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ κβ. μθ. καὶ ἐὰν θῶμεν δυάδα τὴν κν. ζητήσομεν εἰ ὁ σύμπας πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς κβ. ὅς ἐστιν ὑπεροχὴ αὐτῶν, καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ νβ. νβ. ὄντος δυάδι ἐλάσσονος τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, γίνεται τετράγωνος, οὗ ἡ πλευρὰ λιποῦσα δυάδα ποιεῖ τινα ἀριθμὸν ὃς τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τοῦ κβ. πολλαπλάσιός ἐστι κατὰ συναμφότερον τὸν κθ. θμ. καὶ ἐπεὶ ὁ σύμπας ἥμισύς ἐστι τοῦ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶν ζε. ελ. καὶ τοῦ θη. ὁ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζε. ελ. καὶ τοῦ θη, διαιρεῖται εἴς τε τὸν ὑπὸ λζ. ηθ καὶ εἰς τὸν δὶς ὑπὸ ελ. ηθ. τουτέστι δύο τοὺς ηθ. πάλιν ἄρα ὁ σύμπας ἥμισύς ἐστι τοῦ ὑπὸ λζ. ηθ. καὶ δύο τῶν ηθ. ἀλλὰ ὁ λζ. ἴσος ἐδείχθη τῷ ὑπὸ κβ. μθ. καὶ ὁ σύμπας ἄρα ἐστὶν ἥμισυς τοῦ τε ὑπὸ κβ. μθ. θη. στερεοῦ καὶ δύο τῶν ηθ. ἐὰν ἄρα τέμωμεν τὸν μθ. δίχα κατὰ τὸ ξ. ἕξομεν τὸν ἐκ πάντων συγκείμενον ἴσον τῷ ἐκ τῶν κβ. ηθ. θξ. στερεῷ καὶ ἐνὶ τῷ ηθ. ζητήσομεν ἄρα εἰ ὁ ἐκ τῶν κβ. ηθ. θξ. στερεὸς μετὰ ἑνὸς ηθ. πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς κβ. καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ νβ. τετράγωνον, γίνεται τετράγωνος. ἀλλὰ ὁ ἐκ τῶν κβ. ηθ. θξ στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα τὸν κβ. ποιεῖ τὸν ὑπὸ ηθ. θξ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ τετράγωνον ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν κβ. ηθ. θξ. στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς κβ. ποιεῖ τὸν ὑπὸ ηθ. θξ. ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς ἀπὸ κβ. τετραγώνους τουτέστι τὸν ὀκτάκις ὑπὸ ηθ. θξ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον τουτέστι τὸν τετράκις ὑπὸ ηθ. θμ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον δεικτέον οὖν ὅτι ὁ τε-

ma omnium ducta in octuplum interualli ipsorum, & adsumens quadratum numeri qui binario minor est eodem interuallo, quadratus existit, cuius latus binario multatum multiplex est ad interuallum secundum quendam numerum, qui auctus vnitate, duplus est numeri multitudinis expositorum numerorum, vnitate in iis annumerata. Sint enim ab vnitate numeri æquali interuallo progredientes. A B. G D. EZ. dico fieri quod est propositum. Quot enim sunt expositi numeri cum vnitate, tot vnitatibus constet numerus H T. Et quoniam interuallum quo E Z. superat vnitatem, interualli quo A B. vnitatem superat multiplex est secundum numerum vnitate minorem ipso H T. si ponamus vnitati æquales singulos A K. E L. H M. habebimus L Z. ipsius K B. multiplicem secundum M T. Quamobrem L Z. æqualis est producto ex K B. in M T. Et si sumamus K N. binarium, quæremus an omnium summa ducta in octuplum ipsius K B. (quod est ipsorum interuallum) & adsumens quadratum ipsius N B. (qui binario deficit ab interuallo) faciat quadratum, cuius latus binario multatum, faciat quendam numerum, qui interualli K B. multiplex sit, secundum compositum ex vtroque H T. T M. Et quia summa omnium est dimidium producti ex vtroque Z E. E L. in H T. At productus ex vtroque ZE. EL. in H T. diuiditur in productum ex LZ. in H T & in eum qui fit bis ex E L. in H T. hoc est in duos H T. Rursum omnium summa est dimidium eius qui fit ex L Z. in H T. & duorum H T. At LZ. est ostensus æqualis producto ex K B. in M T. Quare summa omnium est dimidium solidi sub K B. M T. T H. contenti, & duorum H T. si ergo secemus M T. bifariam in X. habebimus summam omnium æqualem solido sub KB. HT. TX. contento & vni H T. Quæramus igitur an solidus sub K B. H T. TX. contentus, cum vno H T. multiplicatus in octo K B. & adsumens quadratum ipsius N B. faciat quadratum. Atqui solidus sub KB. H T. TX. contentus ductus in vnum K B. æquatur ei qui fit à producto ex HT. in TX. in quadratum ipsius KB. Quare solidus sub K B. H T. TX. contentus,

ductus in octo K B. æquatur ei qui fit à producto ex H T. in T X. in octo quadratos K B. hoc est ei qui fit octies ex H T. in T X ducto in quadratum K B. hoc est ei qui fit quater ex H T. in T M. ducto in quadratum K B. ostendendum ergo quod qui fit quater ex H T. in T M. ductus in quadratum K B. & adsumens productum ex H T. in octo K B. & adhuc quadratum N B. fit quadratus. Diuiditur autem qui fit octies ex H T. in K B. in eum qui fit quater ex H M. in K B. & in eum qui fit quater ex vtroque H T. T M. in K B. quærendum ergo an qui fit quater ex H T. in T M. ductus in quadratum K B. & adsciscens eum qui fit quater ex H M. in K B. & eum qui fit quater ex vtroque H T. T M. in K B. & adhuc quadratum N B. faciat quadratum. At qui fit quater ex H M. in K B. æqualis est ei qui fit bis ex N K. in K B. & mixtus quadrato N B. facit quadratos ipsorum K B. K N. Quæremus igitur an qui fit quater ex H T. in T M. ductus in quadratum K B. & adsumens eum qui fit quater ex vtroque H T. T M. in K B. & adhuc quadratos B K. K N. fiat quadratus. Rursus autem quadratus B K. transit in eum qui fit ex quadrato H M. in quadratum K B. & mixtus hic ei qui fit quater ex H T. in T M. ducto in quadratum K B. facit numerum æqualem producto ex quadrato compositi ex vtroque H T. TM. in quadratum K B. Quærendum ergo an quadratus compositi ex vtroque HT. T M. ductus in quadratum K B. adsumens quadruplum producti ex vtroque H T. TM. in KB. & adhuc quadratum K N. fiat quadratus. Itaque si producto ex vtroque HT. TM. in K B. accipiamus æqualem numerum N R. erit productus ex quadrato vtriusque H T. T M. in quadratum K B. æqualis quadrato N R. vt deinde ostendetur. Videndum igitur an quadrati R N. N K. cum quadruplo producti ex vtroque H T. T M. in K B. faciant quadratum. Atqui quadruplum producti ex vtroque HT. TM. in KB. æquale est quadruplo ipsius N R. quandoquidem qui fit semel ex vtroque H T. T M. in K B. æqualis positus est N R. Atqui quatuor N R. æquales sunt duplo producti ex N R. in N K. (nam N K. positus est binarius) quærendum ergo an quadrati N R. N K. cum duplo producti ex N R. in N K. faciant quadratum; faciunt autem quadratum à latere R K. cuius latus R K. multa-

τράκις ὑπὸ ηθ. θμ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον πεοσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ αθ. ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς κβ. καὶ ἔτι τὸν ἀπὸ τοῦ νβ. τετράγωνον γίνεται τετράγωνος. διαιρεῖται δὲ ὁ ὀκτάκις ὑπὸ κθ. κβ. εἴς τε τὸν τετράκις ὑπὸ κμ. κβ. καὶ εἰς τὸν τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. ζητητέον οὖν εἰ ὁ τετράκις ὑπὸ τῶν ηθ. θμ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον, μετὰ τοῦ τετράκις ὑπὸ ημ. κβ. καὶ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ νβ. τετράγωνος ποιεῖ τετράγωνον. ἀλλ' ὁ τετράκις ὑπὸ ημ. κβ. ἴσος ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ νκ. κβ. καὶ μιγεὶς τῷ ἀπὸ νβ. τετραγώνῳ ποιεῖ τοὺς ἀπὸ κβ. νκ. τετραγώνους: ζητήσομεν ἄρα εἰ καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ θη. θμ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. μετὰ τῶν βκ. κν. τετραγώνων γίνεται τετράγωνος. πάλιν δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ βκ. τετράγωνος μεταβαίνει εἰς τὸν ἀπὸ τοῦ ημ. τετράγωνον ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον, καὶ μιγεὶς τούτῳ τῷ τετράκις ὑπὸ ηθ. θμ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον ποιεῖ τὸν ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ θμ. τετράγωνον ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον: ζητητέον ἄρα εἰ ἐστὶ ὁ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. τετράγωνος ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον, καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. μετὰ τοῦ ἀπὸ κν. τετραγώνου γίνεται τετράγωνος, ἐὰν δὴ θῶμεν τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶν ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. ἴσον τὸν νρ. ἀριθμὸν, ἔσται καὶ ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. τετράγωνος ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ νρ. τετραγώνῳ, ὅπερ ἑξῆς δειχθήσεται, σκεπτέον ἄρα εἰ οἱ ἀπὸ τῶν ρν. νκ. τετράγωνοι μετὰ τοῦ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τῶν κθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. γίνεται τετράγωνος ἀλλὰ ὁ τετράκις ὑπὸ ηθ. θμ. ἐστὶ κβ. ἴσος ἐστὶ τῷ νρ. τετράκις, ἐπειδήπερ ἐστὶ ὁ ἅπαξ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. ἴσος ἐτέθη ὁ νρ. Τέσσαρες δὲ οἱ νρ. ἴσοι εἰσὶ τῷ δὶς ὑπὸ τρ. νκ. δυὰς γὰρ ἐτέθη ὁ νκ. ζητητέον ἄρα εἰ καὶ οἱ ἀπὸ τῶν τρ. νκ. τετράγωνοι μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ νρ. νκ. ποιοῦσι τετράγωνον. ποιοῦσι δὲ τὸν ἀπὸ τοῦ ρκ. οὗ ἡ πλευρὰ ἡ ρκ. λιποῦσα δυάδα τὴν νκ. ποιεῖ ἀριθμὸν τὸν νρ. ὃς τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τοῦ

κϐ. πολλαπλασίων ἐστὶ κτ̅ τὸ συναμφότερον τὸ ηθ. θμ. ὃς προσλαβὼν μονάδα τὸν ημ. διπλασίων ἐστὶ τοῦ ἐκτεθέντος παντὸς συστήματος.

α. κ..ν...ϐ

η. μ———ξ———θ

tum binario N K. facit numerum quendam N R. qui interualli K B. multiplex eſt, ſecundum ſummam ipſorum H T. T M. quæ adſcita vnitate H M. duplum facit numeri multitudinis expoſitorum numerorum.

A. K.. N... B——— R

H. M ——— X——— T

IN SEXTAM.

Hic nonnulla ſunt dilucidanda, quæ Diophantæa breuitas obſcuriora reddit.

A. K.. N.. B G.........D E. L...........Z

H. M——X——T

Primò quod ait ſummam omnium eſſe dimidium producti ex ſumma ipſorum E Z. E L. in H T patet per 4. & 5. huius: Cùm enim E L. ſit vnitas, vtique E Z. E L. ſimul conficiunt ſummam extremorum, qua ducta in H T. numerum terminorum, fit duplum ſummæ omnium. Quia vero ducere E Z. in H T, [1] idem eſt ac ducere ſigillatim E L. L Z. in eundem H T. rectè concludit ſummam omnium eſſe dimidium producti ex L Z. in H T. ſemel, & producti ex E L. in H T. bis, & cùm E L. ſit vnitas, quæ non immutat numerum quem multiplicat, benè infert ſummam omnium eſſe dimidium producti ex L Z. in H T. adſciſcentis duplum ipſius H T.

prima 2.

Secundò, diuidentes M T. bifariam in X. rem per lineas expreſſimus, quia ex hypotheſi Diophantæa ſequitur M T. eſſe ternarium, qui bifariam per integros ſecari non poteſt, hoc autem nil facit ad demonſtrationem.

Tertiò, quod ait ſolidum ſub K B. H T. T X. contentum ductum in K B. æquari ei qui fit à producto ex H T. in T X. in quadratum ipſius K B. patet ex eo quod quatuor numeri quoquo modo & ordine inter ſe multiplicentur, [2] eundem ſemper numerum procreant.

tertia 1. poriſ.

Quartò, quod ait numerum qui fit bis ex K N. in K B. adſumpto quadrato ipſius N B. æquari quadratis ipſorum K B. K N. ſic probatur. Qui fit ex K B. in K N. bis. [3] æquatur producto ex K N. in N B. bis & duplo quadrati ipſius K N. Igitur ſi addatur vtrimque quadratus ex N B. erit productus ex K B. in K N. bis, cum quadrato ex N B. æqualis producto ex K N. in N B. bis, & quadrato ex K N. bis, & quadrato ex N B. ſemel. At quadrati ipſorum K N. N B. cum duplo producti ex K N. in N B. [4] æquantur quadrato totius K B. Igitur productus ex K N. in K B. bis cum quadrato ipſius N B. æquatur quadratis ipſorum K B. K N. Quod erat demonſtrandum.

tertia 2. — quarta 2.

Quintò, quod ait productum ex quadrato ipſius K B. in quadruplum producti ex H T. in M T. vnà cum producto ex eodem quadrato K B. in quadratum H M. æquari producto ex quadrato K B. in quadratum compoſiti ex ipſis H T. M T. id ſic infertur. Quoniam datis duobus numeris H T. M T. quorum interuallum H M. quod fit quater ex H T. in M T. addito quadrato ipſius H M. [5] æquatur quadrato compoſiti ex ipſis H T. M T. patet ducere quadratum K B. in quadruplum producti ex H T. in M T. & in quadratum H M. idem eſſe atque ducere eundem quadratum K B. in quadratum compoſiti ex ipſis H T. M T.

quinta 2. poriſ.

Quoniam vero demonſtratio Diophanti ob illius prolixitatem, tyronibus fortaſſe videbitur obſcurior, operæ pretium duxi, propoſitionem iſtam aliter demonſtrare. In quo præter quàm quod facilius & magis dilucidè rem expediemus, id etiam nobis nobis lucri accedet, quod in vniuerſum de omni progreſſione Arithmetica oſtendemus, quod demonſtrauit Diophantus de ſola progreſſione cuius minimus terminus eſt vnitas. Itaque more noſtro, quinque vel ſex Theorematis propoſitum concludemus.

THEOREMA PRIMVM.

Datis duobus numeris, quadratus primi cum quadrato ſemiſſis ſecundi, æquatur producto ex mutua datorum multiplicatione, vnà cum quadrato interualli inter primum & ſemiſſem ſecundi.

D 8. C 2.
A 10. B 4.

Sint dati A. B. & ipſius B. ſemiſſis eſto C. Ipſorum autem A C. interuallum eſto D dico quadratos ipſorum A. C. ſimul æquari producto ex A. in B. vna cum quadrato ipſius D. Etenim quadrati ipſorum A C. [6] æquantur duplo producti ex A. in C. & quadrato ipſius D. ſed duplo producti ex A. in C. æquatur productus ex A. in B. quia B. duplus eſt ad C. igitur quadrati ipſorum A C. æquantur producto ex A. in B. & quadrato ipſius D. quod demonſtrandum erat.

4. 2. poriſm.

Non

Non curamus vtrum A. sit maior vel minor quam B. vel quam C. sed & eodem prorsus argumento si B. ponatur primus, A. secundus, ostendemus productum ex A. in B. cum quadrato interualli inter B. & semissem ipsius A. æquari quadratis tum ex B. tum semisse ipsius A. ortis.

THEOREMA SECVNDVM.

In progressione arithmetica, productus ex differentia progressionis in maximum, vnâ cum quadrato interualli inter minimum & semissem differentiæ, æquatur quadrato minimi, & quadrato semissis differentiæ & quadrato differentiæ toties sumpto, quot sunt termini progressionis vno dempto.

H 4. H 1. E 2.
A 5. B 7. C 9. D 11.

Sint A B C D. in arithmetica medietate, & sit E. differentia progressionis cuius semissis G. & interuallum inter G. & A. esto H. dico productum ex E. in D. cum quadrato ipsius H. æquari quadratis ipsorum A G. & adhuc quadrato ipsius E. toties sumpto, quot sunt ipsi A B C. nam interuallum quo D. superat A. continet E. toties quot sunt ipsi A B C. per tertiam huius. Igitur ducere E. in D. idem est ac ducere E. in A. & E. in seipsum toties, quot sunt ipsi A B C. at productus ex E. in A. cum quadrato ipsius H. æquatur quadratis ipsorum A G. per primum theorema. Ergò productus ex E. in D. cum quadrato ipsius H. æquatur quadratis ipsorum A G. & præterea quadrato ipsius E. toties sumpto, quot sunt ipsi A B C. Quod erat ostendendum.

THEOREMA TERTIVM.

In progressione arithmetica, quadratus maximi æquatur producto ex differentia in omnes antecedentes bis, & quadrato minimi semel, & quadrato differentiæ toties sumpto, quot sunt ipsi antecedentes.

G 2. G 2. G 2.
A 5. B 7. C 9. D. 11.

Sint in progressione arithmetica A B C D. & sit G. differentia progressionis. dico quadratum maximi D. æquari producto bis ex G. in omnes antecedentes A B C. & quadrato ipsius A semel, & quadrato ipsius G. toties sumpto, quot sunt ipsi A B C. quia enim G C. simul componunt D. [a] erit quadratus ipsius D. æqualis quadratis ipsorum G C. & duplo plani sub G C. eadem de causa quadratus ipsius C. æquatur quadratis ipsorum G B. & duplo plani sub G B. & rursus quadratus ipsius B. æquatur quadratis ipsorum G A. & duplo plani sub G A. igitur quadratus ipsius D. æquatur quadrato A. semel, & quadrato G. toties sumpto quot sunt ipsi A B C. & præterea duplo producti ex G. in ipsos A B C. quod erat ostendendum. 4. secundi.

THEOREMA QVARTVM.

In progressione arithmetica, quadratus maximi aucti dimidio differentiæ, æquatur duplo plani sub summa omnium, & sub differentia contenti, vnâ cum quadrato interualli inter minimum & semissem differentiæ.

H. 4. E. 2. G 1.
A.5.B.7.C.9.D.11.
K. 12.

Sint A B C D. in arithmetica progressione cuius differentia E. cuius semissis G. & interuallum inter A. & G. esto H. Ipsorum autem D G. summa esto K. dico quadratum ipsius K. æquari numero qui fit bis ex E. in summam omnium, vnâ cum quadrato ipsius H. Etenim quadratus ipsius K. [a] æquatur quadratis ipsorum D G. & duplo producti ex G. in D. seu producto ex E. in D. (quandoquidem E. duplus est ad G) At quadratus ipsius D. per præcedentem æquatur duplo producti ex E. in ipsos A B C. vnâ cum quadrato ipsius A. semel, & quadrato ipsius E. toties sumpto quot sunt ipsi A B C. igitur quadratus ex K. æquatur numero qui fit bis ex E. in A B C. & semel in D. cum quadratis ex A. & G. semel sumptis, & quadrato ex E. toties sumpto quot sunt ipsi A B C. At per secundum theor. quadrati ex A. & G. vnà cum quadrato ex E. toties sumpto quot sunt ipsi A B C. æquantur producto ex E. in D. vna cum quadrato ex H. igitur quadratus ex K. æquatur duplo producti ex E. in omnes A B C D. vna cum quadrato ex H. quod demonstrandum erat. quarta 2.

H 4. E 2. G 1. K 12.
A 5. B 7. C 9. D 11.

THEOREMA QVINTVM.

In omni progressione arithmetica, numerus qui fit octies ex differentia in summam omnium, vna cum quadrato interualli inter duplum minimi & differentiæ, æquatur quadrato, cuius latus componitur ex duplo maximi, & ex differentia.

H. 4. E. 2. G. 1.
A. 5. B 7. C. 9. D. 11.
L. 8. K. 12.

Sint A B C D. in progressione arithmetica, cuius differentia E. cuius semissis G. & interuallum inter A. & G. esto H. interuallum autem inter duplum ipsius A. & E. esto L. dico quod sit octies ex E. in summam omnium A B C D. cum quadrato ipsius L. æquari quadrato compositi ex duplo ipsius D. & ex E. sit enim K. summa ipsorum D G. quia igitur octuplum producti ex E. in omnes A B C D. cum quadruplo quadrati ex H. est quadruplum producti qui fit bis ex E. in eosdem A B C D. & quadrati ex H. At productus ex E. in A B C D. bis, quadratus ex H. æquatur quadrato ex K. per præcedens theor. patet octuplum producti ex E. in A B C D. cum quadruplo quadrati ex H. æquari quadruplo quadrati ex K. at quadruplum quadrati ex K. est quadratus, cuius latus duplus est ad K. & cum K. componatur ex D. & ex G. duplum illius componitur ex duplo ipsius D. & ex duplo ipsius G. seu ex E. igitur octuplum producti ex E. in A B C D. cum quadruplo quadrati ex H. quadratus est, cuius latus componitur ex duplo ipsius D & ex E. Quia vero interuallum ipsorum A G. est H. vtique duplorum interuallum, puta L. duplum est ad H. ac proinde quadratus ex L. quadruplus est quadrati ex H. quamobrem octuplum producti ex E. in omnes A B C D. cum quadrato ex L. æquatur quadrato cuius latus componitur ex E. & ex duplo ipsius D. quod erat demonstrandum.

Sane hoc theoremate in vniuersum de omni progressione arithmetica demonstrauimus, quod Diophantus restringit ad solam progressionem quæ incipit ab vnitate. Nam illius propositionem ab hoc theoremate minime differre cuilibet rem attentius consideranti, statim innotescet, si hoc applicetur arithmeticæ progressioni ab vnitate incipienti. Quod tamen vt fiat commodissime, tale adhuc demonstrandum theorema.

THEOREMA SEXTVM.

In progressione arithmetica quæ incipit ab vnitate, productus ex duplo numeri terminorum vnitate multato in differentia progressionis, adsumpto binario, æquatur composito ex differentia, & ex duplo maximi termini.

E. 6.
A. 1. B. 7. C. 13. D. 19.
H. 4. K 8.
L. 3. F. 6.
G. 7.

Sint A B C D. in arithmetica progressione, cuius differentia E. & sit A. vnitas, numerus terminorum H. cuius duplum K. & sit L. vnitate minor ipso H. cuius duplum F. cui addita vnitate fiat G. eritque G. vnitate minor quam K. cum enim H L. vnitate differant, erit duplorum K F. interuallum binarius, quare G. excedens F. vnitate, deficiet vnitate ab ipso K. dico itaque productum ex G. in E. adsumpto binario, æquari composito ex duplo ipsius D. & ex E. Nam productus ex L. in E. æquatur interuallo extremorum D A. per tertiam huius.

E 6.
A. 1. B. 7. C. 13. D. 19.
H 4. K 8.
L 3 F 6.
G 7.

Quare si producto ex L. in E. addatur vnitas A. fiet numerus D. ac proinde si producto ex F. in E. addatur binarius, fiet duplum ipsius D. quamobrem si G. vnitate maior quàm F. ducatur in eundem E. & producto addatur binarius fiet vtique numerus continens bis ipsum D. & semel ipsum E. quod erat demonstrandum.

Hinc porrò manifeste infertur propositio Diophanti. sint enim AB C D. in arithmetica medietate, & sit A. vnitas, differentia progressionis E. quæ binario multata relinquat G. & duplum numeri terminorum esto K. vnde ablata vnitate, superfit L. dico si E. ducatur octies in summam omnium A B C D. & producto addatur quadratus ipsius G. fieri quadratum, cuius latus binario multatum, continet E toties, quot sunt vnitates in L. quia enim à differentia E. auferendo duplum minimi termini A. puta binarium, relinquitur G. vtique per 5. theorema numerus qui fit octies ex E. in summam omnium A B C D. cum quadrato ex G. æquatur quadrato cuius latus componitur ex E. & ex duplo ipsius D. At per sextum theor. ipsi E. & duplo ipsius D. æquatur productus ex L. in E. auctus binario. Igitur qui fit octies ex E. in summam omnium A B C D. adsumens quadratum ex G. æquatur quadrato, cuius latus æquale est producto ex L. in E. adsumenti binarium. Patet ergo si à latere huius quadrati auferatur binarius, relinqui productum ex L. in E. seu numerum qui toties continet E. quot sunt in L. vnitates, quod demonstrandum erat.

G 4. E 6.
A. 1. B 7. C. 13. D 19.
K 8. L 7.

PROPOSITIO SEPTIMA.

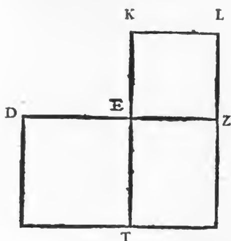
Ἔστω συναμφοτέρῳ τῷ ηθ. θμ. ἴσος ὁ α. τῷ δὲ κβ. ἴσος ὁ β. τῷ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. ἴσος ὁ γ. λέγω ὅτι καὶ ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. τουτέστι ὁ ἀπὸ τοῦ α. ἐπὶ τὸ ἀπὸ τοῦ κβ. τουτέστιν ἐπὶ

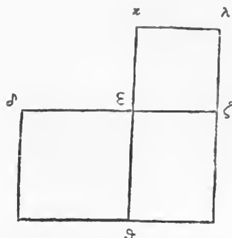
Sit vtrique HT. TM. æqualis A. ipsi autem KB. æqualis B. At producto ex vtroque HT. TM. in KB. æqualis sit G. dico quod quadratus compositi ex vtroque HT. TM. hoc est ipsius A.

ductus in quadratum K B. hoc est in quadratum B. producit quadratum ipsius G. Ponantur ipsis A & B. æquales in recta linea D E. E Z. & describantur ab ipsis quadrati A. B. G.

τὸ ἀπὸ τοῦ β. ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ γ. κείσθω τοῖς α. β. ἴσοι ἐπ' εὐθείας οἱ δε. εζ. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπ' αὐτῶν τετράγωνοι

α. β. γ.





D T. E L. & perficiatur complementum T Z. Itaque erit vt D E. ad E Z. Ita quadratus D T. ad complementum TZ. vt autem T E. ad E K. sic complementum T Z. ad quadratum E L. quare complementum T Z. est medium proportionale inter quadratos D T. Z K. Productus igitur ex quadrato ex D T. in quadratum Z K. æqualis est quadrato ex T Z. & est D T. æqualis quadrato compositi ex vtroque H T. T M. At Z K. est æqualis quadrato K B. & complementum T Z. æquale est NR. Quamobrem quod fit ex quadrato vtriusque H T. T M. in quadratum K B. æquale est quadrato N. R.

A. B. G.

οἱ δθ. ελ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ θζ. παραπλήρωμα· ὡς ἄρα ἡ δε. ἐπὶ εζ, οὕτως τὸ δθ. ἐπὶ θζ. παραπλήρωμα· ὡς δὲ ἡ θε. ἐπὶ εκ. οὕτως τὸ θζ. παραπλήρωμα ἐπὶ ελ. τὸ ἄρα θζ. παραπλήρωμα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῶν δθ. θζ. τετραγώνων. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν δθ. ζκ. τετραγώνων ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ θζ. παραπληρώματος· καὶ ἐστὶ τὸ μὲν δθ. ἴσον τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ τετραγώνῳ, τὸ δὲ ζκ. τετράγωνον ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ κβ. τὸ δὲ θζ. παραπλήρωμα ἴσον τῷ νρ. καὶ τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. τετράγωνον, ἐπὶ τὸ ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ νρ. τετραγώνῳ.

α. β. γ.

IN SEPTIMAM.

Quod demonstrat hîc Diophantus per lineas, longe breuius & facilius per numeros ostendemus, & ipsam propositionem sic concipiemus.

Productus ex mutua duorum quadratorum multiplicatione, æquatur quadrato producti ex mutuo, laterum ductu.

A. 25. B. 35. C. 49.
D. 5. E. 7.

Sint quadrati A. C. quorum latera D. E. & ex D. in E. fiat B. dico productum ex quadrato A. in quadratum C. æquari quadrato ipsius B. etenim vt constat ex demonstratione vndecima 8. Euclidis B. est medius proportionalis inter A. & C. quare productus ex A. in C. æquatur quadrato ipsius B. Quod erat demonstrandum. 20. septi.

ο.α.κ..ν...β——ρ γ——δ ε.λ——ζ
η.μ——ξ——θ
O.A.K..N...B——R G——D E. L——Z
H. M——X——T

PROPOSITIO OCTAVA.

Τῶν προκειμένων ὄντων, λέγομεν, ὅτι ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὁ σύμπας πολύγωνός ἐστι, καὶ γὰρ ἔχει γωνίας τοσαύτας, ὅσας ἐστὶν ὁ δυάδι μείζων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, πλευρὰν δὲ αὐτοῦ ἐστι τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι. ἐπεὶ γὰρ ἐδείξαμεν τὸν σύμπαντα τῶν ἐκκειμένων πάντων γενόμενον ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς κβ. καὶ προσ-

6. huius. λαβόντα τὸν ἀπὸ τοῦ νβ. τετράγωνον, ποιεῖν τὸν ἀπὸ τοῦ ρκ τετράγωνον, ἀλλὰ καὶ ἐὰν ἄλλην μονάδα θῶμεν τὴν αο. ἕξομεν τὴν κο δυάδα. καὶ ἔστιν δὲ ὁμοίως καὶ ὁ κν δυάς. ἔσονται ἄρα οἱ οβ. βκ. βν. τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχοντες, ὁ ἄρα ὀκτάκις ὑπὸ τοῦ μεγίστου τοῦ οβ. καὶ τοῦ μέσου τοῦ βκ. προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου

2. huius. τοῦ βν. τετράγωνον, ποιεῖ τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ μεγίστου τοῦ οβ. καὶ δύο τῶν μέσων τῶν βκ. καὶ ὁ οβ ἄρα πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς κβ. καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ νβ. τετράγωνον, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ τε οβ. καὶ δύο τῶν κβ. καὶ ἡ τούτου πλευρὰ λιποῦσα δυάδα τὴν οκ. καταλείψει τρεῖς κβ. οἳ εἰσι τοῦ κβ. πολλαπλάσιοι κατὰ τριάδα, ἡ δὲ τριὰς προσλαβοῦσα τὴν μονάδα, διπλασίων ἐστὶ τῆς δυάδος. ἐπεὶ οὖν ὁ σύμπας τῶν ἐκκειμένων σὺν τῇ μονάδι τὸ αὐτὸ πρόβλημα ποιεῖ τῷ οβ. ὁ δὲ οβ ὢν τυχὼν, καὶ πολύγωνός ἐστι πρῶτος ἀπὸ τῆς μονάδος, ἐπείπερ μονάς ἐστιν ὁ αο. ὁ δὲ δεύτερος ἐστὶν ἀριθμὸς ὁ αβ. καὶ ἔχει πλευρὰν δυάδα. ὥστε καὶ ὁ σύμπας τῶν ἐκκειμένων πολύγωνός ἐστιν ἰσογώνιος τῷ οβ. ἔχων γωνίας τοσαύτας, ὅσος

1. huius. ἐστὶν ὁ δυάδι τῇ οκ. μείζων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τῶν κβ. καὶ πλευρὰν ἔχει τὴν ηθ. ὅς ἐστι τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι. Καὶ ἀποδέδεικται τὸ παρὰ Ὑψικλεῖ ἐν ὅρῳ λεγόμενον, ὅτι ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὁποσοιοῦν, μονάδος μὲν οὔσης τῆς ὑπεροχῆς, ὁ σύμπας ἐστὶ τρίγωνος, δυάδος δὲ τετράγωνος, τριάδος δὲ πεντάγωνος. λέγεται δὲ τὸ πλῆθος τῶν γωνιῶν κατὰ τὴν δυάδι μείζονα τῇ ὑπεροχῇ, πλευραὶ δὲ αὐτῶν τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι. ὅθεν ἐπεὶ οἱ

CVM sint quæ propoſuimus, pronunciamus. Si ſint quotcumque numeri ab vnitate, æquali interuallo progredientes, omnium ſumma multangulus eſt, tot enim habet angulos, quot vnitates numerus binario ſuperans interuallum; latus autem illius eſt numerus multitudinis expoſitorum numerorum cum vnitate. ' Cùm enim oſtenderimus ſummam expoſitorum omnium numerorum multiplicatam in octo KB. & adſumentem quadratum NB. facere quadratum à latere RK. ſi aliam vnitatẽ ſumamus AO. habebimus KO. binarium. Et eſt ſimiliter KN. binarius Erunt ergo æquali interuallo progredientes OB. BK. BN ' Quamobrem qui fit octies ex maximo OB. in medium BK. adſumens quadratum minimi BN. facit quadratum habentem latus ſummam conflatam ex maximo OB. & duplo medij BK. Igitur OB. ductus in octo KB. & adſumens quadratum NB. æqualis eſt quadrato compoſiti ex OB. & duobus KB. & huius latus multatum binario OK. relinquit tres KB. qui ſunt ipſius KB. multiplices ſecundum ternarium, at ternarius adſumens vnitatem, duplum efficit binarii. Quoniam igitur ſumma omnium progreſſionis terminorum cum vnitate idem præſtat quod OB. & OB. vtcunque oblatus eſt, & multangulus primus ab vnitate (quandoquidem AO. eſt vnitas, ſecundus autem poſt eam numerus eſt AB) ' & eius latus eſt binarius, ſequitur & ſummam omnium progreſſionis terminorum eſſe multangulum æquiangulum ipſi OB. & habentem tot angulos, quot vnitates habet numerus ſuperans binario OK. interuallum KB. & eſt eius latus HT. numerus multitudinis expoſitorum numerorum cum vnitate. Et demonſtratum eſt quod ab Hypſicle in definitione dicitur. Quod ſi fuerint quotlibet numeri ab vnitate æquali interuallo progredientes, ſi interuallum ſit vnitas, ſumma omnium eſt triangulus; ſi binarius, quadratus; ſi ternarius, quinquangulus. Exprimitur autem multitudo angulorum per numerum binario maiorem differentia; latera vero per numerum multitudinis terminorum cum vnitate. Itaque quoniam trianguli fiunt, cum interuallum eſt vnitas, latera ipſorum erunt maximi ter-

minorum, & productus ex maximo terminorum in vnitate maiorem ipso, duplus est ipsius trianguli. Et quia O B. multangulus est, & illius tot sunt anguli, quot in ipso vnitates, & ductus octies in numerum binario minorem ipso, hoc est in K B. & adsumens quadratum numeri qui ab ipsomet, quaternario deficit hoc est quadratum N B. facit quadratum, talis erit multangulorum definitio. Omnis multangulus multiplicatus octies in numerum binario minorem eo qui exprimit multitudinem angulorum, & adsumens quadratum numeri quaternario minoris multitudine angulorum, facit quadratum. Simul ergo demonstrata Hypsiclis definitione, & horum multangulorum, reliquum est vt ostendamus, quomodo dato latere is qui requiritur multangulus inueniatur. Nam alicuius multanguli latus habentes H T. & habentes multitudinem angulorum eius, habebimus & datum K B. Quare & habebimus productum ex vtroque H T. T M. in K B. qui æqualis est ipsi N R. Quare & datum habebimus ipsum KR. quoniam binarius est N K. Quamobrem & datum habebimus ipsius K R. quadratum. A quo auferendo quadratum ipsius N B. qui & ipse datus est, habebimus reliquum datum, qui quæsiti multanguli multiplex est secundum octuplum ipsius K B. Ergo inuentus est quæsitus multangulus. Similiter & dato multangulo, inueniemus latus eius HT. Quod demonstrandum erat.

τρίγωνοι μονάδος ἴσης τῇ ὑπεροχῇ γίνονται, καὶ πλευραὶ αὐτῶν εἰσιν οἱ μέγιστοι τῶν ἐκτιθεμένων, καὶ ὁ ὑπὸ τοῦ μεγίστου τῶν ἐκτιθεμένων καὶ τοῦ μονάδι μείζονος αὐτοῦ, διπλασίων ἐστὶν τοῦ σημαινομένου τριγώνου. Καὶ ἐπεὶ ὁ οβ. πολύγωνός ἐστι, καὶ ἔχει τοσαύτας γωνίας ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, πολλαπλασιασθεὶς ὀκτάκις ἐπὶ τὸν δυάδι αὐτοῦ ἐλάσσονα, τουτέστιν ἐπὶ τὸν κβ. καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ τετράδι αὐτοῦ ἐλάσσονος, τουτέστι τὸν ἀπὸ τοῦ νβ. ποιεῖ τετράγωνον. οὗτος ἔσται ὅρος τῶν πολυγώνων. ὅτι πᾶς πολύγωνος πολλαπλασιασθεὶς ὀκτάκις ἐπὶ τὸν δυάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ τετράδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, ποιεῖ τετράγωνον. συναποδειχθέντος οὖν καὶ τοῦ Ὑψικλέους ὅρου, καὶ τούτων τῶν πολυγώνων, ἑξῆς ἐστὶ δεῖξαι πῶς δοθείσης πλευρᾶς ὁ ἐπιταχθεὶς πολύγωνος εὑρίσκεται. ἔχοντες γὰρ πλευρὰν δοθέντος τινὸς πολυγώνου τὸν ηθ. ἔχοντες δὲ καὶ τὸ πλῆθος αὐτοῦ γωνιῶν, ἕξομεν καὶ τὸν κβ. δοθέντα. ὥστε καὶ τὸν ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. ἕξομεν δοθέντα. ὅς ἐστιν ἴσος τῷ νρ. ὥστε ἕξομεν καὶ τὸν κρ. δοθέντα, ἐπείπερ δυάς ἐστιν ὁ νκ. ὥστε καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κρ. ἕξομεν δοθέντα, καὶ ἀπὸ τούτου ἀφελόντες τὸν ἀπὸ τοῦ νβ. τετράγωνον ὄντα δοθέντα, ἕξομεν καὶ τὸν λοιπὸν δοθέντα, ὅς ἐστι τοῦ ζητουμένου πολυγώνου πολλαπλάσιον κατὰ τὸν ὀκταπλάσιον τοῦ κβ. ὥστε εὑρετός ἐστιν ὁ ζητούμενος πολύγωνος. ὁμοίως δὲ καὶ πολυγώνου δοθέντος εὑρήσομεν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ τὸν ηθ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ο.α.κ..ν...β——ρ γ——δ ε.λ——ζ
η.μ——ξ——θ

O.A.K..N...B——R G——D E.L——Z
H. M——X——T

IN OCTAVAM.

HÆC propositio, vt à nobis restituta est, parum habet difficultatis, pendet eius demonstratio à superioribus, præsertim à sexta, secunda, & prima, huius, quas idcirco suis locis in margine citauimus.

Quod ait Diophantus de numeris triangulis, nimirum, si latus cuiuslibet trianguli ducatur in numerum vnitate maiorem seipso, fit duplum ipsius trianguli, id sic infertur. Quoniam omnis triangulus ex definitione, est summa progressionis arithmeticæ quæ incipit ab vnitate, & cuius differentia est vnitas, patet numerum terminorum, seu ipsum latus trianguli æquari maximo termino, proinde si lateri addatur vnitas, seu minimus terminus, fiet summa extremorum. Quamobrem cùm latus trianguli seu numerus terminorum, ducetur in numerum vnitate maiorem seipso, hoc est in summam extremorum, fiet duplum summæ omnium terminorum per 4. huius, hoc est duplum ipsius trianguli.

Hinc autem innotescit defectus sextæ propositionis vt concipitur à Diophanto, eam restringendo ad solam progressionem arithmeticam quæ incipit ab vnitate, sic enim per eam vix applicari potest hæc octaua propositio numeris triangulis. Etenim requirit hæc propositio vt à numero multitudinis angulorum auferatur quaternarius, vt residui quadratus additus octuplo producti ex polygono in numerum angulorum binario multatum, fiat quadratus. At numerus angulorum trianguli est ternarius, à quo sane auferri non potest quaternarius. Euanescit autem hæc difficultas si vniuersalius enuncietur propositio sexta, vt à nobis præstitum est theoremate quinto. Nam per illud theorema octuplo producti ex polygono in numerum angulorum binario multatum, addendus est quadratus interualli inter eundem numerum angulorum binario multatum, & duplum minimi termini, hoc est binarium, quare non refert vtrum numerus angulorum binario multatus sit maior binario, (vt accidit in omnibus polygonis supra quadratum) vel æqualis binario (vt accidit in quadrato) vel minor binario (vt accidit in triangulo) Nam in primo casu à numero angulorum binario multato, auferetur rursus binarius, seu vt vult Diophantus à numero angulorum aufeetur quaternarius, & residui quadratus addetur octuplo producti ex polygono in numerum angulorum binario multatum. in secundo casu etiam à numero angulorum binario multato auferetur rursus binarius, & quia nil supererit, nil addetur ad octuplum supradictum, sed huiusmodi octuplum erit numerus quadratus, etenim à numero angulorum quadrati auferendo 2. superest 2. cuius octuplum est 16. quo ducto in quemlibet quadratum, patet fieri quadratum.

In tertio denique casu numerus angulorum binario multatus auferetur à binario, & residui quadratus addetur octuplo producti ex triangulo in numerum angulorum binario multatum. Vnde quia numerus angulorum trianguli binario multatus est vnitas, quam auferendo à binario superest rursus vnitas, hinc demonstratur quod ait Diophantus propr. 44. lib. 4. omnis triangulus per octo multiplicatus, & adsumens vnitatem, facit quadratum.

Cæterum animaduersione dignum est hanc propositionem non conuerti nisi in triangulis & in quadratis. Quemadmodum enim ex hac propositione sequitur omnem quadratum ductum in 16. efficere quadratum, vt suprà docuimus, sic è conuerso omnis numerus qui ductus in 16. facit quadratum, quadratus est, vt manifestum est, & rursus quemadmodum hac propositione demonstratur, omnem triangulum per octo multiplicatum, & adsumentem 1. efficere quadratum; sic è conuerso omnis numerus cuius octuplum adscita vnitate facit quadratum, triangulus est, vt in promptu est demonstrare.

A. 10. B. 80. C. 81.
F 4. E. 8. D. 9.
G. 10.

Sit numerus A. cuius octuplum B. cui addita vnitate fiat C. quadratus cuius latus D. dico A. esse triangulum. Etenim quia B. par est cùm sit octonarij multiplex, erit C. impar, ac proinde & latus eius D. impar est, quare si sumatur E. vnitate minor quàm D. erit E. par sit ergo illius semissis F. & à latere F. fiat triangulus G. constat igitur octuplum ipsius G. adsumpta vnitate facere quadratum, cuius latus superat vnitate duplum ipsius F. tam ex demonstratis ad 44. 4. quàm ex hac propositione triangulis applicata. Quare cùm D. superet vnitate duplum ipsius F. & ipsius D. quadratus sit C. vnde ablata vnitate superest B. patet B. esse octuplum trianguli G. sed idem B. ex hypothesi est octuplum numeri A. ergo A. est æqualis triangulo G. Quod erat propositum.

In aliis autem polygonis non conuertitur hæc propositio, quod vno aut altero exemplo probasse sufficiet. Quamuis enim vi huius propositionis omnis pentagonus ductus in 24. & adsumens vnitatem, faciat quadratum, tamen non omnis numerus qui ductus in 24. & adsumens 1. faciat quadratum est pentagonus, etenim 2. ductus in 24. & adsumens 1. facit quadratum 49. & tamen 2. non est pentagonus. Rursus quamuis omnis heptagonus, vi huius propositionis ductus in 40. & adsumens 9. faciat quadratum, tamen non omnis numerus qui ductus in 40. & adsumens 9. facit quadratum, statim est heptagonus. Etenim 4. ductus in 40. & adsumens 9. facit quadratum 169. cum tamen 4. non sit heptagonus, & sic de alijs.

PROPOSITIO NONA.

Διδασκαλικώτερον δὲ ὑποδείξομεν καὶ τοῖς βουλομένοις εὐχερῶς ἀκούειν τὰ ζητούμενα διὰ μεθόδων. λαβόντες γὰρ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καὶ ἀεὶ διπλασιάσαντες, ἀφελοῦμεν μονάδα, καὶ τὸν λοιπὸν πολλαπλασιάσαντες ἐπὶ τὸν δυάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, τῷ γενομένῳ προσθήσομεν ἀεὶ δυάδα, καὶ λαβόντες τὸ ἀπὸ τοῦ γενομένου τετράγωνον, ἀφελοῦμεν

Ad docendum autem accommodatius, ostendemus hoc iis qui prompte volunt audire ea quæ quæruntur per methodos. sumpto enim latere multanguli, illud geminabimus, hinc auferemus vnitatem, & reliquum ducemus in numerum multitudinis angulorum binario multatum, producto addemus binarium, quadratumque eius qui sic fit sumentes,

auferemus ab eo quadratum numeri multitudinis angulorum quaternario multati, reliquumque diuidentes in octuplum numeri multitudinis angulorum binario multati, inueniemus quæsitum multangulum. Rursus ipso multangulo dato, inueniemus latus hac arte. Multiplicabimus eum per octuplum numeri multitudinis angulorum binario multati, producto addemus quadratum numeri multitudinis angulorum quaternario multati, & inueniemus quadratum, si tamen datus est multangulus. De huius autem quadrati latere, semper auferemus binarium, residuum diuidemus in numerum multitudinis angulorum binario multatum, quotienti addemus vnitatem, & summæ semissem capientes, habebimus quæsiti multanguli latus.

ἀπ᾽ αὐτοῦ τὸν ἀπὸ τῆς τετράδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν. καὶ τὸν λοιπὸν μερίσαντες εἰς τὸν ἐκταπλάσιον τοῦ δυάδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν. εὑρήσομεν τὸν ζητούμενον πολύγωνον πάλιν δ᾽ αὐτοῦ πολυγώνου δοθέντος, εὑρήσομεν οὕτως τὴν πλευράν. πολλαπλασιάσαντες γὰρ αὐτὸν ἐπὶ τὸν ὀκταπλασίονα τοῦ δυάδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ τῷ γενομένῳ προσθέντες τὸν ἀπὸ τῆς τετράδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν τετράγωνον, εὑρήσομεν τετράγωνον, ἐάνπερ ᾖ ὁ ἐπιταχθεὶς πολύγωνος. τούτου δὲ τοῦ τετραγώνου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ἀφελόντες ἀεὶ δυάδα, τὸν λοιπὸν μεριοῦμεν ἐπὶ τὸν δυάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ τῷ γενομένῳ προσθέντες μονάδα, καὶ τοῦ γενομένου λαβόντες τὸ ἥμισυ, ἕξομεν τὴν τοῦ ζητουμένου πολυγώνου πλευράν.

IN NONAM.

NVlla omnino hic est difficultas, solum moneo has duas regulas paulò aliter tradi in excerptis nondum editis Apofroditi, & Bettubi Rubi architectonis, itemque in Hygini gromatico, nimirum sic.

DATO LATERE INVENIRE POLYGONVM.

Sume quadratum dati lateris, hunc ducito in numerum binario minorem multitudine angulorum, à producto aufer quod fit ex dato latere in numerum quaternario minorem multitudine angulorum, residui semissis erit quæsitus polygonus.

Verbi gratia dato latere 10. si velis hexagonum; quadra 10. fit 100. quem ducito in 4. binario minorem multitudine angulorum, fit 400. hinc aufer 20. qui fit ex latere dato 10. in 2. numerum multitudinis angulorum quaternario multatum, relinquitur 380. cuius semissis 190. est hexagonus à latere 10.

DATO POLYGONO INVENIRE LATVS.

Datum polygonum ducito in octuplum numeri multitudinis angulorum binario multati, producto adde quadratum numeri multitudinis angulorum quaternario multati, summa cape latus, huic adde numerum quaternario minorem multitudine angulorum, summam diuide per duplum numeri angulorum binario multati, quotiens erit quæsitum latus.

Vt sit datus hexagonus 190. hunc ducito in 32. octuplum ipsius 4. binario minoris multitudine angulorum, fit 6080. adde 4. quadratum numeri angulorum quaternario multati, fit 6084. cuius latus 78. cui adde 2. numerum scilicet angulorum quaternario multatum, fit 80. quem diuide per duplum ipsius 4. numeri angulorum binario multati, puta per 8. fit quotiens 10. quæsitum latus.

Nos etiam alias multas & faciles regulas ad inueniendum polygonum dato latere trademus in Appendicis libro 1.

Cæterum quamuis vt monuimus ad præcedentem, neque regulæ Diophanti, neque hæ Apofroditi possint proprie applicari triangulis, quandoquidem in his omnibus regulis oportet à numero angulorum auferre quaternarium, quod in triangulis propriè fieri nequit. Attamen impropriè & per numeros fictos quos vocant, etiam in triangulis hæ omnes regulæ locum habent, quod exemplis fiet manifestum.

Dato enim latere 6. quæratur triangulus per regulam Apofroditi, sumo quadratum ipsius 6. puta 36. quem duco in numerum angulorum binario multatum, puta in 1. fit 36. Tum sumo numerum angulorum multatum quaternario, puta − 1. quem duco in datum latus, fit − 6. quem aufero à 36. fit 42. cuius semissis 21. est triangulus à latere 6.

Rursus dato triangulo 21. quæro eius latus per regulam Apofroditi. Duco 21. in octuplum

numeri angulorum binario multati, puta in 8. fit 168. & quia numerus angulorum multatus quaternario, est — 1. cuius quadratus est + 1. addo 1. ad 168. fit quadratus 169. cuius latus 13. cui addo numerum angulorum quaternario multatum, puta — 1. fit 12. quem diuido per duplum numeri angulorum binario multati puta per 2. fit quæsitum latus 6. eademque ratio est de regulis à Diophanto traditis.

OBSERVATIO D. P. F.

PRopositionem pulcherrimam & mirabilem quam nos inuenimus hoc in loco sine demonstratione apponemus. In progressione naturali quæ ab vnitate sumit exordium, quilibet numerus in proximè maiorem facit duplum sui trianguli, in triangulum proximè maioris facit triplum suæ pyramidis, in pyramidem proximè maioris facit quadruplum sui triangulotrianguli, & sic vniformi & generali in infinitum methodo. Nec existimo pulchrius aut generalius in numeris posse dari theorema cuius demonstrationem margini inserere nec vacat, nec licet.

PROPOSITIO DECIMA.

ΔΟθέντος ἀριθμοῦ εὑρεῖν ποσαχῶς δύναται εἶναι πολύγωνος. ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ αβ. πλῆθος δὲ αὐτοῦ γωνιῶν ὁ βγ. καὶ κείσθω ἐν τῷ βγ. δυὰς μὲν ὁ γδ. τετρὰς δὲ ὁ γε. καὶ ἐπεὶ ὁ αβ. ὢν πολύγωνος ἔχει γωνίας τοσαύτας ὅσας ἐστὶν ὁ βγ. ὁ ἄρα ὀκτάκις ὑπὸ αβ. βδ. μετὰ τοῦ ἀπὸ βε τετραγώνου ποιεῖ τετράγωνον. ἔστω αὐτοῦ πλευρὰ ὁ ζη. ὥστε 8. huius. ὁ ἀπὸ τῆς ζη τετράγωνος ἴσος τῷ τε ὀκτάκις ὑπὸ αβ. βδ. καὶ τῷ ἀπὸ βε τετραγώνῳ. κείσθω ἐν τῷ αβ. μονὰς ὁ αθ. καὶ διῄρηται ὁ ὀκτάκις ὑπὸ αβ. βδ. εἴς τε τὸν τετράκις ὑπὸ αθ. βδ. καὶ εἰς τὸν τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ αβ. θβ. καὶ τῆς βδ. καὶ κείσθω συναμφοτέρῳ αβ. θβ. ἴσος ὁ δκ. καὶ μεταθησόμεθα τὸν μὲν τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ αβ. θβ. καὶ τοῦ βδ. εἰς τὸν ὑπὸ κδβ. τὸν δὲ τετράκις ὑπὸ αθ. βδ. εἰς τὸν δὶς ὑπὸ βδ. δε, δυὰς γάρ ἐστιν ὁ εδ. καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ζη. ἄρα τετράγωνος ἴσος τῷ ὑπὸ κδβ. καὶ τῷ δὶς ὑπὸ βδ. δε. καὶ τῷ ἀπὸ βε τετραγώνῳ ἀλλὰ τῷ δὶς ὑπὸ βδε καὶ τῷ ἀπὸ βε τετραγώνῳ ἴσοι οἱ ἀπὸ τῶν βδ. δε. τετράγωνοι καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ζη ἄρα τετράγωνος ἴσος τῷ τε ὑπὸ κδβ. καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βδ. δε. τετραγώνοις. τῷ δὲ ὑπὸ κδβ. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς δβ. ἴσον τὸ ὑπὸ κβδ. καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ζη. ἄρα ἴσος τῷ τε ὑπὸ κβδ. καὶ τῷ ἀπὸ δε. τετραγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ὁ δκ. ἴσος ὢν τετράκις συναμφοτέρῳ τῷ αβ. βθ. μείζων ἐστὶ τετράκις τῆς αθ. τουτέστι τετράδος, ὧν ὁ βγ. ἐστὶ δυάς. λοιπὸς ἄρα ὁ γκ. μείζων δυάδος τῆς γδ. ἡ ἄρα διχοτομία τῆς δκ πεσεῖται μεταξὺ

α.θ——β——ε..δ..γ——κ

ζ——η

DAto numero inuenire quot modis multangulus esse possit. Esto datus numerus A B. & multitudo angulorum eius B G. & sumatur in ipso B G. binarius G D. & quaternarius G E. & quoniam A B. multangulus existens, tot habet angulos quot sunt in B G. vnitates, qui fit octies ex A B. in B D. adscito quadrato ex B E. quadratum facit. Esto eius latus Z H. igitur quadratus ex Z H. æqualis est numero qui fit octies ex A B. in B D. & quadrato ipsius B E. sumatur in A B. vnitas A T. Itaque qui fit octies ex A B. in BD. diuiditur in eum qui fit quater ex AT. in BD. & in eum qui fit quater ex vtroque AB. TB. in B D. sumatur ergo DK. æqualis quadruplo vtriusque AB. TB. & transferamus eum qui fit quater ex vtroque A B. T B. in B D. in eum qui fit ex K D. in B D. loco autem illius qui fit quater ex A T. in BD. sumamus eum qui fit bis ex B D. in D E. (etenim D E. est binarius) igitur quadratus ipsius Z H. æqualis erit producto ex K D. in D B. & ei qui fit bis ex B D. in D E vna cum quadrato ex BE. atqui duplo producti ex BD. in D E. vna cum quadrato ex B E. æquales sunt quadrati ex BD. D E. ergo & quadratus ex Z H. æqualis erit producto ex KD. in D B. & quadratis ipsorum B D. D E. at producto ex K D in D B. vna cum quadrato ex DB. æqualis est qui fit ex KB. in BD. igitur & quadratus ex ZH. æqualis

A.T——B——E..D..G——K

Z——H

igitur

A. T.——B——E..D..G.——L——K

Z——H——N——M

erit producto ex K B. in B D. & quadrato ex DE. & quoniam D K. æqualis existens quadruplo vtriusque A B. B T. maior est quadruplo ipsius A T. hoc est quaternario, & quaternarij semissis est binarius D G. reliquus vtique G K. maior erit binario G D. igitur si diuidatur D K. bifariam in L. cadet L. inter G. & K. itaque loco quadrati ex L B. sumamus quadratum ex L D. cum producto ex K B. in B D. quandoquidem D K. secatur bifariam in L. & additur ei D B. ideoque producto ex K B. in B D. cum quadrato ex L D. æquatur quadratus ex L B. igitur quadratus ex L B. superat quadratum ex L D. producto ex K B. in B D. quocirca quadratus ex Z H. æqualis est interuallo quadratorum B L. L D. & quadrato D E. addatur vtrimque quadratus D L. igitur quadrati Z H. D L. æquales sunt quadratis B L. D E. cùm autem duo numeri simul, duobus simul æquales sunt, sunt & permutando æqualia eorum interualla. igitur interuallum quadratorum L D. D E. æquale est interuallo quadratorum L B. Z H. & quoniam E D. æqualis est D G. & additur illis G L. productus vtique ex E L. in L G. cum quadrato G D. æquatur quadrato D L. quamobrem interuallum quadratorum L D. D G. seu quadratorum L D. D E. quod est productus ex E L. in L G. æquale est interuallo quadratorum L B. Z H. ponatur ipsi B L. æqualis Z M. nam B L. maior est quam Z H. quoniam quadrati Z H. D L. ostensi sunt æquales quadratis B L. E D. cæterum quadratus D L. maior est quadrato D E. (quandoquidem maior est quadrato D G.) idcirco & quadratus B L. maior est quadrato Z H. ponatur ergo ipsi B L. æqualis Z M. erit igitur interuallum quadratorum Z M. Z H. æquale producto ex E L. in L G. & quoniam D K. quadruplus est vtriusque A B. B T. at D K. bifariam secatur in L. erit vtique D L. duplus vtriusque A B. B T. atqui D G. duplus est vnitatis A T. ergo reliquus G L. duplus est duorum B T. igitur G L. quadruplus est ipsius B T. & B T. est quarta pars ipsius G L. sed & A T. vnitas est quarta pars quaternarii E G ergo totus A B. totius E L. quarta pars est, sed & T B. ostensus est esse quarta pars ipsius L G. igitur productus ex A B. in B T. est sextadecima pars producti ex E L. in L G. productus ergo ex E L. in

α. θ——β——ε..δ..γ——λ——κ

ζ——η——ν——μ

τοῦ δκ. ἔστω τὸ λ. καὶ μεταβησόμεθα ἀπὸ τοῦ ἀπὸ βλ. εἰς τὸ ἀπὸ λδ. καὶ τὸ ὑπὸ κβδ. ἐπείπερ ἡ δκ. τέτμηται δίχα κατὰ τὸ λ. πρόσκειται δὲ ἡ δβ. καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ κβδ. καὶ τὸ ἀπὸ λδ. ἴσον τῷ ἀπὸ λβ. καὶ τὸ ἀπὸ λβ. ἄρα τοῦ ἀπὸ λδ. ὑπερέχει τῷ ὑπὸ κβδ. καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ζη ἄρα τετράγωνος ἴσος τῇ τῶν ἀπὸ τῶν βλ. λδ. ὑπεροχῇ καὶ τῷ ἀπὸ δε τετραγώνῳ. κοινὸς προσκείσθω ὁ ἀπὸ δλ. καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ζη. δλ. ἄρα ἴσοι τετράγωνοι εἰσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βλ. δε τετραγώνοις. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ δυσὶν ἀριθμοῖς ἴσοι ὦσι, καὶ ἐναλλὰξ αἱ ὑπεροχαὶ αὐτῶν ἴσαι, ἡ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν λδ. δε ὑπεροχὴ ἴση τῇ τῶν λβ. ζη. ὑπεροχῇ. καὶ ἐπεὶ ὁ εδ. τῷ δγ. ἴσος, πρόσκειται δὲ ὁ γλ. τὸ ἄρα ὑπὸ ελγ. μετὰ τοῦ ἀπὸ γδ. ἴσον τῷ ἀπὸ δλ. ἡ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν λδ. δγ. ὑπεροχή, τουτέστιν ἡ ἀπὸ τῶν λδ. δε. ἥτις ἐστὶν ὁ ὑπὸ ελγ. ἴση τῇ ἀπὸ τῶν λβ. ζη. κείσθω τῷ βλ. ἴσος ὁ ζμ. μείζων γάρ ἐστιν ὁ βλ. τοῦ ζη. ἐπείπερ ἐδείχθη τὰ ἀπὸ ζη. δλ. τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ βλ. εδ. τετραγώνοις. λοιπὸν τὸ ἀπὸ δλ. μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ δε, ἐπείπερ καὶ τοῦ ἀπὸ δγ. μεῖζόν ἐστιν, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ βλ. τοῦ ἀπὸ ζη. μεῖζόν ἐστι. κείσθω οὖν τῷ βλ. ἴσος ὁ ζμ. ἔσται δὴ καὶ ἡ τῶν ἀπὸ ζμ. ζη. ὑπεροχὴ ἴση τῷ ὑπὸ ελ. λγ. καὶ ἐπεὶ ὁ δκ. τετραπλασίων ἐστὶ συναμφοτέρου τοῦ αβ. βθ. ὁ δὲ δκ. δίχα τέτμηται κατὰ τὸ λ. καὶ ὁ δλ. ἄρα διπλασίων ἐστὶ συναμφοτέρου τοῦ αβ. βθ. ὧν ὁ δγ. διπλασίων ἐστὶ τοῦ αθ. λοιπὸς ἄρα ὁ γλ. διπλασίων ἐστὶ δύο τῶν βθ. τετραπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ γλ. τοῦ θβ. ὥστε τέταρτον μέρος ἐστὶν ὁ θβ. τοῦ λγ. ἀλλὰ καὶ ἡ αθ. μονὰς τέταρτόν ἐστι τῆς εγ. τετράδος. ὅλος ἄρα ὁ αβ τέταρτόν ἐστι μέρος τοῦ ελ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ θβ τοῦ λγ. μέρος τέταρτον. τὸ ἄρα ὑπὸ αβ. βθ. ἑκκαιδέκατόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ελ. λγ. τὸ ἄρα ὑπὸ ελ. λγ. ἴσον τῷ ἑκκαιδεκάκις ὑπὸ αβ. βθ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ελ. λγ. ἴσον τῇ τῶν ἀπὸ μζ. ζη ὑπεροχῇ. καὶ τὸ ἑκκαιδεκάκις ἄρα ὑπὸ αβ. βθ. ἴσον τῇ τῶν ἀπὸ μζ. ζη. ὑπεροχῇ, τουτέστι τῷ τε ἀπὸ μη. καὶ

τοῦ δὶς ὑπὸ ζη. ημ. ὥστε ὁ ἑκκαιδεκάκις ὑπὸ αβ. βθ. ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ ημ. καὶ τῷ δὶς ὑπὸ ζη. ημ. ὥστε ἄρτιός ἐστι ὁ ημ. τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ ν.

L G. æquale est producto ex A B. in B T. sedecies, sed iam ostensum est productum ex E L. in L G. æquari interuallo quadratorum M Z. Z H. ergo qui fit sedecies ex A B. in B T. æquatur interuallo quadratorum M Z. Z H. hoc est quadrato M H. & duplo producti ex Z H. in H M. quare qui fit sedecies ex A B. in B T. æqualis est quadrato H M. & duplo producti ex Z H. in H M. quamobrem H M. par est. Secetur bifariam in N.

IN DECIMAM.

Quamuis propositionis huius demonstratio tam in codice regio, quam in vaticano, atque etiam in eo quem præ manibus habuit Xilander, sit imperfecta, & multa desint, quæ diuinare meum non est, cum præterea neque ipse Diophanti scopus mihi satis perspectus sit, tamen quæcumque reperi, à mendis repurgata perfectæ restitui sanitati, vt ex apta syllogismorum, atque adeo verborum omnium connexione æstimabit prudens lector. si quæ sunt autem quæ prima fronte obscuriora videantur, ea sequenti adnotatione fient perspicua.

Primo quod ait Diophantus duplum producti ex B D. in D E. cum quadrato ex B E. æquari quadratis ex B D. D E. sic probatur. Duplum producti ex B D. in D E [1] æquatur duplo producti ex B E. in E D. & duplo quadrati E D. quare addendo vtrimque quadratum ex B E. erit duplum producti ex B D. in D E. cum quadrato ex B E. æquale duplo producti ex B E. in E D. quadrato ex B E. semel, & quadrato ex E D. bis, sed quadratis ipsorum B E. E D. cum duplo producti ex B E. in E D. [2] æquatur quadratus totius B D. igitur duplo producti ex B D. in D E. cum quadrato ex B E. æquantur quadrati ex B D. D E. quod erat demonstrandum.

[1] 3 secundi.
[2] 4. secundi.

A. T——B——E. D. G——L——K
Z——H——N——M

Secundo quod ait productum ex K D. in D B. cum quadrato ex D B. æquari producto ex K B. in B D. patet per tertiam 2. Euclidis.

Tertio, quod ait secto D K. bifariam in L. & addendo ei B D. productum ex K B. in B D. cum quadrato ex L D. æquari quadrato totius L B. patet per 6. 2. Euclidis.

Quartò, quod ait ex eo quod quadrati Z H. D L. æquales sunt quadratis B L. D E. sequi quadratorum D L. D E. idem esse interuallum, quod & quadratorum B L. Z H. id sic infertur, quia quadrati D L. Z H. æquales sunt quadratis B L. D E. [3] sunt in arithmetica proportionalitate quadrati D L. B L. D E. Z H. quare & permutando [4] sunt arithmeticè proportionales quadrati D L. D E. B L. Z H. quod est propositum.

[3] 4. primi porism.
[4] 7. primi porism.

Quintò, quod ait secto E G. bifariam in D. & addendo illi G L. productum ex E L. in G L. cum quadrato G D. æquari quadrato D L. nil aliud est quàm 6. 2. Euclidis.

Sextò, quod ait B L. maiorem esse quàm Z H. ita probatur, quoniam quadrati D L. Z H. ostensi sunt æquales quadratis B L. D E. [5] est in arithmetica proportionalitate quadratus D L. ad quadratum D E. sicut quadratus B L. ad quadratum Z H. sed quadratus D L. maior est quadrato D E. quia D L. maior est quàm D E. cum contineat D G. æqualem ipsi E D. & præterea G L. igitur & quadratus B L. maior est quadrato Z H. ac proinde B L. maior est quàm Z H. quod erat demonstrandum.

[5] 4. primi porism.

Denique quod ait, ex eo quod productus sedecies ex A B. in B T. æquatur quadrato H M. & duplo producti ex Z H. in H M. hinc sequi ipsum H M. esse numerum parem, sic probatur. Productum sedecies ex A B. in B T. binarius metitur, quandoquidem binarius metitur numerum 16. qui metitur eundem productum, sed & idem binarius metitur duplum producti ex Z H. in H M. vt euidens est. ergo idem binarius metitur reliquum quadratum H M. ac proinde quadratus H M. par est, ac per consequens & ipse H M. par est. quod erat intentum.

Hæc ad librum Diophanti de numeris polygonis adnotasse sufficiat. Quoniam vero hic liber mutilus est, & alia multa scitu digna tum theoremata, tum problemata excogitari possunt de numeris polygonis, præsertim de eorum progressione, visum est ea duobus sequentibus libris persequi, quos idcirco titulo Appendicis ad librum de numeris polygonis insignire voluimus. Sed & præterea, ad calcem libri primi, pulcherrimi corollarij loco, Problematis huius Diophantæi enodationem feliciter, vt spero, apponemus.

ΤΕΛΟΣ.

CLAVDII GASPARIS
BACHETI SEBVSIANI APPENDICIS
AD LIBRVM DE NVMERIS POLYGONIS.
LIBER PRIMVS.

PROPOSITIO PRIMA.

IN progreſſione arithmetica, quilibet terminorum poſt minimum, continet minimum ſemel, & differentiam toties, quotus quiſque eſt à minimo; nimirum primus à minimo ſemel; ſecundus bis; tertius ter & ita deinceps.

E. 2. F. 4. G. 6.
A. 3. B. 5. C. 7. D 9.

Sint in progreſſione arithmetica A B C D. & ſit differentia E. cuius duplum F. & triplum G. & ſic deinceps, dico B. continere A. & F. atque etiam D. continere A. & G. & euidens eſt ex ſola definitione progreſſionis arithmeticæ. Aliter per 3. Diophanti D. continet A. ſemel, & differentiam E. ſecundum numerum terminorum vnitate multatum id eſt ter, & eadem de cauſa C. continet A. ſemel, & E. bis, & rurſus B. continet A. & E. ſemel eademque ratio ſi plures exponantur numeri. Ergo patet propoſitum.

PROPOSITIO SECVNDA.

In progreſſione arithmetica, ſi differentia ducatur in triangulum numeri terminorum, vnitate multati, & producto addatur quod fit ex numero terminorum in minus extremum, fiet ſumma terminorum omnium.

E. 2.
A. 3. B. 5. C. 7. D. 9.

Sint A B C D. in progreſſione arithmetica, cuius differentia E. dico ſi triangulum lateris vnitate minoris numero terminorum ducatur in E. & producto addatur quod fit ex ipſo numero terminorum in A. fieri ſummam omnium A B C D. nam per præced. A. continetur ſemel in quolibet ipſorum A B C D. & præterea B. continet E. ſemel; C. bis continet eundem E. & D. continet ter eundem E. & ſic deinceps. Quare patet E. contineri in ipſis B C D. ſecundum vnitates trianguli cuius latus eſt numerus ipſorum B C D. minor ſcilicet vnitate quàm numerus omnium A B C D. quare patet propoſitum.

PROPOSITIO TERTIA.

Dato latere polygoni, ſi numerus angulorum binario multatus ducatur in datum latus vnitate multatum, & qui producitur, binario auctus ducatur in datum latus, fiet duplum polygoni.

H. 3. G. 4. F. 5.
A. 1. B. 4. C. 7. D. 10. E 13.
K. 12. L. 14. M. 70.

Sit F. datum latus polygoni, vnde ablata vnitate ſuperſit G. & ſit H. numerus angulorum binario multatus, quo ducto in G. fiat K. qui auctus binario faciat L. quo ducto in F. fiat M. dico M. eſſe duplum polygoni à latere F. exponantur termini A B C D E. in progreſſione arithmetica conſtitutiua polygoni à latere F. erit ergo ſumma omnium A B C D E. æqualis polygono illi, & erit A. vnitas, H. differentia, numerus terminorum ipſe F. vt conſtat ex demonſtratis à Diophanto. Quoniam igitur interuallum extremorum A E. per tertiam Diophanti æquatur producto ex H. in G. nempe ipſi K. & addendo interuallum numerorum duorum, duplo minoris, fit ſumma ipſorum; patet addito binario qui duplus eſt ipſius A. ad K. aggregatum L. æquari ſummæ ipſorum A E. Quamobrem qui fiet ex numero terminorum F. in ſummam extremorum L. nimirum M. æquatur duplo ſummæ omnium per quartam Diophanti, ſeu duplo polygoni à latere F. quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO QVARTA.

Si latus polygoni ducatur in ſeipſum vnitate multatum & productum ducatur in numerum angulorum binario multatum, fiet numerus qui adſcito duplo lateris, æquabitur duplo polygoni.

A. 5. B. 4. C. 3.
D. 70. E. 60. F. 20.
G. 70. H. 14. K. 12.

Sit A. latus polygoni & B. vnitate minor, & C. numerus angulorum binario multatus ductoque A. in B. fiat F. quo ducto in C. fiat E. & ad ipſum E. addendo duplum lateris A. fiat D. dico D. eſſe duplum polygoni à latere A. etenim ducto B. in C. fiat K. cui addito binario fiat H. quo ducto in A. fiat G. eritque G. per præced. duplum polygoni à latere A. quare probandum ipſos D G. eſſe æquales. Quoniam igitur idem B. ductus in A. & in C. producit F. & K. erit vt A. ad C. ſic F. ad K. quare ex A. in K. fiet idem E. qui fit ex C. in F. cum itaque H. contineat K. & binarium, productus ex A. in H. nempe G. æquatur productis ex A. in K. nempe ipſi E. & ex A. in binarium, nempe duplo ipſius A. At eidem E. & duplo A. æquatur D. ex hypotheſi. ergo D G. ſunt æquales, & ideo D. eſt duplus polygoni à latere A. quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO QVINTA.

Si quadratus dati lateris ducatur in numerum angulorum binario multatum, & à producto auferatur quod fit ex dato latere in numerum angulorum quaternario multatum, reſiduum eſt duplum polygoni à dato latere.

K. 42. L. 210. M. 14. N. 224.
A. 7. B. 6. C. 5. D. 3.
E. 49. F. 245. G. 21. H. 224.

Sit A. datum latus, & B. vnitate minor, & ſit C. numerus angulorum binario multatus, & D. idem numerus angulorum multatus quaternario, ſeu numerus binario minor ipſo C. & ſit E. quadratus ipſius A. quo ducto in C. fiat F. vnde auferendo G. qui fit ex D. in A. ſuperſit H. dico H. eſſe duplum polygoni à latere A. etenim ducto B. in A. fiat K. quo ducto in C. fiat L. cui addendo M. duplum ipſius A. fiat N. conſtat ex præced. ipſum N. eſſe duplum polygoni à latere A. Probandum ergo N. H. æquales eſſe. Quoniam itaque A. excedit B. vnitate qui fit ex A. in A. nempe E. æquatur iis qui fiunt ex A. in B. nempe ipſi K. & ex A. in vnitatem, nempe ipſi A. cum ergo K A. æquentur E. qui fit ex C. in E. nempe F. æquatur iis qui fiunt ex C. in K. nempe L. & ex C. in A, ſed quoniam C. ſuperat D. binario, productus ex C. in A. æquatur G. producto ex D. in A. & duplo ipſius A. nempe ipſi M. igitur F. æquatur tribus numeris L. M. G. Quamobrem auferendo vtrimque eundem G. remanent æquales hinc quidem H. inde vero L M. ſeu illis æqualis N. Quare cum N. oſtenſus ſit duplus polygoni à latere A. erit & H. eiuſdem polygoni duplus. Quod demonſtrandum erat

SCHOLIVM.

Hæc eſt demonſtratio regulæ quam tradunt Hyginus & Apoſroditus, ad inueniendum polygonum dato latere, de qua ſupra ad nonam Diophanti.

PROPOSITIO SEXTA.

Dato latere polygoni, ſi triangulus à dato latere vnitate multato ducatur in numerum angulorum binario multatum, fit numerus qui adſcito dato latere æquatur ipſi polygono.

G. 42. H. 210.
A. 7. B. 6. C. 5.
D. 21. E. 105. F. 112.

Sit datum latus A. & numerus vnitate minor B. & ſit C. numerus angulorum binario multatus, triangulus autem à latere B. eſto D. quo ducto in C. fiat. E. cui addendo datum latus A. fiat F. dico F. eſſe polygonum à latere A. etenim ducatur B. in A. & fiat G. quo ducto in C. fiat H. Tunc patet per octauam Diophanti ipſum G. eſſe duplum trianguli à latere B. nempe ipſius D. quare cùm ex eodem C. in ipſos G D. fiant H E. erit & H. duplus ipſius E. Itaque cùm ad H. addetur duplum ipſius A. & ad E. addetur A. vnde fit F. erit H. cum duplo A. duplus ipſius F. Atqui H. cum duplo A. eſt duplus polygoni à latere A. per quartam huius. Ergo F. eſt huiuſmodi polygonus. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Si quilibet polygonus adſciſcat ſuum latus ſecundum numerum angulorum binario multatum, & præterea vnitatem, fiet polygonus ſimilis proximè maior.

F. 51. E. 16. D. 35.
B. 6. A. 5. C. 3.
G. 1. H. 4. K. 7. L. 10. M. 13. N. 16.

Esto polygonus D. cuius latus A. cui addita vnitate fiat B. & sic numerus angulorum binario multatus C. Et productus ex A. in C. vnitate auctus esto E. additisque simul E D. fiat F. dico F. esse polygonum proximè maiorem ipso D. seu à latere B. Etenim exponatur progressio arithmetica constitutiua huiusmodi polygonorum, & sumantur in ea tot termini G. H. K. L. M. N. quot sunt in B. vnitates. Igitur per octauam Diophanti differentia progressionis est C. & summa omnium est polygonus à latere B. At summa ipsorum G. H. K. L. M. est polygonus D. Polygonus ergo à latere B. excedit ipsum D. numero N. Atqui per tertiam Diophāti N. continet vnitatem G. & productum ex differentia C. in A. vnitate minorem numero terminorum, & productus ex C. in A. vnitate auctus est E. Igitur E. æquatur ipsi N. cum ergo vt ostensum est compositus ex N D. æquetur polygono à latere B. vtique compositus ex E D. nempe F. erit huiusmodi polygonus quod erat propositum.

PROPOSITIO OCTAVA.

Si triangulus collateralis polygono ducatur in numerum angulorum binario multatum, & à producto auferatur, quod fit ex latere polygoni in numerum angulorum ternario multatum, residuum æquabitur ipsi polygono.

Esto polygonus K. cuius latus A. & numerus angulorum binario multatus B. vnde ablata vnitate supersit C. ternario minor numero angulorum, sitque D. triangulus à latere A. quo ducto in B. fiat E. ductoque C. in A. fiat F. dico si F. auferatur ex E. relinqui polygonum K. etenim sumatur G. triangulus à latere vnitate minore ipso A. ductoque B. in G. fiat H. vnde per sextam huius additis simul A. & H. fiet K. Quia igitur per præced. si ad G. addatur vnitas, & suum latus fiet D. vnitas autem & latus ipsius G. æquantur A. erit D. æqualis duobus A G. simul. quamobrem qui fit ex B. in D nempe E. æquatur iis qui fiunt ex B. in A. & ex B. in G. qui est H. Productus autem ex B. in A. (quandoquidem B. superat vnitate ipsum C.) æquatur producto ex C. in A. nempe F. & præterea ipsi A. Igitur E. æquatur tribus numeris H. A. F. vnde auferendo vtrimque eundem F. remanet summa duorum A. H. nempe polygonus K. æqualis ei qui restat si ex E. auferatur F. quod demonstrandum erat.

D. 15. E. 45. F. 10.
A. 5. B. 3. C. 2.
G. 10. H. 30. K. 35.

SCHOLIVM.

Ex multis harum propositionum, ad inueniendum polygonum dato latere collige canones elegantes; & quidem faciliores & compendiosiores eo quem tradit Diophantus propositione nona.

I. CANON.

Ducito datum latus vnitate multatum in numerum angulorum binario multatum; & productum binario auctum ducito in datum latus, fiet duplum polygoni. constat per tertiam huius.

Vt dato latere 7. si quaratur eius pentagonus: latus vnitate multatum est 6. numerus angulorum binario multatus 3. quo ducto in 6. fit 18. qui binario auctus fit 20. quo ducto in 7. fit 140. cuius semissis 70. est quasitus pentagonus.

II. CANON.

Ducito datum latus in numerum vnitate minorem, productum ducito in numerum angulorum binario multatum producto adde duplum lateris, fiet duplum polygoni per quartam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. ducito 7. in 6. fit 42. quo ducto in 3. fit 126. cui si addas duplum 7. nimirum 14. fit vt prius 140. cuius semissis 70. est quasitus pentagonus.

III. CANON.

Ducito quadratum dati lateris in numerum angulorum binario multatum, à producto aufer quod fit à dato latere in numerum angulorum quaternario multatum; residuum erit duplum polygoni per quintam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. ducito 49. in 3. fit 147. hinc aufer productum ex 7. in 1. nempe 7. residuum est vt prius 140. cuius semissis 70. est quasitus pentagonus.

IV. CANON.

Sume triangulum à latere dato vnitate multato, quem ducito in numerum angulorum binario multatum, producto adde datum latus, fiet quæſitus polygonus per ſextam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. ſume triangulum à latere 6. nempe 21. quo ducto in 3. fit 63. cui ſi addas datum latus 7. fit pentagonus quæſitus 70.

V. CANON

Sume triangulum à dato latere, quem ducito in numerum angulorum binario multatum, à producto aufer quod fit ex latere dato in numerum angulorum multatum ternario, reſiduum erit quæſitus polygonus per octauam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. ſume triangulum illius nempe 28. quo ducto in 3. fit 84. vnde aufer quod fit ex 7. in 2. nempe 14. reſiduum 70. eſt quæſitus pentagonus, vide rurſus omnium expeditiſſimum Canonem in ſcholio vndecima.

PROPOSITIO NONA.

Si numerus ſecetur in duas partes, triangulus totius æqualis eſt triangulis partium & plano ſub partibus comprehenſo.

D.....E...F. G
A.....B...C
K 72.

Numerus A C. ſecetur in A B. B C. dico triangulum totius A C. æquari triangulis partium A B. B C. & plano ſub A B. B C. ſumatur D E. æqualis ipſi A B. & ei apponatur E F. æqualis B C. & adiiciatur ei vnitas F G. conſtat ergo D G. ſuperare A C. vnitate, ſicut & E G ſuperat B C. vnitate. Ducto inſuper A C. in D G. fiat K. patet ergo per octauam Diophanti vel tertiam huius, ipſum K. eſſe duplum trianguli à latere A C. quia vero ducere A C. in D G. idem eſt atque ducere ſigillatim AB. in D E. E F. F G. & BC. in D E. E G. erit K. æqualis productis illis omnibus. At ducere A B. in D E. ſibi æqualem & in vnitatem F G. idem eſt atque ducere A B. in numerum vnitate maiorem ſeipſo, vnde fit duplum trianguli ipſius A B. ducere autem A B. in E F. idem eſt atque ducere A B. in B C. igitur patet ex ductu A B. in totum D G. fieri duplum trianguli A B. & planum ſub A B. B C. ſimiliter productus ex B C. in D E. æquatur plano ſub A B. B C. & productus ex B C. in E G. qui vnitate maior eſt, æquatur duplo trianguli ipſius B C. igitur productus ex B C. in totum D G. æquatur duplo trianguli ipſius B C. & plano ſub A B. B C. quamobrem compoſitum ex productis ex A B. in D G. & ex B C. in D G. nempe productus ex A C. in D G. nimirum ipſe K. æqualis eſt duplo triangulorum A B. B C. & duplo plani ſub A B. B C. igitur dimidium ipſius K. nempe triangulus A C. æquatur triangulis A B. B C. & plano ſub A B. B C. quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

Hinc ſequitur duplum cuiuſlibet trianguli adſumpto collaterali quadrato, facere triangulum à latere duplicato; quod euidens eſt ſi A B. B C. ponantur æquales.

PROPOSITIO DECIMA.

Si numerus ſecetur in duas partes, polygonus totius æqualis eſt ſimilibus polygonis partium, & plano ſub partibus comprehenſo, ſumpto ſecundum numerum angulorum binario multatum.

D 3. E 2.
A.....B....C.
F. 15. G. 10. H. 20.
K. 45. L. 30. M. 60.
N. 10. P. 8. Q. 57.
R. 35. S. 22. T. 117.

Sit numerus A C. ſectus in A B. B C. & ſit D. numerus angulorum binario multatus, & E. vnitate minor. dico polygonum totius A C. æquari polygonis ſimilibus partium A B. B C. & producto ex D. in planum ſub A B. B C. comprehenſum. Etenim ſumantur F. & G. trianguli ipſorum A B. B C. & ſit H. planus ſub A B. B C. Tum ducto D. in ipſos F. G. H. ſigillatim, fiant K. L. M. & ducto E. qui eſt numerus angulorum ternario multatus in A B. B C. fiant N. P. quibus detractis ab ipſis K. L. relinquantur R. S. quorum ſumma Q. qua addita ad M. fiat T. Patet itaque ex ſola conſtructione & per octauam huius numeros R. S. eſſe polygonos ipſorum A B. B C. quorum ſumma Q. addita ad M. (qui fit ex D. in H. planum ſub partibus) fiet vtique T. continens polygonos partium, & planum ſub partibus ſumptum ſecundum

numerum angulorum binario multatum. Restat ergo probandum ipsum T. esse polygonum similem totius A C. Quoniam ergo F G. sunt trianguli partium A B. B C. & H. planus sub partibus erit aggregatum ipsorum F. G. H. æquale triangulo totius A C. per præced. Quare cùm ex. D. in ipsos F. G. H. fiant K. L. M. erit aggregatum ipsorum K. L. M æquale producto ex D. in triangulum ipsius A C. Quare cum etiam N. P. æquentur producto ex E. in A C. & iis sublatis de aggregato ipsorum K. L. M. supersint R. S. M. seu T. patet T. esse id quod restat si productus ex E. in A C. auferatur à producto ex D. in triangulum eiusdem A C. ergo T. est polygonus ipsius A C. per octauam huius. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Quod peculiariter de triangulis ostensum est in precedenti, & ab Euclide de quadratis quarta secundi. Hic vniuersaliter ostenditur de omnibus polygonis, vt merito inter pulcherrimas propositiones hac censeri debeat quam primus omnium (quod sciam) ego demonstraui.

Et quemadmodum quartam secundi extendimus ad sectionem numeri in quotlibet partes. Sic & istam vniuersalius proponemus, hoc scilicet modo.

Si numerus secetur in quotlibet partes, polygonus totius aqualis est similibus polygonis partium, & productis ex qualibet parte in quamlibet aliam toties sumptis quot sunt vnitates in numero angulorum binario multato.

K. 3.
A....B...C.. D

Esto enim A D. sectus in quotlibet partes A B. B C. C D. & sit K. numerus angulorum binario multatus. Dico polygonum totius A D. aquari polygonis singulorum A B. B C. C D. & productis ex qualibet parte in quamlibet sumptis secundum K. consideretur prius A D. vt sectus in duas partes A C. C D. Tunc per hanc propositionem decimam polygonum totius aquatur polygonis ipsorum A C. C D. & producto ex A C. in C D. ducto in K. similiter polygonus A C. aquatur polygonis ipsorum A B. B C. & producto ex A B. in B C. ducto in K. Quare cum & productus ex A C. in C D. ductus in K. aquetur productis ex A B. & B C. in C D. ductis in K. patet polygonum totius aquari polygonis partium A B. B C. C D. & productis ex qualibet in quamlibet ductis in K. quod si ponatur numerus diuisus in quatuor partes, simile concludetur per id quod de diuisione in tres ostensum est, & sic in infinitum. Ergo patet propositum.

PROPOSITIO VNDECIMA.

Quilibet polygonus componitur ex tot triangulis, quot vnitates continet numerus angulorum binario multatus. Ex his autem vnus est collateralis ipsi polygono, reliqui vero à latere proximè minori.

A. 51.
D. 3. B. 6. C 5.

Esto quilibet polygonus A. cuius latus B. quod vnitate multatum sit C. & numerus angulorum binario multatus esto D. dico polygonum A. componi ex tot triangulis quot sunt in D. vnitates, quorum vnus est ab ipso latere B. reliqui à latere C. Etenim per sextam huius polygonus A. æquatur producto ex D. in triangulum abs C. adscito latere B. sed si vni triangulorum abs C. concipiatur addi B. fiet triangulum ab ipso B. per septimam huius (quia B. continet C. & præterea vnitatem) Patet ergo polygonum A. componi ex tot triangulis quot sunt in D. vnitates quorum vnus est à latere B. reliqui à latere C. quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Hinc etiam elicietur Canon ad inueniendum polygonum dato latere. Nam si queratur pentagonum à latere 6. quia numerus angulorum binario multatus est 3. constat quæsitum pentagonum componi ex tribus triangulis quorum vnus est à latere 6. reliqui duo à latere 5. si ergo sumas huiusmodi triangulos 21. 15. 15. horum summa erit 51. quæsitus pentagonus. Quia vero si datum latus ducatur in seipsum vnitate auctum fit duplum trianguli à dato latere, & si idem latus ducatur in seipsum vnitate multatum, fit duplum trianguli proximè minoris, formari poterit Canon omnium elegantissimus & expeditissimus.

CANON.

Dato lateri vnitate aucto adde ipsummet latus vnitate multatum toties, quot sunt vnitates in numero angulorum multato ternario, summam ducito in datum latus, fiet duplum quæsiti polygoni.

Vt si queratur pentagonum à latere 6. adde ad 7. duplum ipsius 5. nempe 10. fiet 17. quo ducto in datum latus 6. fit 102. cuius semissis 51. est quæsitus pentagonus.

ALITER.

Ducito datum latus in numerum angulorum binario multatum, à producto aufer numerum angulorum multatum quaternario, reſiduum ducito in datum latus, fiet duplum polygoni.

Vt in dato exemplo ducito 6. in 3. fit 18. hinc aufer 1. reſtant 17. quæ ducta in 6. faciunt 102. vt prius, cuius ſemiſſis 51. Quoniam vero conuerſum huius propoſitionis vtile eſt ad perficiendum vltimum problema Diophanti vt ſuo loco patebit, operæpretium eſt illud demonſtrare, nimirum.

Si quilibet numerus ducatur in quemlibet triangulum, & producto addatur triangulum proxime maius, totum erit numerus polygonus, collateralis quidem maiori triangulo, ſed tot angulorum duobus amplius, quot ipſe triangulis conſtat.

G. 144. H. 189. K. 189.
A. 36. B. 45. C. 9.
D. 4. E. 5. F. 7.

Eſto A. quilibet triangulus, & proxime maior B. cuius latus C. Tum ſumatur quilibet numerus D. qui vnitate auctus fiat E. & huic addendo binarium fiat F. & ducto D. in A. fiat G. cui addendo B. fiat H. Patet ergo H. tot conſtare triangulis quot ſunt vnitates in E. etenim H. conſtat ex triangulo B. & numero G. qui continet toties triangulum A. quot ſunt vnitates in D. quare cum E. ſuperet D. vnitate, patet H. tot triangulis conſtare quot ſunt vnitates in E. cum igitur F. ſit binario amplior quàm E. dico H. eſſe polygonum à latere quidem C. ſed tot angulorum quot ſunt vnitates in F. etenim ſi non ſit, ſumatur talis polygonus K. facile eſt oſtendere K. æquari ipſi H. Quia enim K. eſt polygonus à latere C. tot angulorum, quot ſunt vnitates in F. ſequitur per hanc vndecimam propoſitionem ipſum K. tot conſtare triangulis quot ſunt vnitates in E. quorum vnum collaterale eſt ipſi K. hoc eſt æquale ipſi B. reliqua æqualia ſunt ipſi A. ſed & H. iiſdem prorſus triangulis conſtat ex conſtructione. Igitur K. eſt æqualis ipſi H. ac proinde H. eſt polygonus à latere C. tot angulorum, quot ſunt vnitates in F. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DVODECIMA.

Si quotlibet polygoni collaterales ordinate diſponantur, ij cum ſuo communi latere conſtituent progreſſionem arithmeticam, cuius differentia erit triangulus ab eodem latere vnitate multato.

H. 1. K. 2. L. 3. M. 4.
A. 7. B. 28. C. 49. D. 70. E. 91.
F. 6. G. 21.

Sit A. datum latus cuius triangulus B. quadratus C. pentagonus D. hexagonus E. & ſic deinceps. ſitque F. minor vnitate quam A. cuius triangulus G. dico ipſos A B C D E. conſtituere progreſſionem arithmeticam cuius differentia eſt G. etenim cum numeri angulorum ipſorum B C D E. ſint numeri 3. 4. 5. 6. & ſic deinceps per additionem vnitatis creſcentes, ſi ſumantur H K L M. numeri angulorum binario multati erunt hi 1. 2. 3. 4. qui etiam per additionem vnitatis creſcent. Itaque quoniam per 7. huius, G. adſciſcens A. maiorem vnitate quam ſuum latus F. facit triangulum B. patet G. eſſe differentiam duorum A B. Rurſus quia per præced. ſinguli C D E. continent tot triangulos quot ſunt vnitates ſingulis K. M. quorum vnus eſt B. reliqui omnes æquales ipſi G. patet C. continere B. & ipſum G. ſemel, at D. continere B. & inſuper G. bis, atque etiam E. continere B. & ipſum præterea G. ter, & ſic in infinitum quilibet altior polygonus continet B. & adhuc ipſum G. ſemel amplius quam antecedens polygonus. Conſtat igitur per primam huius G. eſſe differentiam per quam progrediuntur ipſi A B C D E. quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Hinc elicitur Canon ad inueniendam ſummam quotlibet polygonorum collateralium ordinate diſpoſitorum dato latere, vt ſi quæratur ſumma quadrati, pentagoni, hexagoni, heptagoni & octogoni à latere 4.

CANON.

Ducito triangulum lateris vnitate multati in numerum multitudinis polygonorum vnitate multatum, producto adde duplum minimi polygoni, ſummam ducito in numerum multitudinis polygonorum, fiet duplum quæſitæ ſummæ.

Vt in exemplo propoſito triangulum lateris vnitate multati eſt 6. quo ducto in 4. numerum multitudinis polygonorum vnitate multatum fit 24. duplum autem minimi polygoni, nempe quadrati à latere 4. eſt 32. qui cum 24. facit 56. quo ducto in 5. numerum multitudinis polygonorum fit 280. cuius ſemiſſis 140. eſt ſumma quæſita.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

In progressione numerorum secundum seriem naturalem dispositorum ab vnitate, polygonus maximi, æquatur maximo terminorum, & summæ reliquorum sumptæ secundum numerum angulorum binario multatum.

H 3. G 51.
A 1. B 2. C 3. D 4. E 5. F 6.

Hæc facile per 6. concluditur, cum qua idem ferè est mutatis verbis. Sint A B C D E F. quotlibet numeri secundum seriem naturalem numerorum ab vnitate dispositi, & maximi F. polygonus esto G. & numerus angulorum binario multatus sit H. dico G. æquari ipsi F. & summæ reliquorum A B C. D. E. sumptæ secundum H. Quia enim summa ipsorum A B C D E. est triangulus à latere E. vnitate minore ipso F. patet per 6. productum ex H. in illum triangulum adscito F. æquari ipsi G. vnde patet propositum.

PROPOSITIO DECIMAQVARTA.

In progressione numerorum secundum seriem naturalem dispositorum, aggregatum similium polygonorum à singulis, æquatur productis ex sic dispositis numeris in totidem numeros progressionis huiusmodi polygonorum constitutiuæ, si videlicet maximus vnius ordinis ducatur in minimum alterius ordinis. Tum primus à maximo ducatur in primum à minimo, & secundus à maximo in secundum à minimo, & ita deinceps.

X 40 V 40
A 1. B 2. C 3. D 4.
Q 1. R 3. S 3. T 3. M 1. N. 3. P 3. K 1. L 3.
H 10. G 7. F 4. E 1.

Sint A B C D. secundum seriem naturalem dispositi & summa polygonorum à singulis esto V. tum sumantur totidem termini in progressione huiusmodi polygonorum constitutiua, ordine inuerso dispositi E F G H. ductisque A in H. B in G. C in F. D in E. sit productorum summa X. dico VX. esse æquales, sit enim L. differentia progressionis constitutiuæ, seu numerus angulorum binario multatus: patet per primam huius F. continere vnitatem E. & L. semel; G. continere vnitatem semel, & L. bis; H. continere vnitatem semel, & L. ter. Diuidantur ergo numeri H. G. F. in partes ex quibus componuntur, nimirum F. in vnitatem K. & in L. Ipse autem G. in vnitatem M. & in N. P. æquales ipsi L. Denique ipse H. resoluatur in vnitatem Q. & in R. S. T. æquales ipsi L. Patet numeros qui fiunt ex A. in H. ex B. in G. ex C. in F. ex D. in E. simul iunctos: nempe X. æquari omnibus qui fiunt ex A in Q. R. S. T. ex B. in M N P. & ex C. in K L. & ex D. in E. Quia igitur ex E in D. fit ipse D. (quia E est vnitas) At ducere L. in C. P. in B. & T. in A. idem est ac ducere L. in summam omnium A B C. productus autem ex L. in summam omnium A B C. adscito D. facit polygonum ipsius D. per præcedentem. Patet productos ex E. in D. ex L. in C. ex P. in B. & ex T. in A. æquari polygono ipsius D. simili prorsus argumento ostendemus productos ex K. in C. ex N. in B. & ex S. in A. æquari polygono ipsius C. & rursus productos ex M. in B. & ex R. in A. æquari polygono ipsius B. & denique constat ex Q vnitate in A. vnitatem fieri polygonum ipsius A. Igitur euidens est omnia illa producta seu numerum X. æquari polygonis à singulis A B C D. seu numero V. quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO DECIMAQVINTA.

Si sint quotlibet numeri ab vnitate secundum seriem naturalem dispositi, aggregatum productorum ex numero angulorum binario multato in primum à maximo semel; in secundum bis; in tertium ter, & sic deinceps adscita summa numerorum, æquatur aggregato polygonorum à singulis.

Repetatur enim præcedens figura. Dico aggregatum productorum ex L. in C. semel, in B. bis in A ter & sic deinceps, adscita summa ipsorum A B C D. æquari V. aggregato polygonorum à singulis. Nam ex præcedenti constat V. æquari productis ex E. in D. ex K L. in C. ex M N P. in B. & ex Q R S T. in A. Quia vero singuli E. K. M. Q. æquantur vnitati producta ex E. in D. ex K. in C. ex M. in B. & ex Q. in A. simul æquantur summæ ipsorum A B C D. Rursus quia singuli L. N. P. R. S. T. sunt æquales inter se, ducere L. in C. & N P. in B. & R S T. in A. idem est atque ducere L. in C. semel, & in B. bis & in A. ter. Igitur productis ex L. in C. semel in B. bis in A. ter, & sic deinceps, si addatur summa omnium A B C D. fit V. aggregatum polygonorum à singulis. Quod demonstrandum erat.

X 40 V 40
A 1. B 2. C 3. D 4.
Q 1. R 3. S 3. T 3. M 1. N 3. P. 3. K 1. L 3.
H 10. G 7. F 4. E 1.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

Si ſint quotlibet numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti, & numerus angulorum binario multatus ducatur in aggregatum triangulorum à ſingulis relicto maximo, & producto addatur triangulus maximi, fiet aggregatum polygonorum à ſingulis.

V 40.
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
L. 3.

Sint iidem qui ſupra A B C D. dico ſi L. ducatur in aggregatum triangulorum à ſingulis A B C. & producto addatur triangulus ipſius D. fieri V. aggregatum polygonorum à ſingulis. Nam triangulus C. æquatur ſummæ ipſorum A B C. triangulus B. æquatur ſummæ ipſorum A B. & triangulus A. æquatur ipſi A. ſumere autem A B C. tum A B. tum A. idem eſt atque ſumere C. ſemel, B. bis, A. ter, & ſic deinceps, ergo aggregatum triangulorum à ſingulis A B C. æquatur ipſi C. ſemel, & B. bis, & A. ter. Quare ducere L. in aggregatum illud triangulorum, idem eſt ac ducere L. in C. ſemel, in B. bis, in A. ter. At productis ex L. in C. ſemel, in B. bis, in A. ter, ſi addatur ſumma omnium A B C D. ſeu triangulus D. fit V. per præced. Igitur ſi & producto ex L. in aggregatum triangulorum à ſingulis A B C. addatur triangulus D. fiet idem V. aggregatum polygonorum à ſingulis. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Si fuerint quotlibet numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem numerorum diſpoſiti, productus ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum maximi, adſcita ſumma numerorum, vel adſcito triangulo maximi, æquatur triplo ſimilium polygonorum à ſingulis.

M. 5. L. 4. K. 3. H. 2. G. 1.
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4. E. 5. F. 6.
N. 3.

Sint A B C D E F. numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti, dico ſi polygonus maximi F. ducatur in numerum terminorum vnitate auctum & producto addatur ſumma ipſorum A B C D E F. ſeu quod idem eſt triangulus ipſius F. ſummam æquari triplo polygonorum ſimilium à ſingulis. Sit enim N. numerus angulorum binario multatus, & ſuper ipſos A B C D E. diſponantur totidem illis æquales ordine inuerſo G. H. K. L. M. ita vt G. ſit vnitas. H. binarius K. ternarius & ſic deinceps. Tunc patet ambos G E. æquari ipſi F. & ſimiliter ambos A M. ſed & ob medietatem arithmeticam ſumma duorum A E. æqualis eſt ſummæ duorum B D. atque etiam duplo ipſius C. Igitur cùm ambo A E. æquentur ipſi F. & ſumma duorum B D. ſit eadem quæ duorum B L. & eadem quæ duorum D H. & K. ſit æqualis ipſi C. patet ſingulas ſummas binorum M A. L B. K C. H D. G E. æquari ipſi F. Quare ſi harum ſummarum polygoni ſumantur, & præterea polygonus ipſius F. bis, æquabuntur hi omnes polygoni ſimul producto ex polygono ipſius F. in numerum terminorum vnitate auctum. Itaque cum polygonus ſummæ M A. per decimam huius ſit æqualis polygonis ipſorum M. & A. & plano ſub M A. ducto in N. Item polygonus ſummæ L B. ſit æqualis polygonis K. & L. & B. & plano ſub L B. ducto in N. Item polygonus ſummæ K C. ſit æqualis polygonis K. & C. & plano ſub K C. ducto in N. Itemque polygoni ſummarum H D. G E. ſint æquales polygonis ipſorum H. D. G. E. & planis ſub H D. G E. ductis in N. polygoni autem ipſorum G. H. K. L. M. ſint æquales polygonis ipſorum ABCDE. ſi his addatur duplum polygoni F. ſequitur duplum polygonorum à ſingulis A B C D E F. vna cum planis M A. ſub L B. ſub K C. ſub A D. ſub G E. ductis in N. æquari producto ex polygono ipſius F. in numerum terminorum vnitate auctum. Quare ſi adiiciatur vtrimque ſumma omnium A B C D E F. erunt ſummæ vtrimque æquales. Quia vero G. eſt vnitas H. binarius. K. ternarius & ſic deinceps patet productum ex G in E æquari ipſi E. & productum ex H. in D. æquari duplo D. & productum ex K in C. æquari C. ter, & productum ex L. in B. æquari B. quater & productum ex M. in A. æquari A. quinquies & ſic deinceps. Igitur ducere N. in omnia illa producta, idem eſt atque ducere N. in E. ſemel, in D. bis, in C. ter, in B. quater, in A quinquies & ſic deinceps. Quare per 16. huius qui ſit ex N. in omnia illa producta, adſcita ſumma ipſorum A B C D E F. æquatur polygonis à ſingulis. Quamobrem qui ſit ex polygono F. in numerum terminorum vnitate auctum adſcita ſumma omnium, æquatur triplo polygonorum à ſingulis. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

Si fuerint quotlibet numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem numerorum diſpoſiti, in idem latus vnitate auctum, æquatur ſextuplo ſimilium polygonorum à ſingulis.

A1. B2. C3. D4. E5. F35. G70. H75. K6. M210. L450.

Sint A B C D E. ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti, & maximi E. polygonus eſto F. cuius duplum G. quo addito ad ipſum E. fiat H. quo ducto in K. vnitate maiorem ipſo E. fiat L. dico L. eſſe ſextuplum ſimilium polygonorum à ſingulis A B C D E. Etenim ex K. in F. fiat M. Patet ergo per preced. ſi ad M. addatur ſumma omnium A B C D E. fieri triplum polygonorum à ſingulis. Quia vero productus ex K. in H. nempe L. æquatur productis ex K. in G. & in E. ex quibus H. componitur. Productus autem ex K. in G. eſt duplus ad M. (quia G. duplus eſt ipſius F) & productus ex K. in E. eſt duplus ſummæ omnium A B C D E. per 4. Diophanti. ſequitur L. continere duplum ipſius M. & ſummæ omnium A B C D E. id eſt duplum tripli polygonorum à ſingulis. Igitur L. eſt ſextuplum huiuſmodi polygonorum. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Ex his duab. propoſitionib. elicies canones ad inueniendum ſummam quotlibet polygonorum ſimilium ab vnitate ordinatè diſpoſitorum.

CANON. I.

Cape maximum polygonorum quem ducito in ſuum latus vnitate auctum, producto adde triangulum ipſius lateris, ſummæ triens erit aggregatum polygonorum per 17.

Vt ſi quæratur ſumma 5. pentagonorum ab vnitate cape pentagonum ipſius 5. nempe 35. quem ducito in 6. fit 210. cui adde triangulum ipſius 5. nempe 15. fiet 225. cuius triens 75. eſt quæſita ſumma.

CANON II.

Duplo maximi polygoni adde latus illius, ſummam ducito in idem latus vnitate auctum, producti ſextans erit aggregatum polygonorum per 18.

Vt in dato exemplo duplo 35. nempe 70. adde 5. fit 75. quo ducto in 6. fit 450. cuius ſextans 75. eſt quæſita ſumma.

Hæc eadem regula habetur in excerptis nondum editis ex libro Apofroditi & Betrubi Ruſi Architectonis, quam tamen à nemine hactenus demonſtratam vidi.

Quoniam vero regulæ generales de polygonis ad triangulos vt pote ſimpliciores applicatæ, ſunt ſimpliciores & faciliores, fiet forte Canon facilior applicando 17. huius ad triangulos & implorando auxilium 16. hac arte.

CANON III.

Cape triangulum maximi lateris vnitate multati, quem ducito in idem latus vnitate auctum, producti cape trientem, quem ducito in numerum angulorum binario multatum, producto adde triangulum maximi lateris, fiet aggregatum polygonorum.

Vt ſi quæratur aggregatum 7. pentagonorum ab vnitate cape 21. triangulum ipſius 6. quem ducito in 8. fit 168. cuius triens 56. quo ducto in 3. fit 168. cui ſi addas 28. fit 196. aggregatum quæſitum.

Quoniam vero in hunc locum reiecimus explicationem vltimæ propoſitionis Diophanti, cuius tractatio mutila eſt apud ipſum, eius promiſſi fide nos exſoluamus, non quidem inſiſtentes veſtigijs Diophanti, ſed aliam prorſus amplectentes viam.

PROPOSITIO 19. *PROBLEMA* 1.

Propoſito quolibet numero, inueſtigare quot modis polygonus dici poſſit.

Sit propoſitus numerus 120. Primo quidem conſtat ex definitione Diophanti, eum eſſe polygonum à latere 2. totque angulorum, quot ipſe continet vnitates, & ſic dicetur hecaconticoſigonalis. Deinde inuenietur triangulus eſſe à latere 15. quia eius octuplum vnitate auctum, quadratum 961. efficit, cuius latus 31. vnde ablata vnitate ſupereſt 30. cuius ſemiſſis 15. eſt latus trigoni 120. vt conſtat ex Diophanto.

Denique vt ſciamus an alijs modis idem 120. poſſit eſſe polygonus. Exponantur ab vnitate omnes in infinitum ordinatim numeri, puta 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. & illis ſubiiciantur ab vnitate trianguIares omnes ordinate diſpoſiti, puta 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. vt factum vides in appoſita tabella, quæ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	620

poteſt in infinitum extendi. Tum propoſitus numerus 120. diuidatur ſigillatim per numeros triangulos, & obſeruetur, quoties reſiduum ex diuiſione æquale erit lateri proxime maioris trianguli, toties enim numerus 120. polygonus erit, cuius latus erit ipſum reſiduum diuiſionis. At quotiens oſtendet differentiam progreſſionis huiuſmodi polygonorum conſtitutiuæ, ſeu quod idem eſt, idem quotiens binario auctus, numerum angulorum indicabit. Hac arte ſi diuidas 120. per triangulum 3. ita vt reſiduum ſit 3. fiet quotiens 39. indicans 120. eſſe polygonum angulorum 41. ſeu teſſaracontahenagonalem, & reſiduum 3. latus illius denotat, ita ſi inſtituas progreſſionem trium terminorum quorum differentia ſit 39. fient hi 1. 40. 79. & ex his polygoni angulorum 41. formabuntur 1. 41. 120. Rurſus ſi diuidas 120. per triangulum 28. ita vt reſiduum ſit 8. fiet quotiens 4. indicans 120. eſſe hexagonum, at reſiduum 8. radicem illius deſignat. Ita ſi inſtituas progreſſionem octo terminorum quorum differentia ſit 4. erunt hi 1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. quorum ſumma vtique eſt 120. Quia vero 120. per nullum alium triangulum diuidi poteſt, ita vt reſiduum ſit æquale lateri proxime maioris trianguli, ideo pronunciamus propoſitum eundem numerum, pluribus alijs modis eſſe non poſſe polygonum quàm quatuor; cùm ſit vt oſtenſum eſt triangulus, hexagonus, teſſaracontahenagonus, & hecatontaicoſigonus. Huius rei demonſtratio facilis eſt, quod vno exemplo fiet manifeſtum. Quia 28. diuidens 120. dat quotientem 4. & reſiduum 8. patet 120. æquari quadruplo ipſius 28. & numero 8. atqui per ſeptimam huius triangulus 28. cum 8 (qui vnitate maior eſt quam latus ipſius) facit triangulum 36. proximè maiorem, igitur iungendo 28. ſemel cum reſiduo 8. ſemel, erit 120. æqualis triangulo 28. ter, & triangulo ſequenti 36. ſemel, quamobrem per demonſtrata in ſcholio 11. huius 120. eſt polygonus collateralis ipſi 36. hoc eſt à latere 8. & habens tot angulos, quot triangulis ipſe conſtat plus duobus hoc eſt 6. quod erat demonſtrandum. Et euidens eſt ſi diuiſio tentata ſit per omnes triangulos, donec deuentum ſit ad æqualem vel maiorem ipſo 120. eundem 120. non poſſe eſſe polygonum aliter quam modis ſic inuentis, etenim quomodocunque dicatur eſſe polygonus, oportebit per 11. huius vt componatur ex tot triangulis quot ipſe angulos habet, minus duobus, quorum vnus erit illi collateralis, alij à latere vnitate minore, quare ſi collateralis triangulus reſoluatur in ſuum latus, & in proxime minorem triangulum, quibus æquatur, iam propoſitus numerus continebit aliquoties minorem triangulum, & præterea latus maioris trianguli ſemel, & ideo propoſitus numerus ex demonſtratis oſtendetur eſſe polygonus vno inuentorum modorum, vel inferetur omnes diuiſiones non eſſe tentatas, Quorum primum negabatur, alterum aſſerebatur, vnde manifeſta ſequitur contradictio, igitur ex omni parte propoſito eſt ſatisfactum.

Aduerte autem compendij gratia, non omnino tentandam eſſe diuiſionem donec peruenias ad triangulum æqualem vel maiorem propoſito numero; ſufficit enim ſi deuenias ad triangulum qui ſemel tantum in propoſito numero contineatur; cùm enim ex huiuſmodi diuiſione quotiens non poſſit eſſe niſi 1. qui auctus binario efficit 3. numerum angulorum trianguli, patet per hanc diuiſionem propoſitum numerum non poſſe eſſe niſi triangulum, ſi forte triangulus per quem fit diuiſio, cum latere ſequentis iunctus, efficiat ipſum ſequentem triangulum. Quare cùm per regulam Diophanti iam expertus ſis an propoſitus numerus ſit triangulus, ſuperfluum erit id amplius inquirere, ſic in data hypotheſi numeri 120. cum perueneris ad triangulum 66. qui ſemel tantum continetur in 120. iam deſiſtere poteris ab examine, cum per id nil amplius tibi poſſit innoteſcere niſi 120. eſſe triangulum, cùm diuides ſcilicet eum per triangulum 105. ſed id iam tibi conſtat.

Rurſus ſi propoſitus numerus ſi par, fruſtra tentabitur diuiſio per triangulum parem cum latus ſequentis eſt impar, quia enim cuiuſlibet trianguli paris multiplex quilibet eſt par, eo detracto à propoſito numero pari, impoſſibile eſt relinqui imparem vt conſtat ex Euclide. Hac de cauſa propoſito numero 120. fruſtra tentabitur diuiſio per triangulos 10. & 36. quia latera ſequentium, ſunt 5. & 9. impares numeri.

Eadem de cauſa ſi propoſitus numerus ſit impar, fruſtra tentabitur diuiſio per triangulum parem quando ſequentis latus eſt etiam par. etenim trianguli paris multiplex quilibet, par eſt, quo detracto à numero propoſito impari, impoſſibile eſt reſiduum eſſe par. Itaque in hoc caſu non tentabitur diuiſio per triangulos 6. 28. 66. qui latera ſequentium ſunt 4. 8. 12. numeri pares, & ſic de alijs.

Denique poſſunt & alia compendia obſeruari, quibus iam prouecta diuiſione, antequam penitus abſoluatur, dignoſci poſſit an vtilis ſit futura necne, quæ ſtudioſo lectori indaganda relinquo.

CLAVDII GASPARIS
BACHETI SEBVSIANI APPENDICIS
AD LIBRVM DE NVMERIS POLYGONIS.
LIBER SECVNDVS.

ACTVM est superiore libro de progressione polygonorum, quorum latera secundum seriem naturalem numerorum ab vnitate disposita sunt. Hoc vero agemus de illorum progressione quorum latera reperiuntur in qualibet medietate arithmetica continua, cuius differentia æquatur minimo termino. Et primum quidem insignes aliquot huius medietatis proprietates persequemur. Deinde peculiares de quadratorum progressione trademus regulas, tum generales de omnibus polygonis, demum singularia quædam de cubis deque eorum progressione proferemus.

PROPOSITIO PRIMA.

In medietate arithmetica, in qua differentia minimo termino est æqualis, productus ex numero terminorum in minimum, æquatur maximo.

A 2. B 4. C 6. D 8.
E 2. F 4.

Sint in medietate arithmetica A B C D. & differentia progressionis sit E. æqualis ipsi A. & sit F. numerus terminorum, dico productum ex A. in F. æquari maximo D. etenim [1] B. continet A semel & differentiam E. semel, at C. continet A. semel & differentiam E bis, ac denique D. continet A semel & differentiam E ter, & sic deinceps. Quare cùm E. sit æqualis ipsi A. patet B. continere A. bis, C. ter, D. quater, & sic deinceps quilibet sequentium continet minimum toties quot sunt à minimo vsque ad ipsum inclusiuè numeri terminorum, quamobrem D. continet A. secundum vnitates ipsius F. ac proinde ducto A. in F. producitur D. quod demonstrandum erat. 1. 1. appen.

COROLLARIVM.

Hinc patet secundum à minimo continere minimum bis, tertium ter, quartum quater, & sic deinceps quotus quisque est in serie progressionis, toties continet minimum.

PROPOSITIO SECVNDA.

In hac progressione, productus ex numero terminorum vnitate multato in maximum, duplus est summæ reliquorum.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
G 5. H 4.

Sint in hac progressione A B C D E. sitque G. numerus terminorum & H. vnitate minor, dico productum ex H. in E. duplum esse summæ reliquorum A B C D. quia enim H. est numerus terminorum A B C D. productus ex H. in summam extremorum A D. æquatur duplo summæ ipsorum A B C D. per quartam Diophanti, at summa extremorum A D. æquatur ipsi E. quandoquidem A. æqualis est differentiæ. Igitur ex H. in E. fit duplum summæ antecedentium A B C D. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO TERTIA.

In hac progressione. Quadratus maximi æquatur producto ex numero terminorum in planum sub extremis.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10.
K. 20. G. 5.

Sint numeri qui suprà, & planus sub extremis esto K. dico quadratum maximi E. æquari producto ex G. in K. [1] Etenim ex A. in G. fit ipse E. 1. huius.
Quare sumendo tres numeros A. G. E. [1] idem producetur numerus ducendo A. in E. & productum K. in G. qui fiet ducendo A. in G. & productum E. in E. hoc est quadratus ipsius E. Quare patet propositum. 3. 1. porism.

COROLLARIVM.

Quadratus maximi æquatur producto ex quolibet extremo, in planum ſub numero terminorum, & altero extremo.

Eadem enim ratione oſtendetur quadratum ex E. æquari producto ex A. in planum ſub G. & E. vel producto ex E. in planum ſub G. & A.

PROPOSITIO QVARTA.

In hac progreſſione, quadratus maximi æquatur producto ex minimo in compoſitum ex maximo & ſumma reliquorum dupla.

L. 50. M. 40.
A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E 10.
G. 5. H. 4.

Sint numeri qui ſuprà, & duplum ſummæ ipſorum A B C D. eſto M. dico quadratum ipſius E. æquari producto ex A. in aggregatum ipſorum M E. ſit enim H. vnitate deficiens à G. & ducto G. in E. fiat L. 2. huius. Quia igitur [1] ex H. in E. fit M. & ex G. in eundem E. fit L. cùm G. H. differant, vnitate patet L. æquari vtrique M. E. ſimul. At ex A. in L. fit quadratus ipſius E. per corollarium præcedentis. Igitur ex A. in vtrumque M E. ſimul, fit idem quadratus. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

In progreſsione quæ ab vnitate incipit, quadratus maximi æquatur duplo ſummæ antecedentium adſumente ipſum maximum.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4. E. 5.

Etenim ſi ponatur A. vnitas, & differentia etiam progreſſionis vnitas, erit per hanc quartam propoſitionem quadratus E. æqualis producto ex A. in E. & in duplum ipſorum A B C D. Quia ergo A. eſt vnitas quæ non mutat numeros quos multiplicat, patet quadratum E. æquari ipſi E. & duplo ſummæ ipſorum A B C D. quod erat propoſitum.

PROPOSITIO QVINTA.

In hac progreſſione aggregatum quadratorum à ſingulis, æquatur productis ex minimo in maximum ſemel, & in ſecundum ab illo ter, & in tertium quinquies, & in quartum ſepties, & ſic continue per numeros impares aſcendendo.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.

Sint in hac progreſſione numeri A B C D E. dico aggregatum quadratorum à ſingulis æquari productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, in C. quinquies, in B. ſepties, in A. nouies, & ſic deinceps per numeros impares aſcendendo. Etenim per præcedentem quadratus ex E. æquatur producto ex A. in E. ſemel, & in reliquos bis. Rurſus quadratus ex D. æquatur producto ex A. in D. ſemel, & in antecedentes bis. Quare quadrati ex E. & D. æquantur productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, & in reliquos quater. At rurſus quadratus ex C. æquatur producto ex A. in C. ſemel, & in antecedentes bis. Igitur quadrati ex E D C. æquantur productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, in C. quinquies, & in reliquos ſexies. Rurſus denique quadratus ex B. æquatur producto ex A. in B. ſemel, & in A. bis. Igitur quadrati ex E D C B. æquantur productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, in C. quinquies, in B. ſepties, & in A. octies, quare addito quadrato ex A. fiunt quadrati omnium A B C D E. æquales productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, in C. quinquies, in B. ſepties, in A. nouies. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO SEXTA.

In hac progreſſione, qui fit ex numero terminorum in ſummam extremorum, æquatur producto ex numero terminorum vnitate aucto in maximum.

K 12.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
G 5. H 6.

Sint numeri qui prius, & ſit numerus terminorum G. cui addendo vnitatem, fiat H. & ſit ſumma extremorum K. dico ex K. in G. eundem 1. huius. produci numerum qui ex E. in H. etenim [1] E. continet A. ſecundum vnitates numeri G. quare cùm addito A. ad E. fiat K. ac proinde K. contineat A. ſemel amplius quàm E. patet K. continere A. ſecundum numerum H. qui vnitate ſuperat
17. 7. G. quamobrem cùm ex eodem A. in H. & in G. fiant K. & E. [2] erit K. ad E. ſicut H. ad G. ac proinde
19. 7. [3] ex K. in G. producetur numerus æqualis producto ex E. in H. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO SEPTIMA.

In hac progreſſione, productus ex numero terminorum vnitate aucto in quadratum maximi, vna cum producto ex minimo in ſummam omnium, æquatur triplo aggregati quadratorum a ſingulis.

P Q R T X M
K
G
E
C
A
B D F H L N

Hæc eſt decima propoſitio Archimedis de lineis ſpiralibus, quæ ſic oſtenditur. Sint in hac progreſſione A B. C D. E F. G H. K L. M N. dico quadratum ex M N. ſumptum ſecundum vnitates numeri terminorum vnitate aucti, vna cum producto ex A B. in ſummam omnium æquari triplo ſummæ quadratorum à ſingulis. Etenim adiiciatur ipſi K L. numerus X K. æqualis ipſi A B. ipſi quoque G H. addatur T G. æqualis ipſi C D. & ipſi E F. addatur R E. eidem E F. æqualis. At ipſi C D. addatur Q C. æqualis ipſi G H. & demum ipſi A B. addatur P A. æqualis ipſi K L. Tunc patet totos P B. Q D. T H. X L. æquales eſſe ipſi M N. Quia enim A B. eſt æqualis differentiæ, eo addito ad K L. & ad P A. fiunt X L. P B. qui ſinguli æquantur ipſi M N. * ſed ob medietatem arithmeticam ſummæ duorum A B. K L. æqualis eſt ſumma duorum C D. G H. itemque duplum ipſius E F. igitur conſtat & totos Q D. R F. T H. æquales eſſe ſingulos ſingulis P B. X L. ſeu ipſi M N. quamobrem ſi ſumantur quadrati ipſorum P B. Q D. R F. T H. X L. M N. & adhuc ſemel quadratus ipſius M N. ſumetur vtique quadratus M N. ſecundum vnitates numeri terminorum vnitate aucti. Oſtendendum ergo hos quadratos, vna cum producto ex A B. in ſummã omnium A B. C D. E F. G H. K L. M N. efficere triplum quadratorum à ſingulis. Itaque * quadratus ex P B. æquatur quadratis ex P A. & A B. & plano bis ſub P A. A B. contento. Item quadratus ex Q D. æquatur quadratis ex Q C. C D. & plano bis ſub Q C. C D. contento. Et ſimiliter quadrati reliquorum æquantur quadratis partium, & plano bis ſub partibus contento. at quadrati ex A B. C D. E F. G H. K L. æquales ſunt quadratis ex X K. T G. R E. Q C. P A. quare ſi his addas duplum quadrati M N. patet iam haberi duplum quadratorum à ſingulis. Reſtat ergo probandum dupla planorum ſub partibus contentorum, vna cum producto ex A B. in A B. C D. E F. G H. K L. M N. æquari adhuc ſummæ quadratorum à ſingulis. Quoniam itaque quod fit bis ex X K. in K L. æquatur ei quod fit bis ex A B. in K L. at quod fit bis ex T G. in G H. æquatur ei quod fit quater ex A B. in G H. * quia T G. duplus eſt ipſius A B. ſimiliter quod fit bis ex R E. in E F. æquatur ei quod fit ſexies ex A B. in E F. quia R E. triplus eſt ipſius A B. & eadem de cauſa quæ bis ſub alijs partibus continentur, æquantur producto ex A B. in alios numeros, ſecundum numeros pares continenter aſcendendo multiplicatos, omnia vtique plana illa ſimul ſumpta cum producto ex A B. in omnes A B. C D. E F. G H. K L. M N. æquabuntur productis ex A B. in M N. ſemel, in K L. ter, in G H. quinquies, in E F. ſepties, & ſic per numeros impares aſcendendo. His autem productis æquantur quadrati à ſingulis per quintam huius, ergo conſtat propoſitum.

6. primi porif.

4. ſecundi.

coroll. 1. huius.

PROPOSITIO OCTAVA.

In hac progreſſione productus ex maximo in ſummam extremorum, æquatur producto ex minimo in duplum ſummæ omnium.

F 12.
A 2. B 4. C. 6. D 8. E 10.
G 5. H 6.

Sint in hac progreſſione A B C D E. & ſit ſumma extremorum F. Dico productum ex E. in F. æquari producto ex A. in duplum ſummæ omnium, etenim cùm F. componatur ex duobus A. & E. productus ex E. in F. æquatur quadrato ipſius E. & producto ex A. in E. at * quadratus ex E. æquatur producto ex A in E. ſemel, & in antecedentes bis, igitur addito producto ex A. in E. patet productum ex E. in F. æquari producto ex A. in duplum ſummæ omnium, quod demonſtrandum, erat.

4. huius.

COROLLARIVM:

Hinc ſequitur euidenter productum ex minimo in ſummam omnium æquari producto ex maximo in ſemiſſem ſummæ extremorum, vel producto ex ſumma extremorum in ſemiſſem maximi.

PROPOSITIO NONA.

In hac progreſſione productus ex numero terminorum in quadratum ſummæ extre-

morum, æquatur producto ex eodem numero terminorum vnitate aucto, in quadratum maximi, vna cum producto ex minimo in duplum ſummæ omnium.

Sint numeri qui ſupra, & ſit G. numerus terminorum, & vnitate maior ſit H. dico productum ex G. in quadratum ipſius F. æquari productis ex H. in quadratum E. & ex A. in duplum ſummæ omnium, quarta 2. etenim [1] quadratus F. æquatur quadratis partium A E. & duplo plani ſub A. & E. quare productus ex G. in quadratum F. æquatur productis ex G. in quadratos A E. & in duplum plani ſub A E. & lo- 3. huius. co producti ex G. in planum ſub A E. ſemel, ſumendo [2] illi æqualem quadratum ipſius E. erit productus ex G. in quadratum F. æqualis productis ex G. in planum ſub A E. & in quadratos A E. & ipſi quadrato E. quia vero H. ſuperat G. vnitate, productus ex H. in quadratum E. æquatur producto ex G. in quadratum E. & ipſi quadrato E. Igitur productus ex G. in quadratum F. æquatur productis ex G. in planum ſub A E. & in quadratum A. & ex H. in quadratum E. atqui cum F. æquetur ipſis tertia 2. A E. [3] planus ſub A E. cum quadrato A æquatur producto ex F. in A. ac proinde producti ex G. in planum ſub A E. & in quadratum A. æquantur producto ex G. in planum ſub F A. igitur productus ex G. in quadratum F. æquatur productis ex G. in planum ſub F A. & ex H. in quadratum E. quia tertia 1. poriſ. vero ſumptis tribus numeris F. A. G. [4] ſit idem numerus ſi F. ducatur in A. & productus in G. qui ſit 4. Diophanti. ſi G. ducatur in F. & productus, [5] nempe duplum ſummæ omnium, ducatur in A. patet productum ex G. in quadratum F. æquari productis ex H. in quadratum F. & ex A. in duplum ſummæ omnium. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex hac & ex præcedente collige tres numeros æquales eſſe, nimirum.
Productum ex numero terminorum, in planum ſub minimo, & ſub ſumma extremorum.
Productum ex minimo in duplum ſummæ omnium.
Productum ex maximo in ſummam extremorum.

PROPOSITIO DECIMA.

In hac progreſſione productus ex minimo in duplum ſummæ omnium, æquatur quadrato maximi, & plano ſub extremis.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.

Sint numeri qui ſupra, dico quadratum maximi E. cum plano ſub A E. æquari producto ex A. in duplum ſummæ omnium, etenim quadratus E. 5. huius. [6] æquatur producto ex A. in ipſos A B C D. bis & in E. ſemel, quare ſi eidem quadraro addatur rurſus productus ex A. in E. ſemel, erit vtique quadratus E. cum plano ſub A E. æqualis producto ex A. in omnes A B C D E. bis. quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Hinc rurſus collige quadratum maximi cum plano ſub extremis, æquari cuilibet trium illorum productorum, de quibus in corollario præcedentis.

PROPOSITIO VNDECIMA.

In hac progreſſione productus ex duplo numeri terminorum ternario aucto in quadratum maximi, vna cum plano ſub extremis, æquatur ſextuplo aggregati quadratorum à ſingulis.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
K 13. H 6. G 5.

Sint numeri qui prius, & ſit G. numerus terminorum, & H. vnitate maior, & K. duplum ipſius G. ternario auctum, dico productum ex K. in quadratum ipſius E. cum plano ſub A E. æquari ſextuplo quadratorum à ſingulis: etenim quia H. ſuperat G. vnitate, duplum ipſius H. ſuperat binario duplum ipſius G ac proinde cum K. ſuperet ternario duplum ipſius G. idem K. ſuperat vnitate duplum ipſius H. Ita- 7. huius. que quia triplum quadratorum à ſingulis, [7] æquatur productis ex H. in quadratum E. & ex A. in ſummam omnium, vtique ſextuplum quadratorum à ſingulis æquatur productis ex duplo H. in quadratum E. & ex A. in duplum ſummæ omnium; at productus ex A. in duplum ſummæ omnium, 10. huius. [8] æquatur quadrato E. & plano ſub A E. igitur ſextuplum quadratorum à ſingulis, æquatur producto ex duplo H. in quadratum E. ipſi quadrato E. & plano ſub A E. quia vero K. ſuperat vnitate duplum H. vt oſtenſum eſt, patet productum ex K. in quadratum E. æquari producto ex duplo H. in quadratum E. & ipſi quadrato E. igitur ſextuplum quadratorum à ſingulis, æquatur producto ex K. in quadratum E. & plano ſub A E. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM

COROLLARIVM.

Quia E. multiplex est ad A. secundum ipsum G. per primam huius, patet ducto A. in E. produci partem quadrati ipsius E. denominatam à G. quare si ipsi K. addatur pars vnitatis ab ipso G. denominata, & summa ducatur in quadratum E. fiet sextuplum aggregati quadratorum à singulis, vt euidens est.

PROPOSITIO DVODECIMA.

In hac progressione productus ex numero terminorum in planum sub maximo, & sub summa extremorum, æquatur producto ex numero terminorum vnitate aucto, in quadratum maximi.

F 12.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
H 6. G 5.

Sint numeri qui supra, & summa extremorum esto F. dico productum ex G. in planum sub F E. æquari producto ex H. in quadratum ipsius E. etenim quia F. ex ipsis A E. componitur planus sub F E [1] æquatur quadrato ipsius E. & plano sub A E. Quare productus ex G. in planum sub F E. æquatur productis ex G. in quadratum E. & in planum sub A E. sed productus ex G. in planum sub A E. [2] æquatur quadrato ipsius E. Igitur productus ex G. in planum sub F E. æquatur producto ex G. in quadratum E. & ipsi quadrato E. hoc est producto ex H. in quadratum E. quod erat demonstrandum.

[1] tertia 2. [2] 3. huius.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

In hac progressione producti ex numero terminorum in quadratum summæ extremorum, & in planum sub summa extremorum, & sub maximo comprehensum, æquatur sextuplo quadratorum à singulis.

F 12.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
H 6. G 5.

Sint numeri qui prius. Dico productos ex G. in quadratum F. & in planum sub F E. contentum, æquari sextuplo quadratorum à singulis. Nam productus ex G. in quadratum F. [3] æquatur productis ex H. in quadratum E. & ex A. in duplum summæ omnium. At productus ex G. in planum sub F E. [4] æquatur producto ex H. in quadratum E. Igitur producti ex G. in quadratum F. & in planum sub F E. æquantur productis ex H. in quadratum E. bis, & ex A. in summam omnium bis. Verum producti ex H. in quadratum E. & ex A. in summam omnium, [5] æquantur triplo quadratorum à singulis. Igitur iidem producti bis, seu illis æquales producti ex G. in quadratum F. & in planum sub F E. æquantur sextuplo quadratorum à singulis. Quod demonstrandum fuit.

[3] 9. huius. [4] 12. huius. [5] 9. huius.

PROPOSITIO DECIMAQVARTA.

In hac progressione, est vt minimus ad maximum, ita quadratus summæ extremorum, cum plano sub eadem summa & sub maximo comprehenso, ad sextuplum aggregati quadratorum à singulis.

Sint numeri qui supra, dico esse A. ad E. sicut quadratum F. cum plano sub F E. ad sextuplum quadratorum à singulis. Nam [6] cùm ex A. in G. fiat E. est A. ad E. vt vnitas ad G. sed etiam [7] quia ex G. in quadratum F. & in planum sub F E. fit sextuplum quadratorum à singulis, est vnitas ad G. sicut quadratus F. cum plano sub F E. ad sextuplum quadratorum à singulis. Ergo est A. ad E. sicut quadratus F. cum plano sub F E. ad sextuplum quadratorum à singulis. Quod demonstrandum erat.

[6] 1. huius. [7] 13. huius.

PROPOSITIO DECIMAQVINTA.

In hac progressione, productus ex maximo in dimidium numeri terminorum vnitate aucti, vel ex numero terminorum vnitate aucto in dimidium maximi, æquatur summæ omnium.

Sint numeri qui prius. Dico productum ex E. in semissem ipsius H. vel ex H. in dimidium E. æquari summæ omnium. Etenim productus ex G. in F. æquatur duplo summæ omnium. per 4. Diophanti at producto ex G. in F. [8] æquatur productus ex H. in E. Igitur cùm ex H. in E. fiat duplum summæ omnium, sane ex E. in dimidium H. vel ex H. in dimidium E. fiet ipsa summa omnium Quod erat ostendendum.

[8] 8. huius.

SCHOLIVM.

Semper autem continget vel E. vel H. parem esse, & alterutrius dimidium posse sumi sine fractione; 1. huius. nam vel G. par est, vel impar; si G. sit par [1] cum eo ducto in A. fiat E. erit & E. par; si autem G. sit impar, sane qui eum superat vnitate, puta H. par erit.

Cæterum ex multis harum propositionum eliciuntur regulæ ad inueniendam summam quadratorum à quotlibet numeris in hac progressione dispositis.

PRIMA.

Ducito numerum terminorum vnitate auctum in quadratum maximi, & producto adde quod fit ex minimo in summam omnium, compositi triens erit summa quadratorũ.

Constat per septimam huius, sic ducendo 6. in 100. fit 600. cui addendo productum ex 2. in 30. nempe 60. fit 660. cuius triens 220. est summa quadratorum.

SECVNDA.

Ducito numerum terminorum in planum sub maximo, & sub summa extremorum, & producto adde quod fit ex minimo in summam omnium, compositi triens erit summa quadratorum.

Constat per duodecimam adiuuante septima, sic ducendo 5. in 120. (qui fit ex 10. in 12.) fit 600. cui reddendo 60. vt prius, fit 660. cuius triens est 220. vt supra.

TERTIA.

Ducito numerum terminorum in quadratum summæ extremorum, à producto aufer quod fit ex minimo in summam omnium, residui triens erit summa quadratorũ.

Constat per nonam adiuuante septima, sic ducto 5. in 144. quadratum ipsius 12. fit 720. vnde si auferas 60. restat 660. cuius triens est 220. vt prius.

Porro sicut tribus modis, huius regulæ prima pars variata est in tribus hisce præceptis, ita & totidem modis variari potest secunda. Nam loco producti ex minimo in summam omnium sumi potest productus ex minimo in planum sub maximo, & sub dimidio numeri terminorum vnitate aucti per decimam quintam, vel productus ex maximo in dimidium summæ extremorum per corollarium octauæ.

QVARTA.

Ducito duplum numeri terminorum ternario auctum in quadratum maximi, producto adde planum sub extremis, compositi sextans erit summa quadratorum.

Constat per vndecimam: sic ducendo 13. in 100. fit 1300. cui addendo 20. fit 1320. cuius sextans est 220. vt prius.

QVINTA.

Ducito quadratum maximi in duplum numeri terminorum auctum ternario, & parte vnitatis à numero terminorum denominata, producti sextans erit summa quadratorum.

Constat per corollarium vndecimæ sic ducendo 100. in $13\frac{1}{5}$ fit 1320. cuius sextans est 220. vt supra.

SEXTA.

Ducito numerum terminorum in aggregatum ex quadrato summæ extremorum, & ex plano sub maximo & sub summa extremorum contento, producti sextans erit summa quadratorum.

Constat per decimam tertiam, sic ducendo 5. in aggregatum ex 144. & ex 120. nempe in 264. fit 2640. quo diuiso per 2. fit 1320. cuius sextans est 220. vt prius.

SEPTIMA.

Ducito maximum in aggregatum ex quadrato summæ extremorum, & ex plano

sub maximo & sub summa extremorum, productum diuide per minimum, quotientis sextans erit summa quadratorum.

Constat per decimamquartam indagando quartum proportionalem, tribus cognitis. Sic ducendo 10. in 264. fit 2640. quo diuiso per 2. fit 1320. cuius sextans est 220. vt ante.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

In hac progressione. Octuplum plani sub minimo, & sub summa omnium adscito minimi quadrato æquatur quadrato compositi ex minimo, & duplo maximi.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10.
F. 30.

Sint numeri qui prius, & sit summa omnium F. Dico octuplum plani ex A. in F. adsumpto quadrato ipsius A. æquari quadrato compositi ex A. & duplo ipsius E. Etenim ' productus bis ex A. in F. æqua- 10. huius.
tur quadrato E. cùm plano sub A E. Quare octuplum producti ex A. in F. æquatur quadruplo quadrati E. & quadruplo plani sub A E. Proinde si addatur vtrimque quadratus A. vtique octuplum plani sub A F. cum quadrato A. æquabitur quadrato E. quater, plano sub A E. quater, & quadrato A. semel. Atqui quadruplum quadrati E. æquatur quadrato dupli ipsius E. & quadruplum plani sub A E. æquatur duplo plani sub A. & sub duplo ipsius E. Rursus autem ' quadrati ex A. & ex duplo 4. secundi.
ipsius E. cum duplo plani sub A. & sub duplo ipsius E. æquantur quadrato compositi ex A. & ex duplo E. Igitur hic quadratus æquatur octuplo plani sub A F. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Hinc rursus demonstratur quod ait Diophantus quæst. 44. lib. 4. Itemque Plutarchus quæstione Platonica quarta nimirum Πᾶς τρίγωνος ἀριθμὸς ὀκτάκις γενόμενος καὶ μονάδα προσλαβὼν γίνεται τετράγωνος. *vt euidens est si A. ponatur vnitas, & differentia progressionis vnitas. Tunc enim F. erit triangulus ex definitione. Etenim cum vnitas non mutet numerum quem multiplicat, & quadratus vnitatis sit ipsa vnitas patet octuplum producti ex A. in F. fore octuplum ipsius F. cui addendo quadratum ipsius A. puta vnitatem fiet quadratus, cuius latus æquabitur duplo ipsius E. & vnitati. Itaque hanc eandem propositionem iam tripliciter demonstrauimus. Primo ad quadragesimam quartam 4. peculiari demonstratione. Secundo hîc vniuersalius, prout hæc proprietas conuenit omni progressioni arithmeticæ, cuius minimus terminus æqualis est differentiæ. Tertio vniuersalissimè, ad octauam Diophanti de numeris multangulis, proprietatem hanc omni in vniuersum progressioni arithmeticæ applicantes vi theorematis 5. eorum quæ ad sextam demonstrauimus.*

A 1. B 2. C 3. D 4. E 5.
F 15.

Hæc ergo dixisse sufficiat de progressione quadratorum, quorum latera in hac progressione sunt ordinata. Agamus iam de omnium polygonorum in vniuersum progressione.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Si numerus secetur in duas partes, tum in tres, tum in quatuor, tum in quinque; & sic deinceps, & quælibet pars vnius sectionis comparetur, cuilibet ex aliis partibus eiusdem sectionis, continget hanc comparationem in prima sectione fieri semel, in secunda ter, in tertia sexies, in quarta decies, & sic continue per numeros triangulos ascendendo.

A......C......B
D....E....F....G
H... K... L... M... N

Secetur A B. in duas partes A C. C B. & secetur D G. in tres D E. E F. F G. & secetur H N. in quatuor H K. K L. L M. M N. & sic deinceps, & comparetur quælibet pars vnius sectionis cuilibet ex alijs eiusdem sectionis, dico in sectione numeri A B. hanc comparationem fieri semel, in sectione D G. fieri ter, in sectione H N. fieri sexies, & sic continue per numeros triangulos ascendendo.

Primo enim in sectione A B. patet A C. tantum comparari posse ipsi C B. vnde constat propositum.

Secundo in sectione D G. quia D E. comparari potest singulis E F. F G. & ipsæ E F. F G. rursus inter se semel comparantur, patet tres hîc fieri comparationes. Quod erat intentum.

Tertio in sectione H N. quia H K. comparari potest sigillatim, tribus reliquis, vnde tres oriuntur comparationes, & rursus tres reliquæ per proxime demonstrata, ter inter se comparantur. Patet hic in vniuersum sex fieri comparationes, quod erat propositum.

Denique si numerus secetur in quinque partes, cùm prima pars comparari possit quatuor reliquis, & quatuor reliquæ per iam demonstrata, sexies inter se comparentur, fient omnino decem compa-

tionum æquabitur triangulo præcedentium comparationum adſciſcenti ſuum latus vnitate auctum, vnde fiet triangulus proximè maior ex definitione triangulorum. Quamobrem ex omni parte patet propoſitum.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

In hac progreſſione ſi polygonus quilibet minimi ducatur in triangulum numeri terminorum, & producto addatur ſolidus contentus ſub quadrato minimi, ſub numero angulorum, binario multato, & ſub ſumma totidem triangulorum ab vnitate quot ſunt ipſi numeri vno minus, fiet ſumma ſimilium polygonorum a ſingulis.

L 2.
G 2. M 2.
E 2. H 2. N 2.
F 2. K 2. O 2.
A 2. B 4. C 6. D 8.
corolL 1. huius. P 7. Q 10. R 4. T 5. V 10.
X 70. Y 200.

Sint in hac progreſſione A B C D. & ſit P. quilibet polygonus minimi, puta heptagonus, ſitque Q. triangulus numeri terminorum, quo ducto in P. fiat X. ſitque R. quadratus ipſius A. & T. numerus angulorum binario multatus, & V. ſumma totidem triangulorum ab vnitate, quot ſunt ipſi B C D. & ſolidus ſub ipſis R T V. eſto Y. dico aggregatum duorum X Y. æquari ſummæ ſimilium polygonorum, puta heptagonorum à ſingulis A B C D. Quia [1] enim A. continetur in B. bis, in C. ter, in D. quater, reſoluantur B C D. in numeros æquales ipſi A. puta B. in E F. At C in G H K. ac demum D. in L M N O. Itaque per ſcholium 10. primi polygonus B. æquatur polygonis ipſorum E F. & producto ex E, in F, ſeu quadrato R. ducto in T. ſimiliter polygonus C. æquatur polygonis G H K. & productis ex qualibet parte in quamlibet ex aliis, ſeu totidem quadratis R. ductis in T. denique polygonus D. æquatur polygonis ipſorum L M N O. & productis ex quolibet in quemlibet ex alijs, ſeu totidem R. ductis in T. quamobrem ſi his omnibus polygonis & productis addatur polygonus ipſius A. patet polygonos à ſingulis A B C D. continere polygonum ipſius A. ſeu ipſum P. ſemel, bis, ter, quater, & ſic deinceps, id eſt ſecundum vnitates trianguli Q. & præterea ipſum R. ductum in T. ſemel, ter, ſexies & ſic deinceps ſecundum triangulos ab vnitate, id eſt ſecundum vnitates ipſius V. per præcedentem. Quamobrem polygoni à ſingulis A B C D. æquantur producto ex Q. in P. ſeu ipſi X. adſciſcenti ſolidum ſub R. T. V. nempe ipſum Y. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DECIMANONA.

In hac progreſſione aggregatum productorum ex minimo in maximum ſemel, in ſecundum ab illo bis, in tertium ter, in quartum quater, & ſic deinceps, æquatur producto ex quadrato minimi in ſummam totidem triangulorum ab vnitate, quot ſunt ipſi numeri.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.
N. 4. M. 3. L. 2. K. 1.
E. 1. F. 2. G. 3. H. 4.
O. 4. P. 6. Q. 6. R. 4.

Sint in hac progreſſione A B C D. Dico ſi A. ducatur in D. ſemel, in C. bis, in B. ter, in A. quater, & ſic deinceps, aggregatum productorum, æquari producto ex A. in ſummam totidem triangulorum ab vnitate. Etenim ſumantur totidem numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti E. F. G. H. quibus ſuperponantur totidem illis æquales ordine inuerſo, puta K L M N. & [1] ex K. in H. fiat R. ex L. in G. fiat Q. ex M. in F. fiat P. ex N. in E fiat O. Patet A. contineri in A. ſecundum E. in B. ſecundum F. in C. ſecundum Q. in D. ſecundum H. Quare cùm K. ſit vnitas, ſi A. ducatur ſemel in D. productus continebit quadratum ipſius A. toties, quoties productus ex K. in H. puta R. continet vnitatem. Similiter quia L. eſt binarius, ſi A. ducatur bis in C. productus continebit quadratum A. toties quoties productus ex L. in G. puta Q. continet vnitatem. Eodem argumento probabitur productum ex A. in B. ter toties continere quadratum A. quoties P. continet vnitatem, & rurſus productum ex A. in A. quater toties continere quadratum A. quoties O. continet vnitatem. Quamobrem producti omnes ex A. in D. ſemel, in C. bis, in B. ter, in A. quater, toties continent quadratum A. quot ſunt vnitates in ſumma ipſorum O P Q R. ſed ſumma ipſorum O P Q R. [1] æquatur ſummæ triangulorum ab ipſis E. F. G. H. Igitur producti omnes ex A. in D. ſemel in C. bis, in B. ter, in A. quater toties continent quadratum A. quot ſunt vnitates in ſumma totidem triangulorum ab vnitate. Quod demonſtrandum erat.

[1] Coroll. 1. huius.

[1] 14. 1. appen.

PROPOSITIO VIGESIMA.

In hac progreſſione, ſi numerus terminorum vnitate auctus, ducatur in polygonum maximi, & à producto auferatur ſolidus contentus ſub quadrato minimi, ſub

numero angulorum binario multato, & sub summa totidem triangulorum ab vnitate, quot sunt ipsi numeri vno minus, residuum æquatur duplo polygonorum à singulis.

K. 8. H. 6. G. 4. F. 2.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
L. 3.

Sint in hac progressione A B C D E. & numerus angulorum binario multatus esto L. Dico si numerus terminorum vnitate auctus ducatur in polygonum ipsius E. & à producto auferatur solidus contentus sub quadrato A. numero L. & summa totidem triangulorum ab vnitate, quot sunt ipsi A B C D. residuum æquari duplo polygonorum à singulis A B C D E. Etenim superponantur ipsis totidem illis æquales ordine inuerso F G H K. Tunc ex demonstratione septimæ huius patet binos A K. B H. C G. D F. æquari sigillatim ipsi E. quare si sumantur polygoni harum summarum, & præterea polygonus ipsius E. bis, horum aggregatum æquabitur producto ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum ipsius E. Atqui polygoni summæ binorum A K. B H. C G. D F. ' æquantur polygonis omnium A K. B H. C G. D F. seu duplo polygonorum à singulis A B C D. & præterea productis ex A. in K. ex B. in H. ex C. in G. ex D. in F. ductis in L. Igitur productus ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum E. æquatur duplo polygonorum à singulis A B C D E. & productis ex A. in K. ex B. in H. ex C. in G. ex D. in F. ductis in L. sed hi producti (' quandoquidem A. continetur in F. semel, in G bis, in H ter, in K quater) æquantur productis ex A. in D. semel, in C. bis, in B. ter in A. quater, ac proinde per præcedentem iidem producti æquantur producto ex quadrato A, in summam tot triangulorum ab vnitate quot sunt ipsi A B C D. Igitur productus ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum E. æquatur duplo polygonorum à singulis, & producto ex quadrato A, in summam tot triangulorum ab vnitate quot sunt ipsi A B C D. ducto in L. quare si solidus sub quadrato A, numero L, & summa tot triangulorum ab vnitate quot sunt ipsi A B C D. auferatur à producto ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum E, residuum erit duplum polygonorum à singulis A B C D E. quod demonstrare oportuit. 10. 1. app. corollar. 1. huius.

K. 8. H. 6. G. 4. F. 2.
A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10.
L. 3.

PROPOSITIO VIGESIMAPRIMA.

In hac progressione, qui fit ex polygono minimi in triangulum numeri terminorum, adscito producto ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum maximi, æquatur triplo polygonorum à singulis.

A 2. B 4. C 6. D 8.
E 50. F 460.
K 120.

Sint in hac progressione A B C D. & qui fit ex polygono minimi A, in triangulum numeri terminorum esto E. qui fit autem ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum maximi esto F. dico aggregatum duorum E F. æquari triplo polygonorum à singulis, etenim sumatur K, solidus sub quadrato A, sub numero angulorum binario multato, & sub summa tot triangulorum ab vnitate quot sunt ipsi A B C. igitur per 18. ambo E K. simul æquantur summæ polygonorum à singulis A B C D. sed per præcedentem, detracto K, ex F. manet duplum polygonorum à singulis. Igitur si ad F. multatum numero K. concipiamus addi ipsos E K. nempe summam polygonorum à singulis; fiet vtique summa ipsorum E F. æqualis triplo polygonorum à singulis, quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO VIGESIMASECVNDA.

In hac progressione si productus ex polygono minimi in numerum terminorum adsciscat duplum polygoni maximi, & aggregatum ducatur in numerum terminorum vnitate auctum, fiet sextuplum polygonorum à singulis.

A 2. B 4. C 6. D 8.
E 3. F 4. G 5. H 12.
K 60. L 36. M 72.
N 360. O 420. P 84.

Sint in hac progressione A B C D. & polygonus minimi esto E, numerus vero terminorum F, & illo vnitate maior esto G. ductoque E in F. fiat H. Maximi vero polygonus esto L. cuius duplum M. quo addito ad H. fiat P. ductoque P. in G. fiat O. dico O. esse sextuplum polygonorum à singulis, etenim ducto G in ipsos H. M. fiant K N. cùm ergo ex eodem G in P, summam eorundem H M. factus sit O. erit O. æqualis ambobus K N. Quia vero ex E in F, fit H. & ex H in G. fit K, est K. solidus sub tribus E F G. proinde ' idem K, fiet ducto F in G. & producto in E, sed ex F. in G. fit duplum trianguli ipsius F. per octauam Diophanti. Ergo K, fit ducto E, in duplum trianguli F, similiter N. factus est ex G, in M, duplum polygoni L. ergo summa duorum K N. seu O. componitur ex ductu E. in duplum trianguli ex F, & ex ductu G in duplum polygoni ex D. sed horum semissis, nempe productus ex E, in triangulum ex F. vna cum producto ex G. in polygonum ex D. æquatur triplo polygonorum à singulis per præcedentem. Igitur O. æquatur sextuplo eorundem polygonorum. Quod ostendendum susceperam. 3. 1. porism.

SCHOLIVM.

Ex his duabus propoſitionibus duo elici poſſunt Canones ad inueniendum ſummam quotlibet ſimilium polygonorum, quorum latera in hac progreſsione diſponantur, ſed quia ipſi Canones ab ipſis propoſitionibus non differunt, illos adſcribere ſuperuacaneum duxi. Itaque hactenus de polygonorum progreſſione dictum eſto: Reſtat vt agamus de cuborum progreſſione, ſed prius tres inſignes illorum proprietates demonſtrabimus, quæ ad illorum progreſſionem aliquatenus ſpectant.

PROPOSITIO VIGESIMATERTIA.

Si diſponantur omnes numeri impares ab vnitate, ex illorum ordinata & continua additione, quadrati omnes procreabuntur.

Putabit forte quiſpiam nos huic propoſitioni ſuperſedere debuiſſe, quandoquidem ex polygonorum definitione quadratis applicata, hoc ipſum manifeſtum fit. Verum quoniam antiqua definitio quadratorum ab Euclide priſciſque omnibus, & ab ipſo Diophanto libro primo arithmeticorum tradita, diuerſa eſt, quatenus definiuntur quadrati, numeri qui fiunt ex alio quopiam in ſeipſum multiplicato, operæpretium viſum eſt, oſtendere vtramque definitionem iiſdem numeris conuenire, ne vlla ſuperſit hac de re dubitatio. Etenim poſſet aliquis iure ambigere, an quadratus cui conuenit polygoni definitio, & qui fit ex imparium aggregatione, idem ſit qui producitur latere in ſeipſum ducto, quandoquidem neque triangulus neque pentagonus, nec hexagonus, neque alius quiſpiam polygonus præter ſolum quadratum, reſpondet figuræ Geometricæ angulorum & laterum æqualium, eiuſdemque nominis.

A 1. B 3. C 5. D 7.
L 2. M 4. N 6.
F 1. G 2. H 3.

Sint ab vnitate impares A B C D. dico ex eorum ordinata aggregatione fieri omnes quadratos, etenim cùm vnitas A. ſit primus quadratus, dico ſummam duorum A B. eſſe ſecundum quadratum ſeu quadratum binarij, & ſummam trium A B C. eſſe quadratum ternarij, & ſummam quatuor numerorum A B C D. eſſe quadratum quaternarij, & ſic in infinitum, ſumantur numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem, F G H. & ſint eorum dupli L M N. patet igitur ipſos L M N. eſſe numeros pares ordinate diſpoſitos, ac proinde ſi ſingulis addatur vnitas, fieri omnes impares, hoc eſt L. cum vnitate æquatur ipſi B. at M. cum vnitate æquatur ipſi C. ac demum N. cum vnitate æquatur ipſi D. & ſic deinceps. Itaque ' quoniam ſi quadrato vnitatis F. hoc eſt ipſi vnitati A, addatur duplum lateris illius & præterea vnitas, fit quadratus proxime maior, hoc eſt quadratus binarij, cum L, ſit duplus ipſius F, & B, excedat L, vnitate, patet addito B. ad vnitatem A, fieri quadratum binarij. Rurſus quia quadrato binarij G. addendo duplum ipſius G. & vnitatem, hoc eſt numerum C. fit quadratus ternarij, cum A G. ſimul faciant quadratum binarij vt oſtenſum eſt, facient tres A B C. ſimul quadratum ternarij. Et eodem argumento oſtendetur quatuor A B C D. æquari quadrato quaternarij, & ſic in infinitum. Igitur conſtat propoſitum.

18. 1. poriſ.

COROLLARIVM.

Patet ergo quemlibet quadratum tot imparibus conſtare, quot vnitates continet latus quadrati.

PROPOSITIO VIGESIMAQVARTA.

In progreſſione arithmetica ab vnitate incipiente, & per vnitatem creſcente, cubus maximi æquatur quadrato maximi, & producto ex maximo in duplum antecedentium.

A 1. B 2. C 3. D 4.
E 12.

Sit vnitas A. & quotlibet numeri deinceps B C D. per vnitatis augmentum creſcentes, ſitque E duplum ipſorum A B C. Dico cubum maximi D. æquari quadrato ipſius D. & producto ex D. in E etenim productus ex D. in E. cum quadrato ipſius D. ' æquatur producto ex D E. ſimul in D. at E D. ſimul æquantur quadrato ipſius D. per corollarium 4. huius. Igitur productus ex E. in D. cum quadrato ex D. æquatur producto ex quadrato ipſius D, in D. hoc eſt cubo ipſius D. Quod erat oſtendendum.

tertia 2.

PROPOSITIO VIGESIMAQVINTA.

Quotlibet cuborum ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſitorum ſumma quadratus eſt, cuius latus componitur ex cuborum ipſorum lateribus ſimul additis.

Sint quotlibet numeri ab vnitate A B C D. secundum seriem numerorum, quorum cubi sint E F G H. Dico summam duorum E F. Itemque trium E F G. itemque quatuor E F G H. esse quadratum, cuius latus est summa duorum A B. vel trium A B C. vel quatuor A B C D.

A 1. B 2. C 3. D 4.
E 1. F 8. G 27. H 64.

Primò enim quadratus summæ duorum A B. æquatur quadratis ipsorum A & B & duplo producti ex A in B. At quadratus vnitatis A æquatur cubo ipsius vnitatis E. quadratus autem ex B. cum duplo producti ex B in A æquatur cubo F per præcedentem. Igitur quadratus summæ duorum A B. æquatur cubis E F. simul, quod erat propositum. Deinde quadratus summæ trium A B C. æquatur quadrato summæ duorum A B. & quadrato ipsius C. & duplo producti ex A B. simul in C. sed quadrato summæ duorum A B. æquantur cubi E F. per demonstrata: quadrato autem ipsius C, cum duplo producti ex A B. simul in C. æquatur cubus G, per præcedentem. Igitur quadratus summæ trium A B C. æquatur cubis E F G. simul. Denique eodem argumento quadratus summæ omnium A B C D. æquatur quadrato summæ trium A B C. hoc est cubis E F G. & quadrato ipsius D. cum duplo producti ex D. in summam trium A B C. hoc est cubo H. per præced. Igitur quadratus summæ ipsorum A B C D. æquatur cubis E F G H simul. Quod erat demonstrandum, eademque est demonstrationis ratio in pluribus, vt patet, quamobrem abundè constat propositum. quarta 2.

COROLLARIVM.

Hinc sequitur summam quotlibet cuborum ab vnitate, facere quadratum cuius latus, est numerus triangulus, quia enim A B C D. est progressio naturalis numerorum ab vnitate, patet ex definitione triangulorum, tam A B. simul, quàm A B C, vel A B C D. conficere triangulum, est autem trianguli latus, ipse cuborum numerus, vt etiam perspicuum est.

PROPOSITIO VIGESIMASEXTA.

Quadratus quilibet adsumpto suo latere, duplum facit collateralis trianguli.

A 16.
B.... C. D

Esto quilibet quadratus A cuius latus B C. dico si B C. addatur ad A fieri duplum trianguli à latere B C. etenim ipsi B C. addatur vnitas C D. igitur ex B C. in B D. fiet duplum trianguli ex B C. per 8. Diophanti, sed productus ex B C in B D. æquatur quadrato ex B C. hoc est ipsi A, & producto ex B C in C D. sit hoc est ipsi B C. cum CD. sit vnitas. Ergo duplum trianguli ex B C. æquatur quadrato A cum suo latere B C. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIGESIMASEPTIMA.

Vnitas primum cubum; duo sequentes impares coniuncti, secundum cubum; tres sequentes tertium cubum; quatuor succedentes, quartum, semperque vno plures sequentem deinceps in infinitum cubum aggregati impares constituunt.

A 1. B 3, C 5. — R 8.
D 7. E 9. F 11. — T 27.
G 13. H 15. K 17. L 19. — V 64.

Disponantur ab vnitate A. numeri impares B C D E F G H K L. dico quod B C. simul secundum ab vnitate cubum faciunt, at D E F. faciunt tertium cubum, ac demum G H K L. quartum cubum constituunt, & sic deinceps, sit enim R. summa duorum B C. & sit T. summa trium D E F. sitque V. summa ipsorum quatuor G H K L. etenim quoniam A B C D E F G K L. sunt impares ordinate dispositi ab vnitate, eorum summa, seu summa ipsorum A R T V. [1] est quadratus, cuius latus tot constat vnitatibus, quot sunt numeri A B C D E F G H K L. Quoniam vero ex ipsis vnus sumitur; tum duo, tum tres, tum quatuor, patet numerum numerorum esse triangulum, cuius latus tot continet vnitates, quot fiunt propositorum numerorum sumptiones, hoc est, quot sunt ipsi A R T V. Cùm itaque summa ipsorum A R T V. sit quadratus cuius latus est triangulum, [2] erit eadem summa, aggregatum totidem cuborum ab vnitate quot sunt vnitates in latere trianguli, hoc est quot sunt ipsi A R T V, puta quatuor cuborum, simili prorsus argumento ostendemus aggregatum ipsorum A R T. esse summam trium cuborum ab vnitate. Quare relinquetur V. esse quartum cubum, eademque ratione ostendemus A R. simul esse summam duorum cuborum ab vnitate, ac proinde relinquetur T, tertius cubus, eritque R. secundus, cùm A sit vnitas. Quare patet propositum.

[1] 25. huius.
[2] Corolla. 25. huius.

SCHOLIVM.

Eadem fere ratione demonstratur hæc propositio à Francisco Maurolyco, prop. 62. arithmeticorum.

OBSERVATIO D. P. F.

Hanc propositionem ita constituo magis vniuersalem. Vnitas primam columnam in quacumque polygonorum progressione constituit; duo sequentes numeri multati primo triangulo toties sumpto quot sunt anguli polygoni quaternario multati, secundam columnam; tres sequentes multati secundo triangulo toties sumpto quot sunt anguli polygoni quaternario multati, tertiam columnam, & sic eodem in infinitum progressu.

PROPOSITIO VIGESIMAOCTAVA.

Cubus quilibet adsumpto sextuplo trianguli collateralis vnitate aucto facit cubum proxime maiorem.

A. 27. B. 36. C. 64.
D 3. E. 6. F. 4.

Sit cubus A cuius latus D. & ab eodem latere triangulus esto E. cuius sextuplum B. additoque B. vnitate aucto ad A. fiat C. dico C. esse cubum proxime maiorem. Sumatur F. superans vnitate ipsum D. Igitur cubus ex F. [1] æqualis est cubo ipsius D. & vnitati, & triplo tum quadrati ipsius D. tum ipsius D. At quadratus ipsius D. cum suo latere [2] æquabitur duplo trianguli E. Quare triplum quadrati ex D. cum triplo ipsius D. æquatur sextuplo ipsius E. hoc est ipsi B. Igitur ad cubum ipsius D. hoc est ad A. addendo B. & vnitatem, qui fit puta C. est cubus ipsius F. Quod demonstrandum erat.

Aliter interuallum cuborum ab ipsis D F. [3] æquatur cubo interualli, hoc est vnitati, & triplo producti ex D. in F. At ex D. in F. fit duplum trianguli E. per octauam Diophanti, ac proinde triplum producti ex D. in F. æquatur sextuplo ipsius E. hoc est ipsi B. Igitur interuallum cuborum ab ipsis D F. æquatur ipsi B. & vnitati. Quod erat propositum.

[1] 20. 2. por.
[2] 26. huius.
[3] 21. 2. pori.

PROPOSITIO VIGESIMANONA.

In progressione arithmetica, in qua minimus terminus æquatur differentiæ, productus ex minimo in quadratum numeri terminorum, æquatur producto ex maximo in numerum terminorum.

A 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10.
F. 5.

Sint in hac progressione A B C D E. & sit numerus terminorum F. dico productum ex A. in quadratum ipsius F. æquari producto ex E. in F. Quia enim [4] ex A. in F. fit E. vtique productus ex F. in E. erit solidus contentus sub tribus numeris A. E F. Quare [5] idem solidus fiet si F. ducatur in E. & productus hoc est quadratus ipsius F. ducatur in A. Quod erat demonstrandum.

[4] 1. huius.
[5] 5. 1. pori.

PROPOSITIO TRIGESIMA.

In hac progressione, productus ex minimo in triangulum numeri terminorum, æquatur summæ omnium.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10.
F. 5. G. 30.

Sint numeri qui prius, & sit summa omnium G. dico G. æquari producto ex A. in triangulum ipsius F. Etenim ducto F. in summam extremorum, hoc est in ipsos A. E. fit duplum ipsius G. per quartam Diophanti. At productus ex F. in E. æquatur producto ex quadrato ipsius F. in A. per præcedentem, igitur duplum ipsius G. æquatur productis ex A. in F. & ex A in quadratum F. hoc est producto ex A in F. auctum suo quadrato. Quare [6] cùm F. cum suo quadrato sit duplus trianguli ex F. erit duplum ipsius G. æquale producto ex A. in duplum trianguli ex F. ac proinde ipse G. æquabitur producto ex A. in triangulum ipsius F. Quod erat demonstrandum.

[6] 28. huius.

PROPOSITIO TRIGESIMAPRIMA.

In hac progressione, productus ex cubo minimi in quadratum trianguli numeri terminorum, æquatur aggregato cuborum à singulis.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10.
F. 8. N. 15.
G. 1. H. 2. K. 3. L. 4. M. 5.
P. 225.

Sint in hac progressione A B C D E. & ipsius A. cubus esto F. sumanturque totidem ab vnitate continue dispositi numeri G H K L M. quorum summa N. patet ergo N. esse triangulum numeri terminorum. Quare sit eius quadratus P. dico productum ex F. in P. æquari aggregato cuborum à singulis A B C D E. Quia enim sicut [7] A continetur in B. bis, in C. ter, in D. quater, in E. quinquies, sic etiam G. continetur in H. bis, in K. ter,

[7] 2. huius.

ter, in L. quater in M. quinquies, patet ipsos A B C D E esse in iisdem rationibus, in quibus & ipsi G H K L M. Quamobrem & cubi illorum sunt in iisdem rationibus, in quibus & cubi istorum, cum sit ergo cubus A ad cubum G. sicut cubus B. ad cubum H. & cubus C ad cubum K. & cubus D. ad cubum L. & cubus E ad cubum M. erunt & omnes antecedentes hoc est aggregatum cuborum à singulis A B C D E. ad consequentes simul, hoc est ad aggregatum cuborum à singulis G H K L M. sicut F ad cubum ipsius G hoc est ad vnitatem, sed aggregatum cuborum à singulis G H K L M. æquatur ipsi P. per 25. huius, ergo est aggregatum cuborum à singulis A B C D E. ad P. sicut F, ad vnitatem proinde ex definitione multiplicationis, ducto F in P. fiet aggregatum cuborum à singulis A B C D E. Quod erat demonstrandum.

OBSERVATIO D. P. F.

Hinc sequitur cubum maximi toties sumptum quot sunt numeri terminorum ad aggregatum cuborum habere minorem rationem quam quadruplam.

PROPOSITIO TRIGESIMASECVNDA.

In hac progressione productus ex minimo in quadratum summæ omnium æquatur aggregato cuborum à singulis.

H 4. K 8. F 30. G 900.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
L 225. M 15.

Sint in hac progressione A B C D E. quorum summa F. cuius quadratus G. dico ex A. in G. produci aggregatum cuborum à singulis. Sit enim H. quadratus ipsius A & K cubus eiusdem, sitque M. triangulus numeri terminorum, cuius quadratus L. Itaque [1] quoniam ex A in M. producitur F est F. medius proportionalis inter quadratos ipsorum A M. hoc est inter H & L. per 7. Diophanti, quamobrem ex H in L. producitur G. quadratus ipsius F. Quamobrem [2] cum ex eodem H in A & in L. producantur K & G est A ad L. vt K ad G. [3] ac proinde ex A in G. fiet idem numerus, qui ex K in L. sed ex K. in L. fit aggregatum cuborum à singulis per præcedentem. Igitur & ex A in G. fit idem aggregatum cuborum, quod erat ostendendum.

30. huius. 17. 7. 19. 7.

PROPOSITIO TRIGESIMATERTIA.

Si fuerint quatuor numeri proportionales, & quilibet extremorum ducatur in quadratum alterius extremi; quilibet autem mediorum ducatur in quadratum alterius medij, fient quatuor solidi in eadem ratione proportionales.

E 4. F 16. G 9. H 36.
A 2. B 4. C 3. D 6.
K 12.
L 24. M 48. N 36. P 72.

Sit A ad B. vt C ad D. & sint ipsorum A B C D. quadrati E F G H. ductoque D. in E. fiat L. & ex A in H. fiat P. & rursus ducto C in F fiat M. & ex B in G. fiat N. dico esse L ad M. & N. ad P. sicut A ad B vel C ad D. sumatur K. planus sub mediis B C. vel sub extremis A D. Quia ergo [3] idem L fiet ducto A in D, & L fit ducto A in A. & producto E in D. [5] idem L fiet ducto A in D, & producto K in A. similiter quia M. fit ducto B in B. & producto F in C fiet idem M. ducto B in C. & producto K in B. quare cum eodem K ducto in A & in B. fiant L M. [6] erit L. ad M. vt A ad B. eodem argumento ostendemus ex eodem K. in C, & in D. produci N. & P ac proinde esse N ad P. vt C. ad D. igitur vt A ad B vel C. ad D. sic est L ad M. & N. ad P. quod erat ostendendum.

3. 1. porif. 17. 7.

PROPOSITIO TRIGESIMAQVARTA.

In hac progressione, est vt minimus ad maximum, ita solidus sub maximo, & sub quadrato summæ extremorum, ad quadruplum aggregati cuborum à singulis.

F 12. L. 5.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
H 30. K 60.

Sint in hac progressione A B C D E. & summa extremorum F. dico esse A ad E. sicut solidus sub E & quadrato ipsius F. ad quadruplum aggregati cuborum à singulis, sumatur H summa omnium cuius duplum sit K & sit numerus terminorum L. quia ergo ducto L in F fit K per 4 Diophanti, [7] at ducto eodem L. in A. fit E [8] erit A ad E. sicut F ad K. quare per præcedentem erit A ad E. sicut productus ex E in quadratum ipsius F. ad productum ex A in quadratum ipsius K, sed productus ex A in quadratum ipsius H [9] æquatur aggregato cuborum à singulis, & quadratus ipsius K quadruplus est quadrati sui semissis H. ac proinde productus ex A in quadratum ex K quadruplus est aggregati cuborum à singulis. Igitur est A ad E. sicut productus ex E in quadratum ipsius F ad quadruplum aggregati cuborum à singulis, quod demonstrandum erat.

1. huius. 17. 7. 32. huius.

f

SCHOLIVM.

Ex aliquibus harum propoſitionum licebit faciles elicere regulas ad inueniendum ſummam quotlibet cuborum, quorum latera ſint in hac progreſſione diſpoſita.

PRIMA REGVLA.

Sume triangulum numeri terminorum, & eius quadratum ducito in cubum minimi, fiet aggregatum cuborum à ſingulis.

Conſtat per 31. vt ſi ſint 5. numeri, & ſit minimus 2. ſume triangulum ipſius 5. puta 15. & eius quadratum 225. ducito in 8. cubum ipſius 2. fit aggregatum cuborum à ſingulis 1800.

SECVNDA.

Ducito minimum in quadratum ſummæ omnium, fiet aggregatum cuborum à ſingulis.

Conſtat per 32. ſic in dato ſupra exemplo, ducito 2. in 900. quadratum ſummæ omnium 30. fit aggregatum cuborum à ſingulis 1800. vt prius.

TERTIA.

Ducito quadratum maximi in quadratum ſummæ extremorum, productum diuide per quadruplum minimi, orietur aggregatum cuborum à ſingulis.

Facile infertur ex 34. ſic in dato exemplo ducito 100. quadratum maximi, in 144. quadratum ſummæ extremorum, fit 14400. quem diuide per quadruplum minimi 2. puta per 8. fit 1800. aggregatum cuborum vt ante.

QVARTA.

Ducito maximum in ſemiſſem ſummæ extremorum, vel ſummam extremorum in ſemiſſem maximi, producti quadratum diuide per minimum, orietur aggregatum cuborum à ſingulis.

Rurſus infertur ex 34. vel etiam ex præcedente regula, ſit ducendo 10. in 6. vel 12. in 5. fit 60. cuius quadratus 3600. quo diuiſo per minimum 2. fit aggregatum cuborum à ſingulis, vt ſupra 1800.

FINIS.

Ne vacarent paginæ ſequentes, placuit has Epiſtolas adjicere varijs refertas D. P. de FERMAT in quoſdam Græcos authores obſeruationibus, quarum nonnullæ ad Mathematicas pertinent diſciplinas.

VIRO CLARISSIMO D. DE RANCHIN.
P. Fermat S. P. D.

Polyænum tibi tuum, Vir Clariſſime, mitto, ſed obſeruanda in eo quædam ſuppeditat codex manuſcriptus optimæ notæ auctorum rei militaris hactenus ineditorum quem penes me habeo; apud eum collectionem quamdam præceptorum & monitorum militarium inueni ſub nomine παρεκβολῶν, cuius auctorem licet manuſcriptus non detegat, colligo tamen ex gloſſario Græcobarbaro Meurſii, eum eſſe Heronem, non illum quidem Alexandrinum cuius ſpiritalia & alia quædam opuſcula extant, & qui antiquo, hoc eſt, optimo æuo, Græcè ſcripſit, ſed alium poſterioris æui, quod pleraque ipſius vocabula Græcobarbara ſatis innuunt; vtrumque, ætatem nempe & nomen auctoris confirmat Meurſius in voce κοντυβέρνιον vbi citantur ſequentia Heronis verba in παρεκβολαῖς, ἀπέστειλε γοῦν τῆς νυκτὸς εἰς τὰ ἄπληκτα αὐτῶν καὶ τὰ κοντυβέρνια, hæc enim verba cum in meo manuſcripto deſint, ſupplendum in eo nomen auctoris ex manuſcripto Meurſii; tempus vero quo hæc ſcribebantur & quo voces ἄπληκτον & κοντυβέρνιον in vſu erant, vltra ſeptingentos plus minùs annos non videtur excurrere; in hoc autem παρεκβολῶν tractatu, pleraque Polyæni ſtratagemata ſuppreſſo authoris nomine aliis ſæpe verbis referuntur, quandoque & iiſdem, vnde ampla emergit emendationum & notarum criticarum penus; celebriores aliquot tibi, vel ſi mauis doctis omnibus tuo nomine iure repreſentationis libenter exhibeo.

Cleomenis ſtratagema narratur libro 1. Polyæni pag. 20. editionis Tornæſianæ ſequentibus verbis, Κλεομένης Λακεδαιμονίων βασιλεὺς, Ἀργείοις ἐπολέμει καὶ ἀντεστρατοπέδευσεν, ἦν τοῖς Ἀργείοις ἀκριβὴς φυλακὴ τῶν δρωμένων τοῖς πολεμίοις, καὶ πάντα ὅσα Κλεομένης βούλοιτο ὑπὸ κήρυκος ἐσήμαινε τῇ στρατιᾷ, καὶ αὐτοὶ τὰ ἴσα δρᾶν ἐσπούδαζον, ὁπλιζομένων ἀνθωπλίζοντο, ἐξιόντων ἀντεπεξῄεσαν, ἀναπαυομένων ἀντανεπαύοντο, Κλεομένης λάθρα παρέδωκεν ὅταν ἀριστοποιεῖσθαι κηρύξῃ ὁπλίσασθαι, ὁ μὲν ἐκήρυξεν, οἱ δὲ Ἀργεῖοι πρὸς ἄριστον ἐτράποντο· Κλεομένης ὡπλισμένους ἐπαγαγὼν ῥᾳδίως ἀνόπλους καὶ γυμνοὺς τοὺς Ἀργείους ἀπέκτεινεν, hoc loco poſt verba ἐξιόντων ἀντεπεξῄεσαν, addendum ex manuſcripto ἀριστώντων ἠρίστων, quod finis ipſius ſtratagematis pleniſſimè confirmat.

Themiſtoclis ſtratagema, eodem libro pag. 44. refertur hoc modo, Θεμιστοκλῆς Ἰώνων Ξέρξῃ συμμαχούντων, ἐκέλευσε τοῖς Ἕλλησι καταγράφειν ἐπὶ τοῦ τείχους, Ἄνδρες Ἴωνες οὐ δίκαια ποιεῖτε στρατεύοντες ἐπὶ τοὺς πατέρας, τούτων ἀναγινωσκομένων βασιλεὺς ὑπόπτους αὐτοὺς ἐποιήσατο, corrigendum ex manuſcripto ἐλογίσατο, quam eſſe veram lectionem innuit ſenſus.

Ageſilai ſtratagema occurrit lib. 20. pag. 86. Ἀγησίλαος, aitille, ἐν Κορωνείᾳ Ἀθηναίους ἐνίκησεν, ἤγγειλέ τις, οἱ πολέμιοι φεύγουσιν εἰς τὸν νεὼν τῆς Ἀθηνᾶς, ὁ δὲ προσέταξεν ἐᾶν αὐτοὺς οἷ καὶ βούλοιντο ἀπιέναι. ὡς ἄρα εἴη σφαλερὸν συμπλέκεσθαι τοῖς ἐξ ἀπονοίας μαχομένοις, ibi loco vocis Ἀθηναίους reponendum ex manuſcripto Θηβαίους.

Aliud Ageſilai ſtratagema refert Polyænus eodem libro pag. 103. Ἀγησίλαος ἐν ταῖς διαπρεσβείαις ἠξίου τῶν πολεμίων τοὺς μάλιστα δυνατοὺς πέμπεσθαι πρὸς αὐτὸν οἷς διαλέξηται περὶ τῶν κοινῇ συμφερόντων. τούτοις ἐπὶ πλεῖστον συγγινόμενος, καὶ κοινωνῶν ἑστίας καὶ σπονδῶν, ταῖς πόλεσιν στάσιν ἐνεποίει διὰ τὰς τῶν πολλῶν ὑποψίας, Vulteius hoc modo interpretatur, Ageſilaus in legationibus petebat ab hoſtibus vt maxime potentes ad ſe mitterent; cum quibus de communi vtilitate ſermones conferret, cum his plurimum habens conſuetudinis, & communicans focum ac cineres, ſeditiones in vrbibus excitabat propter vulgi ſuſpiciones. Videtur interpres loco verbi σπονδῶν quod eſt in textu Græco

legiſſe σποδῶν cum vertat cineres, ſed nihil mutandum ex manuſcripto euincitur vbi leguntur hæc verba καὶ δρασας πρὸς αὐτὰς πανύμενος.

Clearchi ſtratagema narratur libro eod. pag. 110. his verbis, Κλέαρχος ἦν ἐν Θράκῃ νύκτερινοὶ φόβοι τὸ στράτευμα κατελάμβανον, ὁ δὲ παρήγγειλεν, εἰ γένοιτο νύκτωρ θόρυβος, μηδένα ὀρθὸν ἀνίστασθαι, ὁ δὲ ἀναστὰς ἀναιρείσθω, τὸ παράγγελμα τοῦτο ἐδίδαξε τοὺς στρατιώτας καταφρονεῖν τοῦ νυκτερινοῦ φόβου. verba quædam hîc ſupplenda ex manuſcripto, quæ tamen videtur in ſuo codice vidiſſe interpres latinus, licet deſint in editione græcâ Tornæſii, ſunt autem ſequentia, καὶ οὕτως ἀνεπαύσαντο ἀναπηδῶντες καὶ ταρασσόμενοι. Atque ita deſierunt exilire ac perturbari.

Perdiccæ ſtratagema ſequens legitur libro 4. pag. 314. Περδίκκας Ἰλλυριοῖς καὶ Μακεδόνων πολεμούντων ἐπειδὴ πολλοὶ Μακεδόνες ἡλίσκοντο ζωγρεῖν, καὶ οἱ λοιποὶ Μακεδόνες λύτρων ἐλπίδι πρὸς τὰς μάχας ἦσαν ἀτολμότεροι ἐπεκηρυκεύσαντο περὶ λύτρων, ἐντειλάμενος τῷ κήρυκι ἐπανελθόντι ἀγγεῖλαι ὡς ἄρα λύτρα Ἰλλυριοὶ μὴ προσίοιντο. ἀλλὰ ψηφίσαιεν τοὺς αἰχμαλώτους κτείνειν. οἱ δὴ Μακεδόνες ἀπογνόντες τῆς διὰ τῶν λύτρων σωτηρίας εὐτολμότεροι πρὸς τὰς μάχας ἐγίνοντο, ὡς ἐν μόνῳ τῷ νικᾶν ἔχοντες τὸ σώζεσθαι, quod ſic interpretatur Vulteius, Perdiccas Illyriis & Macedonibus bellum gerentibus cum multi Macedones caperentur viui, reliqui etiam redemptionis ſpe ad pugnam minus alacres erant, quibus legationem inter ſe de redemptoriis muneribus mittentibus, præcepit legato vt reuerſus nunciaret ſe redemptoria munera Illyriorum non accepturum, ſed condemnatos captiuos morte affecturum, Macedones deſperatâ ſalute redemptiuâ audaciores ad pugnandum reddebantur, quippe quibus in ſolâ victoriâ ſalus poſita eſſet, in hoc ſtratagemate vocem Ἰλλυριοὶ mutandam in Ἰλλυριῶν indicat nota marginalis editionis Tornæſianæ; ſi vera eſſet explicatio Vulteii, non ſolum vera, ſed & neceſſaria eſſet illa emendatio, ſed frigidiſſimum eſſet ſtratagema, ſi ſequeremur ſenſum interpretis, Polyænus quippe vult Perdiccam præcepiſſe legato, vt reuerſus nuntiaret Illyrios redemptoria munera non accepturos, & hic eſt verus ſenſus ſtratagematis, quem Hero aliis verbis, ſecundum hanc quæ eſt vera & germana interpretatio, expreſſit in manuſcripto his verbis, ἐπιτηδεύσας τοιοῦτον, παρεσκεύασέ τινα ὡς πρόσφυγα ἐλθόντα ἀπὸ τῶν πολεμίων εἰπεῖν ὅτι οἱ πολέμιοι ἐβουλεύσαντο καὶ ἀπεκύρωσαν ἵνα ὅσους κρατήσουσιν αἰχμαλώτους ἀποκτείνωσι.

Alexandri ſtratagema refertur etiam lib. 4. pag. 248. verbis ſequentibus, Ἀλέξανδρος Δαρείῳ παρατάσσεσθαι μέλλων, παρήγγειλε τοῖς Μακεδόσιν ἔδωκεν. ἣν ἐγγὺς γένηται τῶν Περσῶν εἰς γόνυ κλίναντες ταῖς χερσὶν διατρίβετε τὴν γῆν. ἣν δὲ ἡ σάλπιγξ ὑποσημήνῃ τότε δὴ..... Μακεδόνες οὕτως ἐποίησαν, οἱ δὲ Πέρσαι σχῆμα προσκυνήσεως ἰδόντες, τὴν πρὸς τὸν πόλεμον ὁρμὴν ἐξέλυσαν καὶ ταῖς γνώμαις ἐγένοντο μαλακώτεροι. Δαρεῖος δὲ ἐκυδαίνετο καὶ φαιδρὸς ἦν ὡς ἀμαχὶ κρατῶν, οἱ Μακεδόνες ὑπὸ τῷ συνθήματι τῆς σάλπιγγος ἀναπηδήσαντες ῥυμηδὸν ἐμβάλλουσι τοῖς πολεμίοις καὶ τὴν φάλαγγα ῥήξαντες ἐς φυγὴν ἐτράποντο.

Hoc loco deſunt quædam verba poſt vocem τότε, quæ ſupplenda ex manuſcripto vbi narratio eſt integra & elegans; lacuna itaque ex eo ſic replenda, τότε μετὰ θυμοῦ καὶ ἀνδρείας τοῖς πολεμίοις προσβάλλετε.

Pammenis ſtratagema tale proponitur libro 5. pag. 385. Παμμένης ὀλίγην ἔχων δύναμιν ὑπὸ πλειόνων ἀπολειφθεὶς ἔπεμψεν αὐτομόλους ἐς τὸ τῶν πολεμίων στρατόπεδον, ὁ δὲ σύνθημα ἐκμαθὼν ἤγγειλε τῷ Παμμένει, ὁ δὲ νυκτὸς ἐπιθέμενος τοῖς πολεμίοις, πολλοὺς αὐτῶν φθείρας διεξεπαίσατο αὐτὸς σύνθημα, τοῖς δὲ ἦν ἀπορία γνωρίζειν ἐν σκότει τοὺς οἰκείους μὴ δυναμένοις διὰ τοῦ συνθήματος.

Hîc addenda ex manuſcripto poſt verbum αὐτὸς ſequentia, αὐτὸς μὲν καὶ ὁ τούτου στρατὸς ἐγίνωσκον τῶν πολεμίων τὸ σύνθημα, ἐκείνοις δὲ ἀπορία ἦν ἐν τῷ σκότει τῆς νυκτὸς γνωρίζειν τοὺς ἰδίους ἢ τοὺς πολεμίους, τῶν πολεμίων τὸ σύνθημα ἀποκρινομένων.

Pompiſci ſtratagema refertur lib. 5. pag. 402. Πομπίσκος πολιορκῶν πόλιν, ἐπὶ μὲν τὴν πολλὴν τῆς χώρας ἐξιέναι τοὺς πολεμίους ἐκώλυσεν, ἐπὶ δὲ τόπον ἕνα συνεχῶς.... καὶ τοῖς λῃζομένοις ἀπέχεσθαι τοῦ τόπου τούτου προσέταξεν, οἱ δὲ ἐκ τῆς πόλεως, ἀδεῶς ἐνταῦθα

περιΐσαι, ὁ δὲ παρὰ τῶν σκοπῶν, ὡς ἔμαθε τοὺς ἥκοντας πολλοὺς ἐπιθέμενος τοὺς πλείους αὐτῶν ἐχειρώσατο.

Vox συνεχῶς quæ hic vulgò legitur, corrigenda ex manuscripto & loco illius reponendum συνεχώρει quod ex coniecturâ viderat Casaubonus vt patet ex ipsius notis.

Alexandri Pherensis stratagema refertur lib. 6. pag. 426. Ἀλέξανδρος Πάνορμον πολιορκοῦντος Λεωσθένους πρὸς ἁπάσας τὰς Ἀττικὰς ναῦς φανερῶς ναυμαχεῖν οὐ θαρρῶν, διέπεμψεν ἐπὶ ἀκάτιον νύκτωρ, &c. legendum esse ἐπὶ ἀκατίῳ, vt vult Casaubonus in notis, confirmat codex manuscriptus vbi legitur διὰ μικροῦ πλοιαρίου, quæ verba idem sonant.

Cyri stratagema narrat Polyænus lib. 7. pag. 477. his verbis. Κῦρος Μήδοις παραταξάμενος τρὶς ἡττήθη; ἐπεὶ δὲ Περσῶν αἱ γυναῖκες καὶ τὰ τέκνα ἦσαν ἐν Πασαργάδαις τὴν τετάρτην μάχην ἐνταῦθα συνῆψε, πάλιν ἔφυγον οἱ Πέρσαι, ὡς δὲ ἴδον τὰ τέκνα καὶ τὰς γυναῖκας, παθόντες ἐπ' αὐτοῖς ἀνέστρεψαν, καὶ τοὺς Μήδους ἀτάκτως διώκοντας τρεψάμενοι, νίκην τηλικαύτην ἐνίκησαν, ὡς μηκέτι Κύρῳ πρὸς αὐτοὺς ἄλλης δεηθῆναι μάχης.

Hîc loco vocis παθόντες corrigendum ex manuscripto συμπαθόντες quæ vox itidem restituenda in stratagemate Apollodori pag. 435. manuscriptus noster ex quo coniicimus vocem παθόντες mutandam in συμπαθόντες verbis sequentibus rem narrat & stratagema Polyæni exprimit, οἱ δὲ συμπαθεία τούτων κινούμενοι, &c. vox autem illa melius authoris sensui respondet quam τι παθόντες vt legendum censuit Casaubonus.

Darij stratagema narratur lib. 7. pag. 489. hoc modo. Δαρεῖος ἐπολέμει Σάκαις τριχῆ διῃρημένοις, μιᾶς ἐκράτησε μοίρας, τῶν δὲ Σακκῶν ἰζόντων τὰς ἐσθῆτας καὶ τὸν κόσμον καὶ τὰ ὅπλα περιέθηκε τοῖς Πέρσαις, &c. hic loco vocis ἰζόντων quæ est corrupta in editione Tornæsii, legendum ex manuscripto ἀφαιρεθέντων.

Autophradatis stratagema legitur lib. 7. pag. 516. & tale est, Αὐτοφραδάτης ἐμβαλεῖν Πισίδαις βουλόμενος τὴν εἰσβολὴν στενοπόρον καὶ φυλαττομένην ὁρῶν, περιήγαγε μὲν τὸ στρατόπεδον, πάλιν δὲ ἀνηγαγεν ὀπίσω, μέχρι σταδίων ϛ΄, νὺξ ἐπῆλθεν, οἱ μὲν φυλάττοντες τῶν Πισιδῶν ἀπηλλάγησαν, οἰόμενοι τοὺς πολεμίους ἀπεληλυθέναι. ὁ δὲ τῶν ψιλῶν καὶ ὁπλιτῶν τοὺς ἐλαφροτάτους λαβὼν, πολλῷ συντόνῳ δρόμῳ διῆλθε τὰ στενὰ καὶ τὴν Πισιδῶν χώραν ἐπόρθησεν.

In hoc stratagemate loco verborum μέχρι σταδίων ϛ΄ reponendum procul dubio ἐπίσημον κόππα, quod Vulteius arithmeticarum apud Græcos notarum parum callens non intellexit, similitudine inter ϛ΄ quod significat 6. & ϟ΄ quod significat 90. delusus, legendum igitur μέχρι σταδίων ϟ΄, quam esse veram lectionem, ratio ipsa primum confirmat, si enim Autophradates ad sex tantum stadia recessisset, hostes suspicione, & metu non liberasset, deinde in manuscripto legitur ἐνενήκοντα absque notis arithmeticis.

Scipionis continentiæ exemplum laude dignissimum refertur lib. 8. pag. 568. sequentibus verbis, Σκηπίων δορυάλωτον λαβὼν ἐν Ἰβηρίᾳ πόλιν φοινισσαν, ἥς οἱ φυγαγωγοὶ παρθένον ἤγαγον κάλλους ὑπερφυῶς ἔχουσαν, τὸν πατέρα αὐτῆς ἀναζητήσας ἐχαρίσατο αὐτῷ τὴν θυγατέρα, τοῦ δὲ δῶρα προσκομίσαντος, ὁ δὲ καὶ ταῦτα συνεχαρίσατο, προῖκα φήσας ἐπιδιδόναι τῇ κόρῃ, &c. ibi vulgò legitur φυγαγωγοὶ quod interpres vertit captiuorum ductores, sed legendum ex manuscripto νυμφαγωγοὶ, hoc est virginum ductores, quæ correctio & verissima, & elegantissima, vt nullus supersit dubitandi locus.

Plura adiungerem, sed feriis iam desinentibus quarum beneficio otium suppetebat, finem quoque huic παρεκβολῶν παρεκβολῇ imponimus. Vale & me ama.



VIRO CLARISSIMO D. DE PELLISSON. S. Fermat S. P. D.

CRiticas obseruationes quas mihi nuper misisti, vir clarissime, sæpius legi non sine voluptate & admiratione; in illis enim ingenij, judicij, & doctrinæ dotes quas in te iampridem suspicimus vbique elucent, nihil autem inuenire possim quod tanti muneris vice tibi referam, nisi commodùm egestati meæ succurrerent variæ lectiones quas vir tibi singulari coniunctus amicitiâ, cuius mihi iucunda semper est recordatio, margini apposuit quorumdam librorum quos sedulò peruoluebat, & quorum pleraque loca, sed ὁδοῦ πάρεργον, emendauit; scis enim quàm præcoci ille vbertate florum amænitatem fructuum maturitati iunxerit, nec me latet quantâ ipse fiduciâ suas exercitationes solitus sit in tuum sinum effundere; licet autem omnes istæ quas excerpsi emendationes, tibi nouitatis gratiâ non commendentur, illas tamen, quæ tua est comitas, te benignâ manu suscepturum non dubitò.

Theonem Smyrnæum, ne te diutius morer, vir clarissime, nosti, auctorem operis illius cui titulus τῶν κατὰ μαθηματικὴν χρησίμων εἰς τὴν τοῦ Πλάτωνος ἀνάγνωσιν, quod prodromi instar est aut isagoges Philosophiæ Platonicæ, quæ nemini Geometriâ non initiato patebat, illud opus edidit Lutetiæ anno 1644. Ismael Bullialdus vir doctissimus & Latinitate donatum elegantibus notis illustrauit; sed non omnibus illud mendis purgasse videtur, vt aliquot, ni fallor, exemplis quæ sequuntur, planum fiet.

Primum occurrit pag. 78. illius operis vbi περὶ ἁρμονίας & συμφωνίας agit, locum illum exscribere non piget, ipsa enim series emẽdationis procul dubio necessitatem, & veritatem ostendet, τὰ γράμματα, ait ille, φωναὶ πρῶται εἰσὶ καὶ στοιχειώδεις καὶ διαιρετοὶ καὶ ἐλάχισται &c. & inferius, τὰ δὲ διαστήματα ἐκ τῶν φθόγγων ὅντινες πάλιν φωναὶ εἰσὶ πρῶται καὶ διαιρετικαὶ καὶ στοιχειώδεις, huic voci διαιρετικαὶ asteriscus in margine respõdet cum voce διαιρεταὶ, at hîc reponenda bis videtur vox ἀδιαιρετοὶ loco τοῦ διαιρετοὶ & διαιρετικαὶ, legendum nempe γράμματα φωναὶ εἰσὶ ἀδιαιρετοὶ, idque confirmat Manuel Bryennius cap. 1. lib. 2. Ἁρμονικῶν legendum præterea φθόγγων ὅντινες πάλιν φωναὶ εἰσὶ πρῶται καὶ ἀδιαιρετοὶ, & hæc quoque lectio confirmatur verbis eiusdem Bryennii lib. 1. cap. 3. vbi dicit φθόγγος ἐστὶ ἀρχὴ ἁρμονίας ὡς ἡ μονὰς τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς, καὶ τὸ νῦν τοῦ χρόνου, punctum, vero & instans sunt ἀδιαίρετα & consequenter φθόγγος ἀδιαιρετὸς non diuidendi vim habens, vt vvlt interpres Latinus, nec immerito Bacchius Senior in introductione artis musicæ quæstioni illi τί οὖν ἐστιν ἐλάχιστον τῶν μελῳδουμένων, respondet, φθόγγος, quem non tantum ἐλάχιστον, sed etiam ἄτομον esse docet antiquæ musicæ celeberrimus auctor Aristides Quintilianus lib. 1. de Musicâ, atque ita authoritas æque ac ratio suffragatur huic emendationi, quæ fit vnius tantum litteræ mutatione; minimâ quoque mutatione alia fit eodem capite licet minoris momenti correctio, vbi vulgò male legitur, φησὶ καὶ τοὺς Πυθαγορικοὺς, legendum scilicet, φασὶ, vt apud Bryennium λέγουσι; paulo inferius vbi legitur ἀποτελεῖται ὁ φθόγγος βραδείας δὲ βαρὺς, καὶ σφοδρᾶς μὲν μείζων ἦχος, ἠρέμου δὲ μικρὸς, legendum videtur ἠρεμαίας, & Bryennij authoritate confirmatur.

Hactenus de sono de quo agitur in cap. illo 6. in cap. vero 8. agitur de semitonio, & ita vulgo legitur κατὰ καὶ τὸ ἡμίφωνον γράμμα οὐχ ὡς ἥμισυ φωνῆς καλοῦμεν ἀλλ' ὡς μὴ πᾶν αὐτοτελεῖ κατὰ ταυτὸ φωνεῖν, legendum vero videtur καθὸ non κατὰ, legendum præterea, ἀλλ' ὡς μὴ αὐτοτελῆ καθ' αὑτὸ φωνὴν ἀποτελοῦν, quæ lectio eiusdem Bryennij authoritate nixa veriorem vulgatâ sensum efficit.

¶ Atque harum probatio lectionum desumi potest, ἐκ τῶν παρὰ τοῖς μουσικοῖς ὑποτιθεμένων καὶ ἐκ τῶν παρὰ τοῖς μαθηματικοῖς λαμβανομένων, vt Porphyrii verbis vtar quæ in commentariis clarissimi interpretis referuntur pag. 276. sed non sine mendo, male enim ibi legitur, ἐκ τῶν ὑπὸ τῆς μουσῆς ὑποτιθεμένων.

Nec silentio prætermittenda est elegantissima, &, audacter dicam, certissima alterius loci eiusdem Theonis emendatio pagina 164. vbi de octonario loquitur, refertur ibi vetus inscriptio quam in columna Ægyptiaca reperiri tradit Euander hoc modo, Πρεσβύτατος πάντων Οσιρις θεοῖς ἀθανάτοις πνεύματι καὶ οὐρανῷ ἡλίῳ καὶ σελήνῃ καὶ γῇ καὶ νυκτὶ καὶ πατρὶ τῶν ὄντων καὶ τῶν ἐσομένων ΕΡΩΤΕ μνημεῖα τῆς αὐτοῦ ἀρετῆς βίου συντάξεως, id est, vt vertit Bullialdus, antiquissimus omnium Rex Osiris diis immortalibus Spiritui, & Cœlo, Soli, & Lunæ, & Terræ, & Nocti, & Diei, & patri eorum quæ sunt quæque futura sunt, prædicabo memoriam magnificentiæ ordinis vitæ eius, mendosum procul dubio in hac inscriptione illud ΕΡΩΤΕ, & hanc lectionem si retineas quis inde sensus elici poterit? legendum igitur ΕΡΩΤΙ, atque ita paruâ vnius scilicet litteræ mutatione huic loco sua lux, & amori sua laus facile restituitur; nec aliena est ab hoc loco sapientissimi Platonis, cuius velut interpres Smyrnæus ille, sententia, dum ait in conuiuio καὶ μὲν δὴ τήν γε τῶν ζώων ποίησιν πάντων τίς ἐναντιώσεται μὴ οὐχὶ ἔρωτος εἶναι σοφίαν ᾗ γίγνεται καὶ φύεται πάντα τὰ ζῶα, etenim animalium omnium effectionem, vt vertit Serranus, ex amoris sapientiâ existere, idest gigni atque nasci ecquis negauerit,

Per quem genus omne animantum
Concipitur visitque exortum lumina Solis.

His emendationibus vnam aut alteram duorum insigniûm locorum addam, quorum primus est apud Sextum Empyricum, alter apud Athenæum: Sextus ille lib. 1. Pyrrhoniarum hypotyposeon pag. 12. ostendere conatur quam variæ sint pro diuersitate ætatum Phantasiæ, παρὰ δὲ τὰς ἡλικίας, inquit, ὅτι ὁ αὐτὸς ἀὴρ τοῖς μὲν γέρουσι ψυχρὸς εἶναι δοκεῖ, τοῖς δὲ ἀκμάζουσιν εὔκρατος καὶ αὐτὸ βρῶμα τοῖς μὲν πρεσβυτάτοις ἀμαυρὸν φαίνεται, τοῖς δὲ ἀκμάζουσι κατακορές, καὶ φωνὴ ἡ αὐτὴ τοῖς μὲν ἀμαυρὰ δοκεῖ τυγχάνειν τοῖς δὲ ἐξάκουστος, id est vt vertit Henricus Stephanus, ex ætatibus autem quoniam idem aer senibus quidem frigidus esse videtur, aliis qui in ætatis flore constituti sunt bene temperatus, & idem cibus senibus quidem tenuis videtur at iis qui florent ætate crassus, eodem modo & vox eadem, alijs quidem depressa esse videtur, alijs vero alta; at huius loci elegantior sensus erit si legatur non βρῶμα sed χρῶμα, alioquin de sensu visus qui facilè maximam mutationem patitur, nullus hîc foret sermo, præterea τὸ ἀμαυρὸν melius colori conuenit quam cibo, & æque de colore ac de cibo dici potest τὸ κατακορὲς, sic apud Virgilium legimus, saturatas murice vestes, & hyali saturo fucata colore.

Nunc ad Athenæi locum transeo; quis autem vrbanissimi illius scriptoris sales variâ conditos eruditione ignorat? Et si quid in eo frigidum aut inficetum occurrat quis ibi mendum subesse non suspicetur? Suspecta igitur erit lectio loci illius in quo hic auctor lib. 12. loquitur de deprauatis Alcibiadis moribus, qui locus si vulgatam lectionem retineas ipso forsan Alcibiade deprauatior erit, Athenæi verba hæc sunt Λυσίας δὲ ὁ ῥήτωρ περὶ τῆς τρυφῆς αὐτοῦ λέγων φησὶν, ἐκπλεύσαντες γὰρ κοινῇ Ἀξίοχος καὶ Ἀλκιβιάδης εἰς Ἑλλήσποντον ἔγημαν ἐν Ἀβύδῳ δύο ὄντε Μεδοντίαδα τὴν Ἀβυδηνὴν καὶ Ξυνωκείπην, ἔπειτα αὐτοῖν γίνεται θυγάτηρ ἣν οὐκ ἔφαντο δύνασθαι γνῶναι ὁποτέρου εἴη, ἐπεὶ δὲ ἦν ἀνδρὸς ὡραία ξυνεκοιμῶντο καὶ ταύτῃ, καὶ εἰ μὲν χρῷτο καὶ ἔχοι Ἀλκιβιάδης Ἀξιόχου ἔφασκεν εἶναι θυγατέρα, εἰ δὲ Ἀξίοχος Ἀλκιβιάδου, error hic procul dubio in voce illa ξυνωκείπην & legendum ξυνωκείτην hoc est concubuerunt, atque ita si falsa Xynoceipe deleatur, & sola supersit illa duobus nupta Medontias, portentosæ istorum iuuenum libidinis nouitati nihil detrahetur; veritas autem istius emendationis satis per se patet, & ex ipsâ loci serie elici potest, in quo illud δύο ὄντε alioqui superuacaneum foret, nec iam amplius ambigua proles; ratio igitur illius correctionis in promptu est, cui eiusdem Athenæi accedit authoritas, is enim lib. 13. iterum de Alcibiade loquitur hoc modo, Μεδοντίδος γοῦν τῆς Ἀβυδηνῆς ἐξ ἀκοῆς ἔστερξε καὶ πλεύσας εἰς Ἑλλήσποντον σὺν Ἀξιόχῳ ὃς ἦν αὐτοῦ τῆς ὥρας ἐραστής, ὥς φησι Λυσίας ὁ ῥήτωρ ἐν τῷ κατ' αὐτοῦ λόγῳ, καὶ ταύτης ἐκοινώνησεν αὐτῷ, id est vt interpretatur Dalechampius, Medontidem Abydenam auditione tantum ille amare cœpit, & imprimis charam habuit, eam tamen cum Hellespontum nauibus

adiiſſet, Axiocho nauigationis comiti, & pulchritudinis ipſius amatori, vt inquit Lyſias in oratione quam contra eum ſcripſit, vtendam dedit, ibi autem fictitiæ Xynoceipes nulla mentio, & illud ἐκοινώνησεν æque ac ξυνωκείτην communes Alcibiadis, & Axiochi amores fuiſſe ſatis arguit.

Sed ab iſtorum juuenum voluptate oculos auertamus, & eam quæ ex ſtudiorum ſocietate percipitur, puriorem & diuturniorem, ſummumque aduerſorum ſolatium litteras eſſe fateamur; cum tu his mirum in modum oblecteris, non iniucundas tibi fore confido obſeruationes in quibus amici manum agnoſces; ipſius ego lucubrationum ſparſas varijs in locis reliquias e tenebris quibus illas parentis modeſtia abdiderat, eruere conatus ſum, neque hæc contemnenda duxi, vt ex hoc ſpicilegio rerum quæ perſpicaciſſimos, vt ita loquar, meſſores latuerunt, pateat, quantam earum auctor in liberiori & coniecturis aperto critices campo ſegetem fuerit collecturus ſi ſæpius in illo ſpatiari voluiſſet: Vale & me ama.

